

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE
TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA**

**TRÁFICO DE TELEFONÍA MÓVIL:
CARACTERIZACIÓN E
IMPLICACIONES DEL TIEMPO DE
OCUPACIÓN DEL CANAL**

Autor: Francisco Barceló Arroyo
Director: Josep Paradells Aspas

CAPÍTULO 2

Modelado estadístico de la duración de la llamada en sistemas PAMR

En el capítulo 1 se han introducido los modelos habitualmente utilizados para modelar sistemas de telefonía móvil. De la discusión de las hipótesis realizada para cada modelo, puede fácilmente concluirse que la de ocupación del canal distribuida acorde a una exponencial negativa es poco ajustada a la realidad de algunos sistemas. Parece evidente que la limitación de tiempo de uso del canal en un sistema PAMR y el hecho de que todas las llamadas sean de un mismo carácter profesional (o al menos debieran serlo) hace que la ocupación del canal sea más regular, es decir menos dispersa que la exponencial. También es claro que en telefonía móvil pública celular los terminales de viandantes ocuparán un mismo canal prácticamente a lo largo de toda la llamada, mientras que los instalados en vehículos lo ocuparán solo durante una fracción hasta el traspaso, provocando una distribución más dispersa que la exponencial. Sin embargo desde un punto de vista de ingeniería, no son suficientes los razonamientos expuestos anteriormente, sino que hay que realizar medidas que pongan de manifiesto la no exponencialidad de la distribución del tiempo de ocupación del canal.

En este capítulo 2 se presentan las herramientas necesarias para probar que distribución se ajusta mejor al conjunto de datos obtenidos mediante medidas de los tiempos de ocupación de canal. Para ello se introducen algunos conceptos estadísticos y se justifican las funciones de distribución que luego se intentan ajustar a las medidas tomadas en sistemas PAMR a nivel de mensaje o llamada. Muchos de los conceptos tratados en este capítulo se utilizan también en el capítulo 4.

2.1 Antecedentes de caracterización de voz en sistemas PMR

En la mayor parte de la literatura existente sobre evaluación y dimensionado de sistemas de telefonía, se asume el modelo exponencial de ocupación del canal. La razón de la utilización de dicho modelo creemos que se debe entre otras a las siguientes razones:

- La distribución exponencial negativa, al ser reflejo de un proceso sin memoria facilita enormemente la obtención de resultados analíticos que de otro modo serían intratables. Así las fórmulas de Erlang-B y Erlang-C para población infinita [GRO74, KLE75] y de Engset [DOY84] son solamente válidas para distribución exponencial del tiempo de servicio. Si bien la probabilidad de demora calculada conforme al modelo de cola $M/M/s$ constituye una excelente aproximación para la cola $M/G/s$ [TIJ86], los tiempos de espera en cola pueden resultar muy dispares.
- Ausencia de resultados analíticos exactos para sistemas de colas con distribución general del tiempo de servicio. Curiosamente es mucho más sencilla la solución analítica de la cola $G/M/s$ que la de la $M/G/s$ aunque parece más natural encontrar en el mundo real las últimas con mayor frecuencia que las primeras [KLE75]. Las aproximaciones existentes son en ocasiones poco precisas, y en otras de cómputo tan complejo que es menos oneroso simular el sistema sin tener estimaciones previas de los resultados que se pueden obtener. Uno de los objetivos de esta tesis es precisamente el de ahondar en las aproximaciones para las distribuciones de tiempo de servicio que puedan aparecer en sistemas de telefonía móvil. Estas aproximaciones se presentan en los capítulos 3 y 5.
- Ausencia o escasez de medidas estadísticas de los tiempos de ocupación de canal. Esta escasez se ha visto favorecida por la reserva legítima de los operadores de sistemas de telefonía móvil a la hora de divulgar las estadísticas de que disponen. De este modo se ha venido utilizando la distribución exponencial, clásica en evaluación de sistemas de telefonía fija. Sin embargo la distribución exponencial en el ámbito de la telefonía fija ha sido recientemente rebatida, de modo que en [BOL94a, BOL94b, DUF94] se presentan ajustes muy buenos de la duración de la llamada en base a distribuciones hipereponenciales y se demuestra que los coeficientes de variación de pueden ser elevados (ver sección 5.1).

A pesar de las razones expuestas, sorprende el hecho de no hallar en la bibliografía ningún estudio de modelado estadístico de voz en sistemas PMR troncales, y de hallar apenas unos pocos sobre sistemas PMR convencionales o monocanal que se refieren más adelante en esta sección. Aunque algunas contribuciones presentadas en esta tesis permiten ciertos cálculos del GoS teniendo en cuenta la distribución del tiempo de ocupación del canal, antes no posibles, la necesidad de alimentar simulaciones con datos más cercanos a la realidad de los sistemas debería de haber potenciado la aparición de dichos estudios.

Así existen estudios de monitorización de sistemas monocanal como [HAG76] o [BUR80] en los que no se hace referencia a la distribución estadística del tiempo de ocupación del canal y que en realidad constituyen estudios de carga con un enfoque cuantitativo y no cualitativo. En [COH84] se analizan sistemas monocanal cada uno de los cuales da servicio a una sola flota, estudiando el coeficiente de variación de las distribuciones observadas. Dicho coeficiente es la mayoría de las veces (60% de las flotas) mayor que uno (se obtienen coeficientes de variación al cuadrado de hasta 2,4) dando lugar a distribuciones hiperexponenciales de la duración de la conversación. Dado que las medidas que se presentan en este capítulo arrojan coeficientes de variación siempre menores que la unidad, cabe pensar que ello es debido al efecto de la concentración y mezcla de tráficos de distintas características. En [HOA85] se realizan ajustes del tiempo de ocupación del canal a funciones de densidad de probabilidad en base a etapas sin memoria utilizando el test de Kolmogorov-Smirnov. Dada la variedad de canales que se investigan en este último trabajo, pertenecientes a flotas de diversa índole, no se concluye que una función de distribución particular resulte en un mejor ajuste que otras de modo general. La misma consideración puede realizarse para los coeficientes de variación obtenidos cuyos cuadrados oscilan entre 0,43 y 1,96.

En [HES81] encontramos una caracterización de la duración de la llamada en sistemas troncales en la que los autores se limitan a mostrar el histograma empírico de las duraciones de las llamadas. Como dicho histograma es “razonablemente” recto sobre una escala logarítmica, los autores aceptan la distribución exponencial, aunque comprueban que dicha distribución sobrestima la probabilidad de llamadas de larga duración. El trabajo citado no contiene la aplicación de ningún test de bondad de ajuste a los datos obtenidos ni el intento de encontrar funciones de distribución que se ajusten a los datos mejor que la exponencial.

2.2 Características de la duración de la llamada en un sistema PAMR

En este capítulo modelamos los sistemas PAMR en base a las medidas de la duración de ocupación del canal tomadas de dos operadores distintos. En un sistema PAMR podemos realizar las siguientes consideraciones a priori sobre algunas características de los resultados que esperamos obtener. Podemos tomar como referencia el caso de un sistema de telefonía fija pública donde comúnmente se asume una distribución exponencial de la duración de la llamada con una media de unos 113 segundos [BOL94a].

- La limitación de la duración de la llamada por parte del operador del sistema PAMR tiende a disminuir la media y el coeficiente de variación de las distribuciones que se investigan.
- Con independencia del punto anterior, el hecho de que el objetivo de la conversación sea únicamente profesional también contribuirá a disminuir la media de la duración de la llamada. El coeficiente de variación también disminuirá al disminuir la dispersión, debido a la mayor semejanza entre sí de los temas tratados en las conversaciones. También la forma en que se habla y organiza la comunicación es más disciplinada, lo cual conlleva una menor dispersión en la duración de las conversaciones.
- Al mezclarse llamadas pertenecientes a distintas flotas cabe esperar también una disminución del coeficiente de variación. Así una flota que por su idiosincrasia sigue una distribución hiperexponencial de la duración de sus llamadas como son algunas de las que se citan en [COH84, HOA85], es vista por nosotros mezclada ya con otras muchas de duración hipoexponencial, y la resultante es también hipoexponencial.
- La tarificación plana habitual en estos sistemas será el único factor tendente a aumentar la duración media de la llamada. Aun así comprobaremos en las secciones 2.7 y 2.8 que este es un factor de muy escaso peso.
- Por tratarse de sistemas públicos no cabe esperar peculiaridades que tal vez podríamos encontrar en sistemas PMR privados y que podrían provocar situaciones singulares. Probablemente este es uno de los factores que influyen en los altos coeficientes de variación encontrados en [COH84, HOA85] donde se analizan sistemas de una sola flota (en los trabajos referidos los coeficientes

de variación obtenidos resultan altos al compararlos con los obtenidos en esta tesis).

De este modo y antes de tomar medidas y realizar ajustes, esperamos obtener coeficientes de variación menores que uno. En realidad las poblaciones medidas presentan coeficientes de variación bajos tal como se refleja en las secciones 2.7 y 2.8. Por otro lado, las funciones que intentaremos ajustar a los datos medidos estarán englobadas en una de las dos siguientes categorías:

- Combinaciones de etapas sin memoria: en ingeniería de teletráfico siempre han sido apreciadas este tipo de funciones de distribución, ya que con ellas es siempre posible la representación del proceso de Markov asociado al sistema y la obtención de soluciones exactas [KLE75]. Aunque la obtención de dichas soluciones es más teórica que práctica, dada la extrema complejidad que pueden alcanzar los planteamientos matemáticos, con otras funciones es imposible la obtención de soluciones analíticas.
- Logonormales: la percepción humana del tiempo sigue leyes logarítmicas al igual que otras percepciones [BOL94a]. Este hecho está demostrado únicamente para tiempos de corta duración y no para duraciones del orden de la de una llamada telefónica. Bolotin en el artículo citado generaliza a duraciones largas obteniendo buenos resultados. Esto hace de la distribución logonormal y de las combinaciones de logonormales candidatas aptas para ajustar los datos medidos.

2.3 Obtención de los datos

Los datos de duración de la llamadas con que se ha trabajado han sido obtenidos de dos sistemas PAMR comerciales con gestión por mensaje, durante los meses de Mayo y Junio de 1996. Todas las medidas fueron realizadas en días laborables y durante la hora cargada (periodo de 60 minutos consecutivos a lo largo de un día de actividad durante el cual la carga media medida es mayor).

La monitorización se ha realizado con un receptor de radiofrecuencia comercial sintonizado a la frecuencia portadora de interés en cada caso. La actividad del canal ha sido registrada en ficheros de un ordenador personal (PC) utilizando como interfaz un programa suministrado con el receptor. En cada registro de actividad queda constancia de la hora a que se inicia dicha actividad y la hora a la que finaliza, así como del nivel de portadora existente. Los datos de duración de las llamadas han

sido procesados en algunos casos para evitar la repercusión de ruidos o interferencias, y disminuir la repercusión de singularidades muy peculiares de un sistema concreto. Estos procesos de filtraje se detallan en las secciones 2.7 y 2.8. Posteriormente se ha procedido al ajuste de una función de densidad de probabilidad mediante un test de bondad de ajuste en base a lo expuesto en la siguiente sección. Este procedimiento se refleja en la figura 2.1.

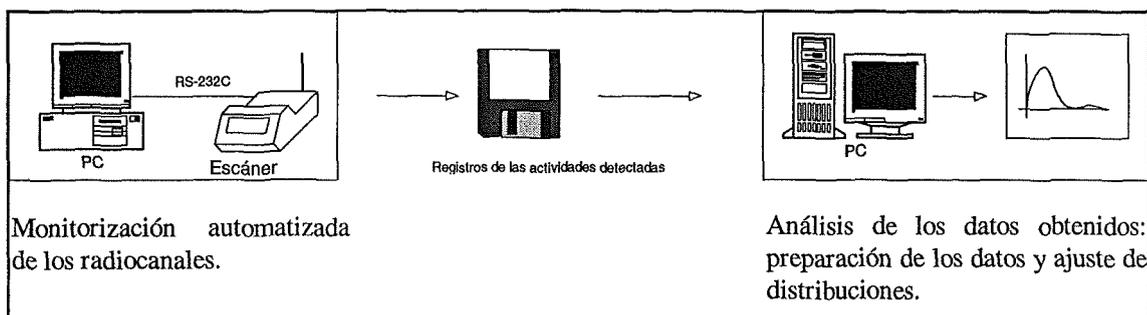


Figura 2.1 Esquema del sistema utilizado para la obtención, registro y posterior análisis de los datos.

Dado que sintonizamos el canal de bajada de repetidor a estación móvil, podemos fijar el control de silenciamiento (“*sqelch*”) a su posición máxima. Esto hará que en pocas ocasiones el ruido sea percibido como llamada, mientras que dada la potencia alta a que emite el repetidor, perderemos muy pocas llamadas por tener el silenciador en esta posición. En los sistemas medidos hay portadora en el radiocanal durante toda la fase de la llamada. Esto nos permite asociar actividad de portadora con llamada y evita la difícil tarea de identificar la duración de las llamadas a partir de datos de transmisiones que ha tenido que ser llevada a cabo en los trabajos citados en la sección 2.1 [HAG76, BUR80, COH84, HOA85]. En todos ellos la duración del mensaje es inferida a partir de los datos de duración de las transmisiones y de los intervalos de silencio entre ellas a partir de criterios y algoritmos fijados por los propios autores. Para nosotros es más difícil identificar la duración de las transmisiones tal como se verá en el capítulo 4.

2.4 Pruebas de bondad de ajuste

Un test de bondad de ajuste es un procedimiento mediante el cual se intenta comprobar la veracidad de una hipótesis estadística. Se trata pues de observar si a partir de la muestra obtenida existen evidencias estadísticas suficientes contra la

aceptación de la hipótesis de que la población que ha generado la muestra sigue la función de distribución que se propone. La utilización de un test de bondad de ajuste en lugar de una simple diferencia (como podrían ser el error medio, máximo, cuadrático medio, etc.) entre la distribución propuesta y la obtenida empíricamente permite obtener unos resultados con significado estadístico propio. El objetivo del test es el de hallar el nivel de significancia α , entendido como la probabilidad de que ocurra un error de Tipo I consistente en rechazar la hipótesis objeto del test cuando en realidad es cierta.

De los diferentes tests de ajuste existentes, en esta tesis se utiliza el test de Kolmogorov-Smirnov (K-S). Este test es el más utilizado en la bibliografía consultada [HOA85, GUE87, BOL94a, BOL94b, ZON95]. Dado que no existen caracterizaciones previas del tráfico modelado en este trabajo, la potencia del test no es un factor determinante en la elección del mismo, al no tratar de refinar o comprobar resultados ya existentes en la literatura. El test de K-S ofrece la ventaja de ser muy conocido y fácil de aplicar, mientras que por otro lado evita la engorrosa dependencia de los ajustes con respecto al tamaño de los intervalos del histograma que sufren otros tests como el ji-cuadrado (χ^2) [LAW91] utilizado en [JED96]. La difícil decisión sobre el tamaño adecuado de los intervalos la evita el test K-S al utilizar funciones de distribución en lugar de funciones de densidad de probabilidad dado el carácter ingrator de las primeras.

Utilizaremos el test en su versión original de todos los parámetros conocidos [ALL90] ya que para algunas de las distribuciones propuestas no existe una versión particular del test K-S. Esto produce unos resultados conservadores en el sentido de que las significancias obtenidas son más bajas que las que se obtendrían aplicando la versión particular para la distribución en cuestión. El estadístico utilizado por el test es la distancia K-S modificada, que para el caso de todos los parámetros conocidos puede ser calculada como [LAW91]:

$$D = \varepsilon \left(\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.1)$$

donde n representa el tamaño de la muestra y ε la máxima diferencia entre las funciones de distribución empírica y teórica propuesta.

Una vez fijado el nivel de significancia del test α o probabilidad de error de Tipo I y para n grande, la máxima diferencia entre la función de distribución empírica y la propuesta no puede superar el valor ε , siendo:

$$\alpha = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 n \epsilon^2} \quad (2.2)$$

En cuanto a los parámetros ϵ y α el primero de ellos muestra el aspecto geométrico del error cometido sobre las funciones de distribución empírica y teórica, mientras que el segundo pone de manifiesto el aspecto estadístico. La distancia modificada D , al igual que el nivel de significancia, incluye el tamaño de la muestra, de modo que aun teniendo un significado geométrico incluye aspectos estadísticos en su obtención. Existe una relación biunívoca entre los parámetros D y α , de modo que a menor D mayor es el nivel de significancia.

Los niveles de significancia exigidos en este tipo de pruebas son distintos según el campo en el que se trabaja, si bien el valor de $\alpha = 5\%$ es el más comúnmente utilizado para no rechazar la distribución propuesta. En el campo de las telecomunicaciones, y más concretamente en los ajustes de tiempos de ocupación de canales, podemos citar la utilización de significancias del 5% [BOL94a, BOL94b, ZON95] y del 15% [JED96]. Otros trabajos como [HOA85, GUE87] obtienen los niveles de significancia para cada caso en lugar de fijarlo de antemano y rechazar o no la hipótesis. La forma en que presentaremos los resultados en este trabajo es más parecida a estos últimos trabajos, ordenando los ajustes en base a la significancia obtenida. En aquellos casos en los que la significancia es muy baja ($\alpha < 10^{-3}$) se utiliza el estadístico D para comparar entre los ajustes de distintas funciones de distribución.

2.5 Estimación de los parámetros

Cada una de las funciones de distribución propuestas en la sección 2.6 está caracterizada por una serie de parámetros, que deberán ser obtenidos a partir de los datos experimentales. Existen diversas maneras de estimar los parámetros de la función de distribución propuesta a partir de los datos, de las que destacamos las siguientes:

- **Estimación por momentos:** los parámetros de la distribución teórica se ajustan de modo que los momentos de la distribución teórica coincidan con los de la empírica, empezando por los momentos de orden inferior. Así por ejemplo para una distribución exponencial que solo tiene un parámetro solamente podremos conseguir que coincida el primer momento, es decir la media. Los parámetros se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones que relacionan

los parámetros con los momentos (tantas ecuaciones como parámetros tiene la distribución teórica). Se utiliza esta forma de estimación en [HOA85].

- Estimación por norma de error mínima: consiste en minimizar la norma de la diferencia entre la distribución empírica obtenida y la teórica. Es más conveniente utilizar la función de distribución que la de densidad de probabilidad debido a que la primera tiene un efecto de suavizado. Por otro lado, dado que el test de K-S trabaja con la función de distribución esta propuesta es sencilla y razonable. Este método es utilizado en [ZON95].
- Estimación por máxima verosimilitud (“Maximum Likelihood Estimation”, MLE): consiste en escoger como valores de los parámetros de la distribución teórica aquellos que hacen que los valores de la muestra sean los más probables. Para algunas distribuciones los parámetros obtenidos mediante MLE coinciden con los obtenidos por momentos, mientras que en otras distribuciones en las que no coinciden podemos encontrar en la literatura las fórmulas de los parámetros MLE [HAS75]. Sin embargo, en general puede ser necesaria la obtención numérica de los parámetros de modo que sea máxima la probabilidad de los datos experimentales obtenidos. En los casos en los que es necesario acudir a soluciones numéricas para la obtención de los parámetros MLE, los parámetros resultantes de la estimación por momentos suelen constituir un buen vector de partida para obtener los parámetros MLE.

En este trabajo se utiliza la estimación MLE que produce en todos los casos analizados mejores ajustes que la estimación por momentos y la de norma de error mínima. Este método es también el utilizado en [JED96].

2.6 Funciones de distribución propuestas

A continuación se resumen las características de las distribuciones teóricas que se utilizan como candidatas en los test de bondad de ajuste. Las funciones de distribución para las que se comprueba la bondad del ajuste a los datos obtenidos experimentalmente responden a las dos clases expuestas en la sección 2.2. La serie de datos obtenidos empíricamente para las duraciones de las llamadas forma la serie $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, constituyendo por tanto una muestra de tamaño n .

- Exponencial: es la distribución utilizada por excelencia en los desarrollos analíticos de teoría de colas por su propiedad de “sin memoria”.

Capítulo 2

f.d.p. $f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}$, para $t \geq 0$

F.D.P. $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\beta}}$, para $t \geq 0$

Media β

Varianza β^2

Estimador MLE: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}$, es decir la media de los datos obtenidos que a su vez coincide con la estimación por momentos.

- Erlang- k : tiene una interpretación sencilla como la suma de k variables aleatorias exponenciales. Ajusta únicamente distribuciones con un coeficiente de variación inferior a la unidad.

f.d.p. $f(t) = \beta^{-k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\frac{t}{\beta}}$

F.D.P. $F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\frac{t}{\beta}} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^i}{i!}$

Media $k\beta$

Varianza $k\beta^2$

Estimador MLE: dado k , $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{nk}$; se toma la pareja (k, β) que proporciona un mejor ajuste.

- Erlang- i, k : es la mezcla de dos funciones de Erlang con el mismo parámetro β y distinto grado. Presenta una gran versatilidad pudiendo ajustar variables aleatorias con coeficientes de variación superiores e inferiores a la

unidad. Es la única de las distribuciones candidatas cuya f.d.p. puede ser bimodal dependiendo de los parámetros elegidos.

$$\text{f.d.p.} \quad f(t) = q\beta^{-j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\frac{t}{\beta}} + (1-q)\beta^{-k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\frac{t}{\beta}}$$

$$\text{F.D.P.} \quad F(t) = q \left(1 - \sum_{i=0}^{j-1} e^{-\frac{t}{\beta}} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^i}{i!} \right) + (1-q) \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\frac{t}{\beta}} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^i}{i!} \right)$$

$$\text{Media:} \quad qj\beta + (1-q)k\beta$$

Estimador MLE: se obtiene de forma numérica partiendo de la estimación por momentos.

- Logonormal: a diferencia de las anteriores no está basada en la combinación de etapas sin memoria. La utilización de distribuciones logonormales para modelar las duraciones de servicios de telecomunicación la propuso [BOL94] basándose en una generalización de la percepción logarítmica del tiempo que tiene el ser humano.

$$\text{f.d.p.} \quad f(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } t > 0$$

$$\text{Media} \quad e^{\mu+\sigma^2/2}$$

$$\text{Varianza} \quad e^{2\mu+2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\text{Estimador MLE:} \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \log T_i}{n} \quad \hat{\sigma} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\log T_i - \hat{\mu})^2}{n} \right]^{1/2}$$

2.7 Duración de los mensajes en el sistema PAMR-1

El sistema PRMA-1 es un sistema PMR troncal en explotación comercial en el que la duración de la llamada está limitada a 60 segundos. Si en un plazo de 7

segundos desde que se obtuvo el canal no se ha iniciado la comunicación (probablemente por no encontrar posición de despacho libre), el sistema corta la llamada. De este modo las llamadas cuyo retardo de flota superan la cota de 7 segundos se pierden, ya que tal como se ha visto el retardo de flota es responsabilidad de la empresa cliente. Así se evita que los clientes con retardo de flota alto debido a su bajo número de posiciones de despacho perjudiquen el GoS de aquellos que tienen un retardo de flota adecuado con un número de posiciones de despacho dimensionado de forma correcta. De igual modo si el sistema no detecta transmisión a lo largo de un periodo de 7 segundos la llamada se interrumpe.

Todos los datos se han obtenido durante la hora cargada y han sido filtradas las actividades de duración inferior a 1 segundo, probablemente producidas por ruido o interferencias de corta duración. Después del proceso citado trabajamos con una muestra de 2.200 llamadas; como referencia podemos citar los tamaños de muestra utilizados en otros trabajos: entre 384 y 1.380 en [JED96], entre 980 y 6.000 en [BOL94b] y 2.400 en [HES81].

La figura 2.2 representa el tiempo medio remanente en función del tiempo transcurrido para las llamadas en base a los datos de duración registrados. La gráfica se ha obtenido tal como propone [BOL94b] restando un segundo a todas las duraciones registradas y obteniendo la media. Luego se han restado dos segundos y así sucesivamente. Como sea que solo tienen sentido tiempos remanentes positivos, a medida que aumenta el tiempo transcurrido disponemos de menos valores para promediar el tiempo remanente. De este modo la gráfica es menos compacta y más dispersa para tiempos transcurridos mayores. Si la distribución del tiempo de servicio fuera exponencial, el tiempo remanente sería constante e independiente del tiempo transcurrido debido a la memoria nula. El comportamiento de la gráfica en la figura 2.2 es muy lejano del citado, lo cual permite anticipar que la distribución exponencial no proporcionará un buen ajuste. El hecho de que la gráfica finalice en 60 segundos es debido a la limitación de la duración de la llamada y la zona lineal decreciente hasta los 7 segundos es debida a las llamadas cortadas por falta de posición de despacho, las cuales representan una proporción importante del conjunto tal como se refleja en el histograma de la figura 2.3.

La tabla 4.1 refleja los resultados obtenidos para las funciones de distribución teóricas propuestas [BAR97a]. Puede observarse que ninguna de las distribuciones puede considerarse satisfactoria al haberse obtenido significancias inferiores al uno por mil en todos los casos. Por ello se detallan también las distancias modificadas D que permiten comparar los ajustes entre sí mejor que ofreciendo significancias extremadamente bajas como en [GUE87]. En base a ello puede decirse que la

distribución Erlang-4,13 es la que proporciona un mejor ajuste de las probadas, aunque el ajuste no sea bueno para ninguna de ellas. La logonormal proporciona un ajuste igual de bueno al ser la distancia modificada muy parecida. En la figura 2.3 se representa el histograma de los las probabilidades de los datos empíricos junto a las funciones de densidad de probabilidad exponencial, Erlang-4,13 y logonormal. Puede observarse en el histograma como no aparecen llamadas de duración nula, y como son muy escasas las conversaciones de duración extremadamente corta. Este hecho que puede ser razonado antes de ver el histograma, es contrario a lo que debe suceder para que la distribución exponencial se ajuste de forma satisfactoria. Recuérdese que la función de distribución exponencial tiene una concentración importante de probabilidad en torno a la duración nula de la conversación.

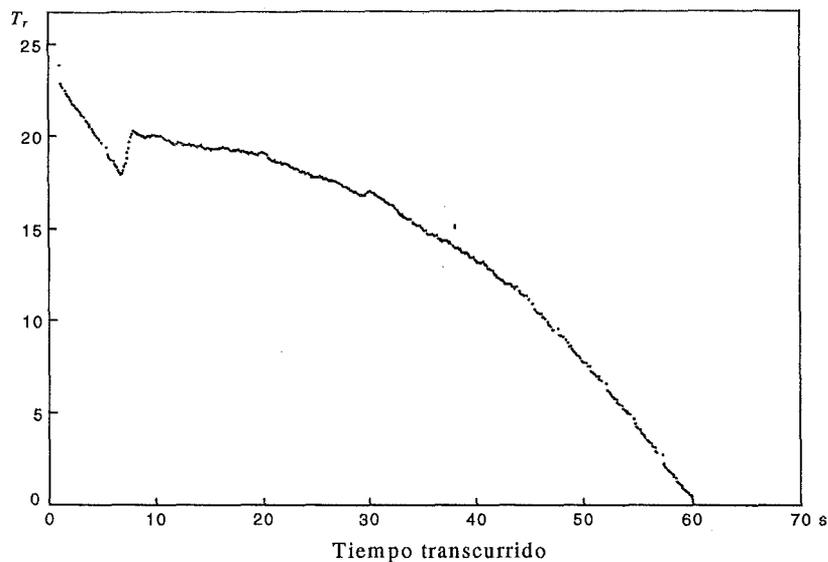


Figura 2.2. Tiempo medio remanente en función del tiempo de llamada transcurrido.

En la figura 2.3 puede apreciarse que la causa principal de que ninguna de las funciones de distribución propuestas se haya podido ajustar de forma satisfactoria estriba en el pico que el histograma empírico tiene en 7 segundos como consecuencia del mecanismo de limitación del retardo de flota. También el pico alrededor de 60 segundos debido a la limitación de tiempo impuesta por el sistema ha dificultado los ajustes. Hay que tener en cuenta que el terminal suele avisar de que se ha consumido el tiempo disponible poco antes de la interrupción forzada de la llamada. De este modo el usuario es consciente de que la llamada va a ser interrumpida y finaliza voluntariamente. Esta es la razón de que en el histograma no haya solamente un pico en 60 segundos sino una concentración de masa a partir de 55 segundos.

Momentos de la duración de los mensajes en el sistema PAMR-1						
Media	23,8 s					
c^2	0,50					
Ajustes						
Exponencial	D	α	β			
	9,908	0,000	23,817			
Erlang- k	D	α	β	k		
	3,484	0,000	11,91	2		
Erlang- jk	D	α	β	q	j	k
	2,952	0,000	3,375	0,660	4	13
Logonormal	D	α	μ	σ		
	2,965	0,000	2,90	0,770		

Tabla 2.1 Momentos y datos de los ajustes realizados para la duración de los mensajes del sistema PAMR-1.

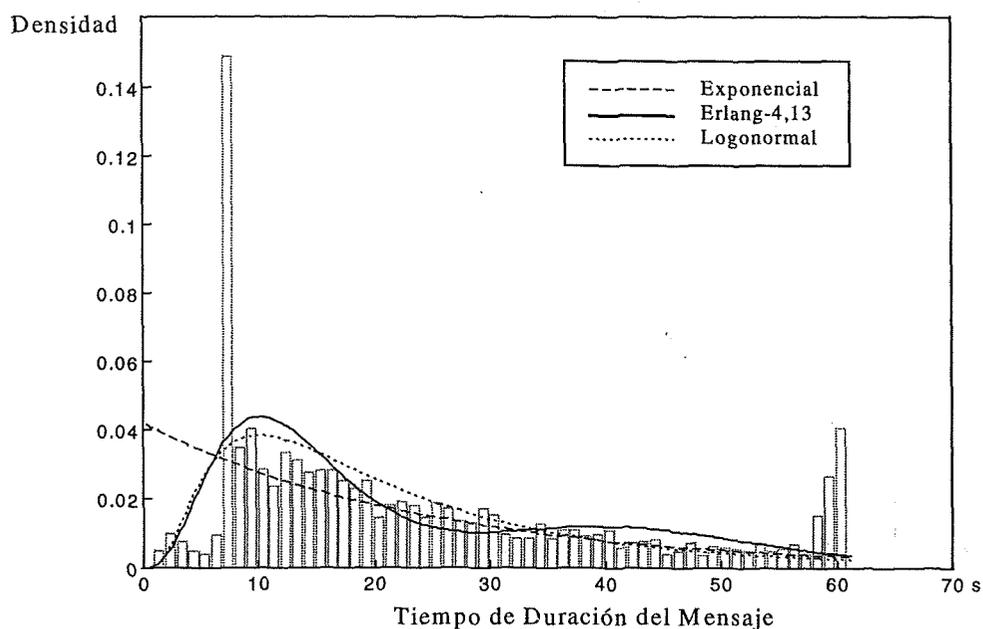


Figura 2.3 Distribución empírica de la duración de la llamada en el sistema PAMR-1 y distribuciones propuestas.

Para independizar en la medida de lo posible los ajustes de un mecanismo particular en un sistema concreto se ha procedido a filtrar los datos de modo que se han eliminado 6 de cada 7 mensajes de duración entre 6,8 y 7,2 segundos por haberse comprobado mediante monitorización aural que esa es la proporción de mensajes vacíos. También se han eliminado los mensajes de duración superior a 58 segundos correspondientes en su gran mayoría a interrupciones forzadas por el sistema. A los datos obtenidos a partir de este proceso de filtrado los llamamos sistema PAMR-1F, y constituyen una muestra de 1.700 llamadas.

En la tabla 2.2 se detallan los valores obtenidos para el sistema PAMR-1F con las funciones de distribución propuestas. La duración media de la llamada prácticamente no ha variado debido a que hemos eliminado llamadas de duración alta y baja simultáneamente. Este hecho ha provocado un descenso en la dispersión de los valores y por tanto en el coeficiente de variación.

Momentos duración de los mensajes en el sistema PAMR-1F						
Media	23,0 s					
c^2	0,35					
Ajustes						
Exponencial	D	α	β			
	8,936	0,000	23,011			
Erlang- k	D	α	β	k		
	2,066	0,000	7,67	3		
Erlang- jk	D	α	β	q	j	k
	0,955	0,322	4,125	0,684	4	9
Logonormal	D	α	μ	σ		
	2,087	0,000	2,935	0,683		

Tabla 2.2 Momentos de la muestra analizada y parámetros de las distribuciones ajustadas para la duración de los mensajes en el sistema PAMR-1F.

En este caso se observa un ajuste muy bueno ($\alpha=32\%$) para la distribución Erlang-4,9. Este buen ajuste es solamente en parte debido al mayor número de parámetros de que disponemos para realizar el ajuste con esta función. De hecho en los resultados del test K-S es mucho más importante la forma de la distribución

candidata que el número de parámetros de que dispone la misma. En las secciones 4.2 y 4.2 se presentan casos en los que se obtienen mejores ajustes con funciones de distribución que disponen de menos parámetros. El histograma de los datos empíricos y el mejor ajuste se representan en la figura 2.4. Debe observarse también que en todos los casos ha mejorado el estadístico obtenido del test K-S. Hay que tener en cuenta que hemos suavizado la muestra empírica eliminando picos, y que las funciones que intentamos ajustar son de por si suaves basadas en ecuaciones continuas. Las distribuciones Erlang- k y logonormal ajustan mucho mejor que la exponencial a la vez que siguen siendo distribuciones muy sencillas. Aquí podemos repetir el argumento de que no hay llamadas de duración nula contrariamente a lo que debe pasar para obtener un buen ajuste con la distribución exponencial. La figura 2.5 muestra como la función de distribución Erlang-4,9 se encuentra siempre dentro de los límites de significancia del 5%.

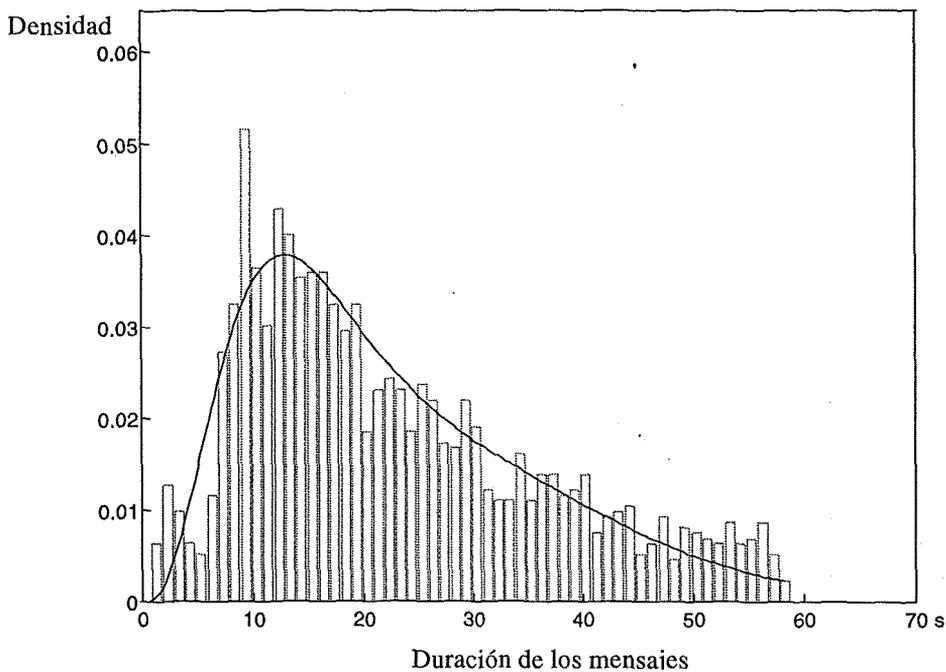


Figura 2.4 Histograma empírico de la duración de la llamada en el sistema PAMR-1F y función de densidad de probabilidad ajustada Erlang-4,9.

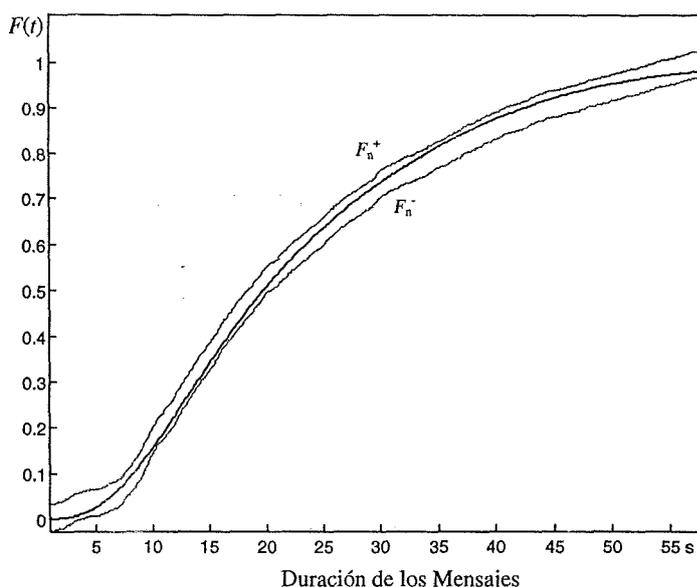


Figura 2.5 Función de distribución Erlang-4,9 ajustada a los datos obtenidos del sistema PAMR-1F y contornos para significancia del 5%.

2.8 Duración de los mensajes en el sistema PAMR-2

El sistema PAMR-2 es también un sistema operativo en explotación comercial con una configuración diferente de la de sistema estudiado en la sección anterior. De la observación del histograma de la figura 2.7 se puede concluir que hay usuarios con limitaciones de tiempo distintas, dados los picos que se observan en distintas posiciones del histograma para duraciones a partir de 60 segundos. En este caso no se establece la limitación por retardo de flota excesivo o ausencia de transmisión presente en el sistema PAMR-1, de modo que aunque no haya comunicación real, el canal se mantiene activo hasta que los usuarios cuelguen o se produzca la limitación de tiempo. Las limitaciones más relajadas sobre la utilización de este sistema coinciden con una menor carga constatada experimentalmente. Parece razonable que si el operador dispone de espacio sobrante relaje la configuración y que en caso de tener el sistema más cargado intente dinamizar la adjudicación de recursos.

En este caso existe una puesta a punto de los datos obtenidos consistente en eliminar las duraciones inferiores a 1 segundo, igual que se ha hecho con el sistema anterior. Después este proceso el tamaño de la muestra es de 1.507 llamadas. Sin embargo no es razonable realizar ningún filtrado posterior dada la diversidad de posibilidades de limitación de la duración de la llamada.

La figura 2.6 representa el tiempo remanente en función del transcurrido para la duración de las llamadas en el sistema PAMR-2, observándose que la función es decreciente al igual que la de la figura 2.2. Esta forma de la función hace intuir buenos ajustes con distribuciones hipoexponenciales.

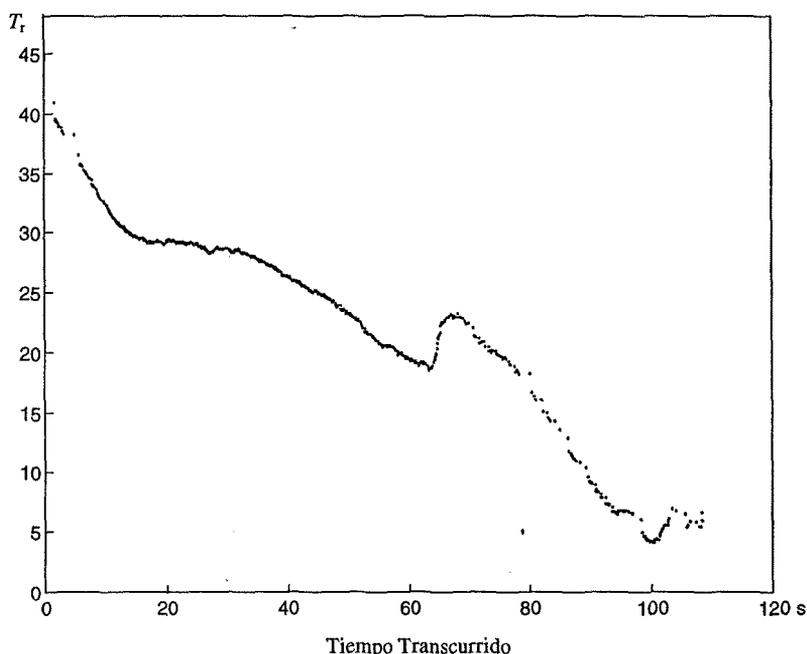


Figura 2.6 Tiempo de conversación remanente en función del tiempo transcurrido para el sistema PAMR-2.

En la tabla 2.3 se detallan los valores obtenidos para los ajustes del sistema. La media de la duración de la llamada es mayor en este caso que en PAMR-1: de algún modo el usuario es consciente de la baja carga a que opera el sistema y habla más, además de que las limitaciones son más relajadas. Por otra parte el coeficiente de variación y los resultados de los ajustes se asemejan más a los del sistema PAMR-1F que al PAMR-1, resultado que podía esperarse debido a las particularidades que presenta el sistema PAMR-1 relacionadas con su configuración. En cierta medida este hecho viene a confirmar la validez del proceso de filtrado a que ha sido sometido el sistema anterior. Otra vez el mejor ajuste es la distribución Erlang- j,k , y en este caso la logonormal presenta una significancia no despreciable.

Es importante remarcar como la diferente configuración de ambos sistemas no afecta a la forma de la distribución que presenta un mejor ajuste. El cambio del parámetro k de 9 a 10 en los respectivos sistemas responde a la posibilidad de llamadas de duración mayor en este sistema. Tampoco el coeficiente de variación,

estrechamente relacionado con la forma de la distribución varía de forma significativa. De este modo la única diferencia notable entre las estadísticas de ambos sistemas es la duración media de la llamada.

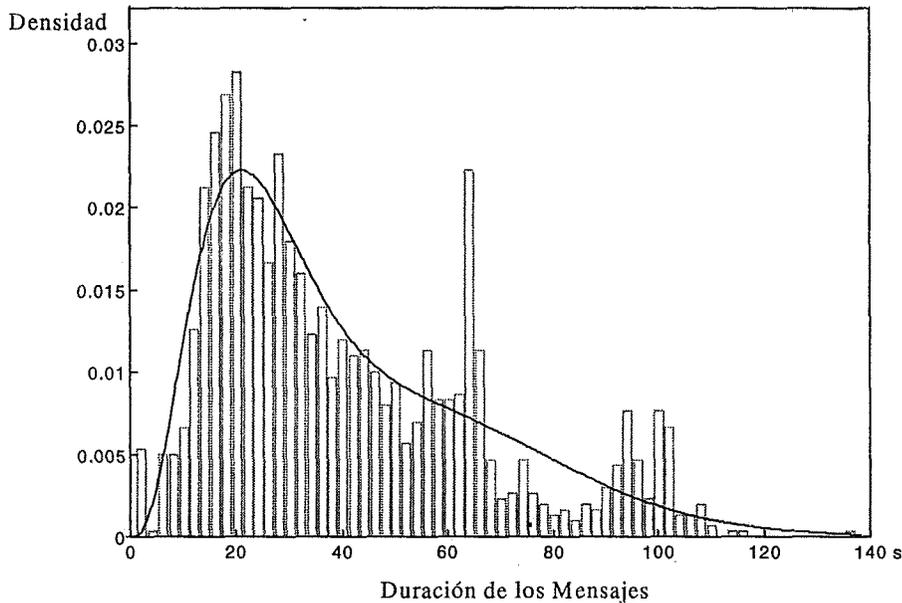


Figura 2.7 Histograma de la duración de los mensajes en el sistema PAMR-2 y mejor ajuste obtenido con una distribución Erlang-4,10.

2.9 Sumario

En este capítulo se ha fijado un procedimiento para la obtención de la función de distribución subyacente en la duración de la llamada para sistemas PAMR. La principal conclusión de que dicha distribución es hipoexponencial había sido ya adelantada en los razonamientos expuestos en la sección 2.2, aunque faltaba la corroboración de las hipótesis mencionadas mediante medidas. La función de distribución que mejor se ajusta a los datos medidos es la misma en los dos sistemas PAMR estudiados, una Erlang- j,k , y el coeficiente de variación es muy semejante en ambos casos. Dado que ambos sistemas trabajan en situaciones muy distintas de carga y configuración y que las significancias obtenidas son altas, podemos conjeturar que la distribución Erlang- j,k describe muy bien la distribución de la duración de la llamada en sistemas PAMR.

Momentos duración de los mensajes en el sistema PAMR-2						
Media	40,9 s					
c^2	0,38					
Ajustes						
Exponencial	D	α	β			
	8,160	0,000	40,891			
Erlang- k	D	α	β	k		
	2,744	0,000	20,446	2		
Erlang- jk	D	α	β	p	j	k
	1,168	0,131	6,953	0,686	4	10
Logonormal	D	α	μ	σ		
	1,887	0,002	3,498	0,698		

Tabla 4.3 Momentos y datos de los ajustes realizados para la duración de los mensajes en el sistema PAMR-2.

Si no es necesaria una caracterización tan precisa, las funciones Erlang- k y logonormal presentan ajustes mejores que la exponencial, a la vez que quedan descritas mediante solo dos parámetros. Esto hace que su utilización en simulaciones y cálculos sea más sencilla que la Erlang- j,k . La distribución Erlang- k presenta para muchos propósitos un excelente compromiso entre calidad del ajuste y sencillez de utilización, dada su condición de combinación de un número bajo de etapas sin memoria en serie.