

CAPÍTULO 3

PROCESADO DE DATOS EN LA CAPA SUPERFICIAL ATMOSFÉRICA

Las series temporales que se generan durante las campañas experimentales pueden contener una serie de anomalías. Éstas están provocadas por los propios sensores, el sistema de adquisición y/o el sistema de almacenamiento de datos. Consecuentemente, es imprescindible depurar los datos obtenidos para extraer conclusiones fiables del fenómeno estudiado. En nuestro caso, para depurar los datos experimentales se han utilizado tanto tratamientos temporales como espectrales.

Además de la depuración de los datos, dentro del procesado de los datos para el estudio de la turbulencia es práctica común la utilización de técnicas espectrales para caracterizar y analizar algunos fenómenos naturales, siendo la herramienta más explotada y conocida en mayor profundidad el análisis de Fourier. Sin embargo, en la actualidad se están empezando a extender otras técnicas que aportan información adicional al problema del análisis espectral como es el análisis wavelet. En la elaboración de este trabajo se han utilizado ambas técnicas para la detección de fenómenos ondulatorios en la capa límite atmosférica. En este capítulo se expondrán, brevemente, sus características más importantes.

3.1 Introducción

Durante la última década las mejoras en las técnicas del procesado de la señal han hecho que el conocimiento de la capa superficial atmosférica haya mejorado sensiblemente. Además, los ordenadores, más rápidos y pequeños, ahora al alcance de la mayoría de científicos que investigan la capa superficial, ofrecen virtualmente posibilidades ilimitadas para el procesado y la visualización de los resultados, incluso cuando un experimento aún está en proceso. En consecuencia, hoy en día, se pueden estandarizar la mayoría de métodos para el procesado de datos en tiempo real (Vickers y Mahrt, 2001). Un entendimiento apropiado de las características instrumentales es esencial para la planificación de cualquier experimento y la obtención de conclusiones razonables de los fenómenos físicos estudiados.

La información que se postula, en el presente capítulo, se divide en dos grupos, en la sección 3.2 se exponen los recursos utilizados mediante el análisis temporal y en la sección 3.3 los empleados en el análisis espectral, mostrando los métodos utilizados y algunos ejemplos, que nos han servido para la realización de este trabajo.

3.2 Análisis temporal

3.2.1 Estadísticos de los promedios temporales

Hay diferentes tipos de medias que se usan en la teoría o en la práctica. La más común en el análisis de observaciones con instrumentos fijos, de medida directa, es la media temporal que, para un registro continuo (serie temporal), se define como

$$F = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.1)$$

donde t es el tiempo, f es cualquier variable o función de variables, F es la media temporal correspondiente y T es la longitud temporal de la muestra sobre el promediado deseado.

En ciertos flujos de la capa fronteriza atmosférica, la elección de una muestra temporal óptima o el periodo de promedio T no siempre está clara. Debe ser lo suficientemente grande como para asegurar un promedio estable e incorporar los efectos de todas las contribuciones importantes de los grandes remolinos del flujo, pero no tan grande como para enmascarar lo que puede considerarse como una tendencia real en el flujo (por ejemplo las variaciones diurnas). En el análisis de las observaciones en micrometeorología, el promedio óptimo de tiempo tiene un rango de 300 a 1800 segundos, dependiendo de la altura de las observaciones, la altura de la capa límite atmosférica y el carácter de la estabilidad.

3.2.2 Control de calidad

En las campañas experimentales, se almacenan las medidas procedentes de los sensores en series temporales. Éstas acostumbran a contener anomalías, como consecuencia de la digitalización de la señal, derivadas del mismo sensor, por el cableado, por el sistema de almacenamiento o por el sistema de alimentación del conjunto. Las principales anomalías encontradas son los valores puntuales, o picos excesivamente altos o bajos, las discontinuidades o huecos en el muestreo y el ruido o inhomogeneidades presentes en las series temporales. En consecuencia, se hace imprescindible realizar un control de calidad a los datos antes de extraer posibles conclusiones erróneas.

3.2.2.1 Eliminación de datos espurios o picos

En el tratamiento estadístico de la turbulencia conviene eliminar de las series temporales, de todas las variables, aquellos datos aislados (picos) que se alejan del valor medio porque alteran los resultados.

Suponiendo que la serie temporal digitalizada $\{x_i\}$ se comporta como una variable aleatoria normal en períodos cortos, podemos calcular su valor medio \bar{x} mediante la expresión

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.2)$$

donde N es el número de términos de la ventana considerada, y la varianza σ_x^2 correspondiente según

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.3)$$

Eligiendo un nivel de confianza de la serie de 3.5 veces la desviación estándar, escrutamos cada uno de los datos, sustituyendo todos aquellos que no estén comprendidos en el intervalo $(\bar{x} - 3.5\sigma_x, \bar{x} + 3.5\sigma_x)$. La sustitución más utilizada es por el valor medio de los dos valores próximos o bien mediante una interpolación lineal (Vickers y Mahrt, 1997).

Como los picos iniciales han influido en el cálculo de los estadísticos anteriores, ecuaciones 3.2 y 3.3, se repite el proceso para toda la serie con los datos sustituidos, calculándose los nuevos estadísticos de filtrado. Y así sucesivamente, hasta que el total de los datos de la serie no sustituidos estén dentro del intervalo de confianza designado por la media y la varianza últimas.

3.2.2.2 Eliminación de ruido

La digitalización de la señal provoca una inyección de ruido en los datos. Para eliminar esta alteración y homogeneizar la serie temporal se opta por el suavizado de la misma mediante la media móvil.

El calificativo móvil comprende la técnica de cálculo de un estadístico sobre subseries, ventanas de longitud constante, L , desplazándose un intervalo τ . Con ello se obtienen $N-L$ puntos que denotan una evolución temporal suavizada de dicho estadístico. Así, la media móvil se define como:

$$\bar{x}(\tau) = \frac{1}{L} \sum_{i=\tau}^{L+\tau} x_i \quad \tau = 1, 2, \dots, N-L \quad (3.4)$$

Una mayor longitud de la ventana produce una mayor suavización en la evolución temporal del estadístico y la pérdida de información referente a los fenómenos de menor escala.

Para eliminar el ruido y suavizar la señal temporal también se utilizan técnicas wavelet, sección 3.3.2.

3.2.3 Medición en torres y mástiles

Las medidas en torres son ideales para el estudio de la capa superficial atmosférica. Se pueden medir los flujos mediante sensores de turbulencia a diferentes alturas y además estimar los perfiles de temperatura y viento con sensores de medida directa.

Ahora bien, los mástiles y las torres que soportan un sensor pueden interferir en el flujo, introduciendo errores en las medidas de gradientes y de flujos. Es posible reducir estos errores hasta niveles aceptables mediante un diseño cuidadoso de la estructura de la torre y los mástiles que soportan los sensores. La influencia de la estructura de la torre es diferente para los flujos que pasan primero por el sensor que para aquellos que antes de ser medidos pasan por la torre. Por este motivo, se recomienda elegir el brazo, que soporta al sensor, con una longitud superior a 1.5 veces la estructura lateral de la torre y restringir el estudio de los datos a un sector que excluya las direcciones de viento procedentes de la torre en 30° a cada lado (Kaimal y Finnigan, 1994).

Cuando los sensores no están bien nivelados o están ubicados en un terreno con pendiente es evidente que se obtendrán errores en las medidas de la velocidad del viento y en el cálculo de los flujos. En cuyo caso, se recomienda utilizar la corrección del ángulo (*tilt*), que presentamos a continuación. Posteriormente expondremos el método que hemos utilizado en este trabajo para la estimación de los perfiles de viento y de temperatura.

3.2.3.1 Corrección del ángulo

El método que se utiliza para resolver el problema de la orientación del sensor se divide en dos fases: primero se elige un conjunto de ejes que se utilizarán para interpretar las medidas, luego se alinearán todos los instrumentos cuidadosamente respecto a la dirección local de estos ejes. Un ejemplo común en meteorología es elegir las coordenadas cartesianas con z alineada en la dirección del gradiente geopotencial, x en la

dirección W-E e y en la dirección S-N. Aunque es difícil precisar dichas direcciones en cada instrumento. A continuación es el propio flujo el que selecciona los ejes de coordenadas. Por ejemplo, como se acostumbra a hacer en micrometeorología, se designa x como la dirección del vector del viento local medio, y como la dirección de la binormal y z como la normal principal a la línea de corriente.

Para obtener el marco de referencia del instrumento se necesitan dos transformaciones matemáticas. Suponiendo un conjunto de datos de viento muestreados digitalmente y recogidos por un instrumento en coordenadas cartesianas marcadas como x_1, y_1, z_1 . Las componentes de la velocidad serán u_1, v_1, w_1 .

El primer paso es promediar la serie temporal de las velocidades para producir un vector viento con componentes $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$. El vector medio depende del promedio temporal elegido y la resolución espacial de los instrumentos. McMillen (1988), en particular, adopta la estrategia de la línea de corriente descrita aquí, utilizando un filtro de media móvil con ventanas de 200 segundos para eliminar las tendencias de las variables y aplicando una rotación de las coordenadas al final de cada periodo de 30 minutos.

La primera transformación balancea los ejes x_1 e y_1 alrededor de z_1 para producir un nuevo conjunto de ejes (x_2, y_2, z_2) con x_2 extendiéndose en el plano del vector viento y z_1 . Las nuevas componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cos\theta + v_1 \sin\theta \\ v_2 &= -u_1 \sin\theta + v_1 \cos\theta \\ w_2 &= w_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\theta = \arctan\left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{u}_1}\right) \quad (3.6)$$

Esta rotación fuerza que $\bar{v}_2 = 0$, pero la componente vertical no queda afectada.

La segunda transformación rota x_2 y z_2 alrededor de y_2 en las nuevas direcciones x_3, y_3, z_3 de tal manera que x_3 apunta en la dirección del viento medio. Las nuevas componentes de la velocidad son

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 \cos\phi + w_2 \sin\phi \\ v_3 &= v_2 \\ w_3 &= -u_2 \sin\phi + w_2 \cos\phi \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\phi = \arctan\left(\frac{\bar{w}_2}{\bar{u}_2}\right) \quad (3.8)$$

Estas nuevas componentes tienen el sistema de referencia tal que la componente x está dirigida en la dirección del viento medio y el plano x - y es paralelo al terreno con coordenada z perpendicular a éste.

Para evitar el problema de la orientación del sensor se aplica la corrección del ángulo en cada nivel de medida. Sin embargo, los flujos computados son muy sensibles a esta

corrección para vientos débiles, menores de 2 m/s, en consecuencia la corrección del ángulo sufre incertidumbres. Este aspecto provoca que los flujos en los casos muy estables probablemente contengan errores importantes en su estimación.

3.2.3.2 Estimación de los perfiles

Para estimar los perfiles verticales del módulo del viento y la temperatura potencial Hogstrom (1988) recomienda que se estimen mediante un ajuste polinómico de segundo grado del logaritmo de z usando el método de los mínimos cuadrados, es decir,

$$A(z) = a_0 + a_1 \ln(z) + a_2 [\ln(z)]^2 \quad (3.9)$$

donde A representa tanto a la velocidad del viento como a la temperatura potencial, dado que el comportamiento de los perfiles de ambas variables se asume semilogarítmico en condiciones no neutrales. De esta forma podemos estimar los gradientes verticales del módulo del viento y de la temperatura. En cuanto al gradiente de la dirección del viento, Nieuwstadt (1984a) recomienda utilizar el ajuste de un polinomio de segundo grado respecto a la altura z .

A lo largo de la memoria se muestran diferentes estudios en los que se ha recurrido al ajuste por mínimos cuadrados. Para evaluar la calidad de los ajustes obtenidos, Nieuwstadt (1984a) recomienda la utilización de la varianza normalizada R , como una medida de validez de los mismos, definida como

$$R = \frac{\overline{(Y_E - Y_O)^2}}{(\overline{Y_O} - \overline{Y_O})^2} \quad (3.10)$$

donde la variable Y puede ser la temperatura, la velocidad o la dirección del viento, el subíndice E indica el valor estimado por el ajuste, el subíndice O indica la medida observada en la muestra y la barra horizontal sobre los símbolos denota el promedio sobre todos los niveles de medida. En nuestro caso aceptamos sólo aquellos perfiles que cumplen que $R < 0.1$, que es equivalente al cuadrado del coeficiente de correlación $r^2 > 0.7$.

3.3 Análisis espectral

El análisis espectral es una herramienta estadística que se utiliza para estudiar la turbulencia y detectar los movimientos ondulatorios. La descomposición de las series temporales en componentes de frecuencia, permite discernir como los remolinos de las diferentes escalas contribuyen al estado global de la turbulencia.

En esta sección exponemos las técnicas espectrales que se han utilizado en este trabajo y que nos han permitido analizar las escalas de los remolinos. En concreto, hemos recurrido al análisis de Fourier y al análisis wavelet.

3.3.1 Análisis de Fourier

La transformada de Fourier es el método por antonomasia del análisis espectral de las señales periódicas y transitorias.

3.3.1.1 Definición de la transformada de Fourier

Para una variable continua, $x(t)$, se define como su transformada de Fourier, $X(f)$, prescindiendo de los factores de normalización, como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (3.11)$$

y su transformada de Fourier inversa como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift} df \quad (3.12)$$

Dada la definición de la transformada de Fourier, la transformada de una función real será compleja y, por tanto, su expresión podrá escribirse como:

$$X(f) = \text{Re}[X(f)] + i \text{Im}[X(f)] \quad (3.13)$$

donde $\text{Re}[X(f)]$ es la parte real de $X(f)$ e $\text{Im}[X(f)]$ su parte imaginaria. Se definen el módulo y la fase de $X(f)$ como:

$$|X(f)| = \sqrt{\text{Re}[X(f)]^2 + \text{Im}[X(f)]^2}$$

$$\phi[X(f)] = \arctan \frac{\text{Im}[X(f)]}{\text{Re}[X(f)]} \quad (3.14)$$

El cuadrado del módulo define la energía espectral $E(f)$, que al dividir por Δf pasa a ser la densidad de energía espectral $S(f)$, que nos da información sobre la contribución en la varianza de la serie temporal de cada frecuencia.

3.3.1.2 Métodos de análisis basados en la transformada de Fourier

Desde 1950, los métodos empleados en el análisis espectral se basan fundamentalmente en el cálculo de la transformada de Fourier, ya sea de la serie natural o bien de la serie tratada previamente. Pueden distinguirse los siguientes:

- **Periodograma**

Consiste en la representación del módulo de la transformada de Fourier de la señal en función de las frecuencias. Presenta un espectro de elevada varianza y de un, también, elevado nivel de ruido, que se puede observar como la desviación respecto a la media del espectro, por lo que presenta una pobre resolución espectral, entendiéndose por resolución a la diferencia entre la intensidad de los máximos frecuenciales frente al nivel medio de ruido. Un método que mejora la resolución es trabajar con la densidad de energía espectral $S(f)$, Stull (1988).

- **Espectrograma**

Si un máximo posee una significación periódica real en una señal, se mantendrá en los espectros calculados para diferentes ventanas temporales. Por tanto se puede descomponer la señal en diferentes ventanas y realizar su espectro móvil. De este modo obtenemos la función escalar $S(t, f)$. Si se representa ésta mediante curvas de nivel, se obtendrán los máximos espectrales que correspondan a periodicidades de significación real. Esta técnica se conoce como análisis espectral móvil (MSA) y su representación tiempo-frecuencia espectrograma.

Sin embargo hay que considerar que existe la dificultad de que la amplitud de los máximos de frecuencia depende de la energía de la serie. Por tanto si lo que se pretende es estudiar la evolución temporal del espectro es necesario normalizar la energía de cada

ventana, ya que de lo contrario se producirían fluctuaciones espectrales que enmascararían los resultados. A tal efecto, cada espectro se tipifica. Esta técnica se conoce como análisis espectral móvil tipificado (MTSA) y su representación tiempo-frecuencia espectrograma tipificado, Rodríguez (1995).

En el cuarto capítulo se analizan los periodogramas y los espectrogramas tipificados de las principales variables meteorológicas y en el sexto capítulo se utilizan para detectar ondas de Kelvin-Helmholtz en la capa límite nocturna.

3.3.2 Análisis Wavelet

El análisis wavelet ofrece una alternativa al tradicional análisis de Fourier en la representación de funciones o señales y en la extracción de información de las mismas.

Las wavelets equivalen a ondas localizadas en el tiempo y en la frecuencia. La representación de una función o señal basada en estas oscilaciones localizadas es muy útil porque los coeficientes asociados a cada una de ellas transportan los detalles de la señal en el tiempo y en la frecuencia.

Un valor pequeño del coeficiente significa que hay poca variación en la señal dentro de la vecindad de aquella pequeña oscilación particular, mientras que un coeficiente grande indica que existe un apreciable cambio en la señal. En consecuencia, el análisis de los coeficientes permite identificar formas en la señal. Y, además, como los coeficientes están identificados y localizados en frecuencia y en tiempo, los coeficientes pequeños pueden reemplazarse por ceros sin afectar considerablemente a la reconstrucción de la señal. Esta estrategia permite la representación eficiente de las señales y los algoritmos para eliminar el ruido de las señales, Lord et al. (2000).

En esta sección expondremos los fundamentos de las wavelets continuas y las discretas y consideraremos sus propiedades estadísticas asociadas a la detección de ondas y a la eliminación del ruido de una señal.

3.3.2.1 Fundamentos wavelet

Desde el punto de vista del procesamiento de la señal, una descomposición wavelet se entiende como una combinación de filtros pasa alto (H) y pasa bajo (L) con unas propiedades particulares. Si suponemos que deseamos examinar una función F mediante la transformada wavelet, aplicamos una descomposición wavelet que consiste en descomponer sucesivamente la función F usando los filtros en aproximaciones $\{A_j\}$ y detalles $\{D_j\}$ de la señal. Este proceso se ilustra en la Figura 3.1, donde el filtro pasa altos extrae los detalles y el filtro pasa bajos las aproximaciones (suavizando la señal).

El método consiste en un primer paso por la función F , extrayendo A_1 y D_1 . A continuación se aplica el mismo proceso a la aproximación A_1 y se obtiene A_2 y D_2 , y así sucesivamente. Una importante consecuencia de esta descomposición es que para reconstruir la función F sólo se necesitan los coeficientes de detalle $\{D_j|j=1,\dots,J\}$ y la aproximación final A_J , suponiendo una descomposición hasta el nivel J .

Podemos pensar que la descomposición nos lleva desde una función fina a una basta aproximación, mientras que la reconstrucción actúa en sentido contrario. El proceso de reconstrucción se muestra esquemáticamente en la Figura 3.2, donde vemos que para reconstruir F , todo lo que se necesita son los espacios de detalle D_1 , D_2 , D_3 y la aproximación A_3 .

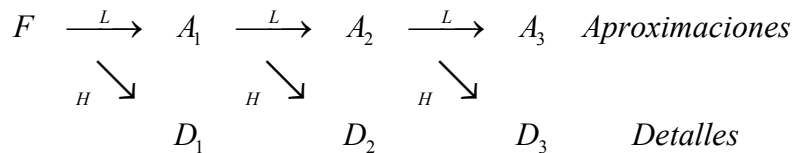


Figura 3.1 Visión esquemática de una descomposición wavelet de una función F en 3 niveles como una combinación de filtros pasa altos H y pasa bajos L , obteniéndose las aproximaciones y los detalles.

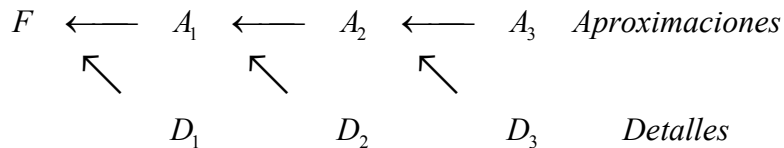


Figura 3.2 Reconstrucción esquemática de la función F a partir de 3 niveles de descomposición. La aproximación A_3 y los detalle D_1, D_2, D_3 es todo lo que se necesita.

Como veremos en las secciones siguientes, los coeficientes asociados a la descomposición wavelet transportan la información en frecuencia y tiempo. Para este proceso se usan dilataciones y traslaciones de una función wavelet ψ ; estas funciones wavelet forman una base para los detalles $\{D_j\}$ y las aproximaciones $\{A_j\}$.

Existen dos motivos importantes que hacen atractivos los coeficientes wavelets:

Extracción de formas: La descomposición wavelet se obtiene como una combinación de filtros. Esta descomposición es esencial para identificar escalas altas, medias y bajas en la señal. Los coeficientes grandes identifican donde hay grandes gradientes, discontinuidades abruptas o ondulaciones en la señal, dependiendo de la base wavelet elegida.

Eliminación de ruido: En la descomposición de una función arbitraria, habitualmente hay un gran número de coeficientes que son muy pequeños. Como estos coeficientes contribuyen muy poco a la reconstrucción de la función, se pueden reemplazar por ceros. Esta eliminación de los coeficientes cercanos a cero permite una efectiva eliminación del ruido de una señal.

3.3.2.2 Transformada wavelet continua

Para una señal temporal, $f(t)$, el análisis de Fourier extrae información sobre las frecuencias contenidas en f , pero la información concerniente a la localización temporal es difícil. El inventariado de la señal f es un paso para obtener tal información. Primero se restringe la señal a un intervalo mediante la multiplicación de una función ventana fijada y después se realiza el análisis de Fourier al producto. Repitiendo el proceso con versiones desplazadas de la función ventana se consigue obtener información acerca de la frecuencia localizada en la señal. Como la anchura de la ventana es la misma para todas las frecuencias, el tamaño de la localización permanece constante para las diferentes frecuencias, con la consecuente limitación, Daubechies (1992).

La transformada wavelet continua presenta una descomposición tiempo-frecuencia a partir de traslaciones y dilataciones de una función wavelet (real o compleja) ψ :

$$\Psi_{a,b}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.15)$$

donde a y b son los denominados parámetros de escala y de traslación, respectivamente, con $a(\neq 0)$, $b \in \mathfrak{R}$.

La transformada wavelet continua (CWT) de f viene dada por la siguiente expresión:

$$C(a,b) \equiv \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (3.16)$$

donde $\psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right)$ indica el complejo conjugado de $\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$. Los llamados coeficientes wavelet son $\{C(a,b)\}$.

Es preciso que la wavelet ψ tenga media cero, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.17)$$

este requisito conduce a pensar que la wavelet es una oscilación.

Se usan los términos de alta (baja) frecuencia para hacer referencia a los valores bajos (altos) del parámetro de escala. Esta relación inversa entre la escala y la frecuencia es bastante intuitiva: podemos pensar que una escala baja se corresponde con una wavelet comprimida, donde los detalles cambian rápidamente, semejante al comportamiento de la señal en alta frecuencia.

La función original f puede reconstruirse a partir de su transformada wavelet continua por la evaluación de

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} C(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (3.18)$$

donde la constante C_ψ satisface la condición de admisibilidad dada por

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (3.19)$$

Esta fórmula de reconstrucción, conocida como la transformada wavelet inversa, está demostrada en Daubechies (1992).

Podemos visualizar los coeficientes asociados a la CWT para extraer información de la señal. En la Figura 3.3 presentamos un ejemplo. La ilustración se compone de dos gráficas, arriba se muestra la señal artificial a analizar y debajo el análisis de los coeficientes de la CWT.

En la gráfica superior de la Figura 3.3 se muestra una señal sintética de 4096 segundos de duración con una frecuencia de muestreo de 1 Hz. La señal se divide en 4 partes de 1024 segundos cada una. La primera parte está generada con ruido blanco, a continuación, en la segunda sección se ha simulado un seno con una periodo de 200 segundos. En la tercera parte de la señal se han superpuesto tres senos de diferentes periodos, donde uno de ellos es el mismo que en la parte anterior y los otros dos tienen periodos de 60 y 30 segundos cada uno. Para finalizar, en la última parte de la señal se vuelve a repetir la senoide de 200 segundos de periodo.

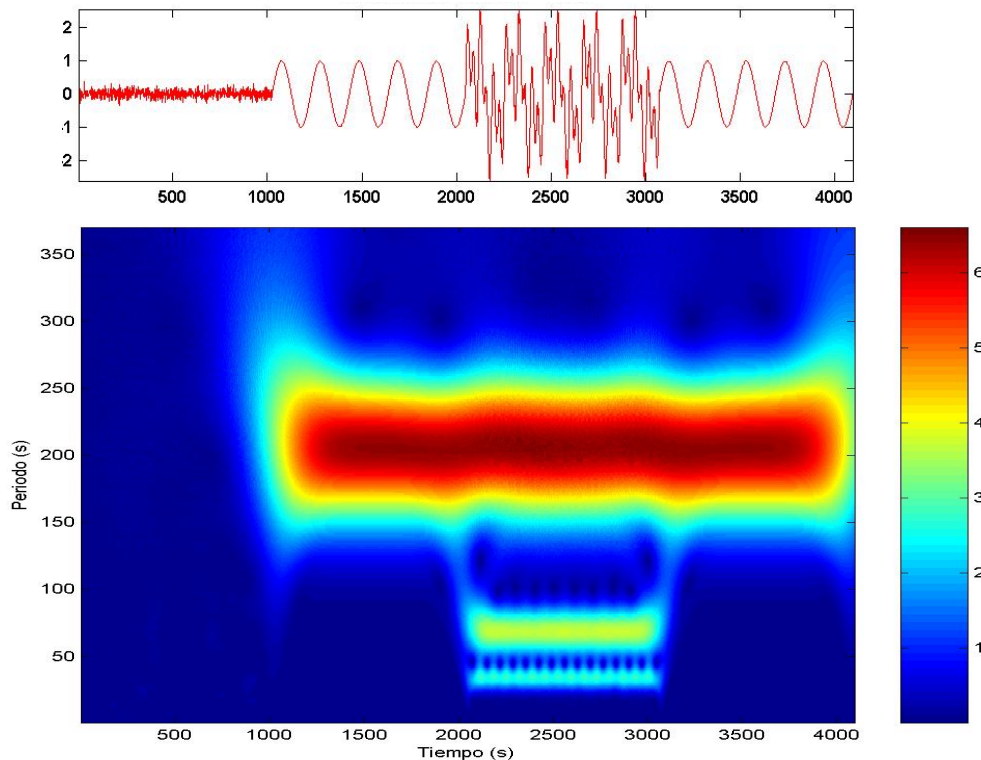


Figura 3.3 Ejemplo del análisis wavelet para detectar ondas. Arriba se muestra una señal sintética, que se compone de 4 partes, ruido blanco al principio, a continuación un seno de 200 segundos de periodo, después la superposición del seno anterior con dos sinusoides de 60 y 30 segundos de periodo, para terminar con el seno inicial. Abajo se presenta la representación del módulo de los coeficientes de la CWT con la wavelet de Morlet (ver anexo). La escala de colores indica el valor del cuadrado de los coeficientes. El análisis localiza los tres periodos que intervienen en la señal.

En la gráfica inferior de la Figura 3.3, se muestra el análisis CWT de la señal, en particular para analizar la serie se ha utilizado la wavelet de Morlet (ver anexo), que se trata de una onda plana modulada por una gaussiana. El eje horizontal se corresponde con la posición de la señal y el eje vertical con el periodo analizado. La escala de colores indica el valor del cuadrado de los coeficientes. La ilustración muestra claramente la presencia de tres procesos ondulatorios, uno predominante durante $\frac{3}{4}$ partes de la señal, en referencia a la sinusoides de 200 segundos de periodo, y dos más correspondientes a la zona de superposición, con periodos de 60 y 30 segundos. El patrón principal se puede interpretar como un comportamiento oscilatorio que se aprecia claramente en la señal original.

Denotar que la señal analizada no es continua, consiste en un número finito de datos puntuales (2^{13}). Este hecho pone de manifiesto un límite máximo del parámetro de escala a en la descomposición.

3.3.2.3 Transformada wavelet discreta

La diferencia clave en el análisis wavelet discreto es que los parámetros de escala (a) y de traslación (b) en la ecuación 3.15 no son continuos, sino enteros. En la mayoría de casos, la elección de a y b está limitada al siguiente conjunto de discretización:

$$(j, k) \in \mathbb{Z}^2; \quad a = 2^j; \quad b = k2^j = ka \quad (3.20)$$

Los índices de a y b en $\psi_{a,b}$ se reemplazan por j y k , respectivamente, así la ecuación 3.15 puede describirse en formato discreto como:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (3.21)$$

La fórmula de reconstrucción es análoga a la ecuación 3.18:

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}; \quad (j,k) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.22)$$

Una base wavelet la componen dos funciones: la función de escalado (o wavelet padre) ϕ y la wavelet madre ψ . Las otras wavelets se generan mediante la base por traslación de la función escalado y la dilatación y traslación de la wavelet madre usando las relaciones:

$$\phi_{J_0,k}(t) = 2^{-J_0/2} \psi(2^{-J_0}t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), \quad j = J_0, J_0 + 1, \dots, \quad (3.23)$$

Las dilataciones y las traslaciones de la wavelet madre forman una base del espacio de detalle $\{D_j\}$ que se encuentra tras aplicaciones de filtros pasa altos H , mientras que las funciones de escalado forman una base del espacio de las aproximaciones $\{A_j\}$.

Puede presentarse una alternativa a la expresión 3.22 para la representación de la wavelet discreta de una función f :

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(t) + \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (3.24)$$

donde

$$c_{J_0,k} = \langle f, \phi_{J_0,k} \rangle \quad (3.25)$$

y

$$\gamma_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (3.26)$$

Usando la función de escalado, del espacio de las aproximaciones, podemos convertir la doble suma sobre escalas de la ecuación 3.22 en un solo sumatorio. La ecuación 3.24 con $J_0=0$ describe con mayor precisión la representación wavelet (Daubechies, 1992).

Las formas extensas están representadas por el primer término de la ecuación 3.24 con las funciones de escalado $\{\phi_{J_0,k}\}$ (la aproximación en el espacio $\{A_j\}$). Las wavelets $\{\psi_{j,k}\}$ representan oscilaciones localizadas en las posiciones próximas al punto $k2^j$ en las frecuencias cercanas a 2^j y, así pues, presenta los detalles de la señal. Este tipo de análisis recibe el nombre de multiresolución o análisis multiescalar y nos ayuda a eliminar el ruido de las señales.

a) Eliminación de ruido y suavizado

Estrictamente hablando, la eliminación del ruido y el suavizado de una señal son dos operaciones diferentes. La eliminación del ruido implica la reducción del ruido en las observaciones para aclarar la señal. El suavizado es una operación que produce una estimación de la tendencia que es menos variable que la señal ruidosa original. A pesar de estas consideraciones, desde el punto de vista estadístico ambos términos se usan

indistintamente, porque el ruido se modela generalmente como una componente de alta frecuencia y es eliminado por suavizado.

Sean $\{y_i\}$ un conjunto de observaciones con ruido, entonces podemos escribir

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

donde g es una función modelada y $\{\varepsilon_i\}$ representa el ruido, generalmente modelado como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza σ^2 . Suavizar $\{y_i\}$ también implica eliminar el ruido.

La razón por la cual el análisis wavelet es una metodología adecuada para el suavizado (eliminación de ruido) se ha explicado en la introducción de esta sección. La idea básica es que si el ruido está representado por la variabilidad de la escala pequeña, un camino para eliminar el ruido es hacer cero todos los coeficientes de los niveles altos (más finos) en la representación wavelet. Esta idea es semejante a considerar el estimador wavelet truncado:

$$\hat{g}_M(t) = \hat{c}_0 \phi(t) + \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{\gamma}_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (3.28)$$

donde " $\hat{\cdot}$ " representa una estimación de los coeficientes o la función y el subíndice M se corresponde con el umbral de filtrado, que se explica en el apartado siguiente. La expresión 3.28 puede compararse con la 3.24 con $J_0=0$.

El estimador truncado conlleva dos problemas:

- La elección óptima de M ; los valores de M demasiado pequeños o demasiado grandes resultan un sobresuavizado o un suavizado leve, respectivamente.
- Los estimadores truncados darán una pobre representación de las singularidades locales (si están presentes) en la función, porque una representación precisa de estas singularidades requiere de los términos de alto nivel que han sido eliminados por el truncamiento.

Como el problema afronta el truncamiento, Donoho (1998) propuso un estimador wavelet no lineal basado en la reconstrucción selectiva de los coeficientes wavelets empíricos. Se trata de escoger sólo los coeficientes que cumplan cierta condición. Cuando una señal está corrompida por ruido blanco, los coeficientes empíricos de su representación wavelet estarán también corrompidos por el ruido blanco. Luego los coeficientes wavelets observados satisfacen

$$\hat{\gamma}_{j,k} = \gamma_{j,k} + \varepsilon_{j,k} \quad j = 0, \dots, J-1 \quad k = 0, \dots, 2^j - 1 \quad (3.29)$$

donde $\{\varepsilon_{j,k}\}$ son variables aleatorias distribuidas idénticamente independientes con media cero y varianza σ^2 .

Es razonable suponer que sólo grandes coeficientes $\hat{\gamma}_{j,k}$ contienen información sobre la función g , mientras que pequeños coeficientes $\hat{\gamma}_{j,k}$ pueden atribuirse al ruido que contamina uniformemente todos los coeficientes. Así, el suavizado se creará guardando los coeficientes con valores absolutos mayores que un umbral dado, sustituyendo los otros coeficientes por ceros.

El parámetro no lineal estimado puede escribirse como:

$$\hat{g}_\lambda(t) = \hat{c}_0\phi(t) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{\gamma}_{j,k}^* \psi_{j,k}(t) \quad (3.30)$$

donde $\{\hat{\gamma}_{j,k}^*\}$ son los coeficientes con valor absoluto mayor que el umbral λ . Como los coeficientes de todos los niveles se guardan (una vez que su valor absoluto es mayor que el umbral), las singularidades locales de la función serán bien representadas. En si, el problema principal es la selección óptima del umbral, que se expone a continuación.

b) Umbral

Recordemos que la idea básica para eliminar el ruido es guardar sólo los coeficientes de las wavelets mayores que un cierto umbral en la reconstrucción de la señal. La reducción wavelet produce una estimación de la señal original $\hat{g}(t_i)$ y se trata de minimizar la media cuadrática de la precisión M por:

$$M = \sum_{i=1}^n (\hat{g}(t_i) - g(t_i))^2 \quad (3.31)$$

donde n es el número de muestras. Por la ortogonalidad de la transformada wavelet puede también expresarse como, (Nason, 1999)

$$M = \sum_{i=1}^n (\hat{\gamma}_{j,k} - \gamma_{j,k})^2 \quad (3.32)$$

En el problema del suavizado, lo que no observamos es $g(t_i)$, que se desconoce por la señal contaminada con los datos corruptos del ruido de acuerdo con el modelo 3.27.

La idea básica del umbral, (Donoho, 1998), es hacer cero aquellos coeficientes que tienen un valor absoluto menor que un umbral $\lambda > 0$ y guardar el resto de coeficientes. Los valores de los coeficientes que se retienen pueden no ser modificados (umbral duro):

$$\hat{\gamma}_{j,k}^* = \begin{cases} \hat{\gamma}_{j,k} & \text{si } |\hat{\gamma}_{j,k}| > \lambda \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases} \quad (3.33)$$

o ser encogidos (umbral suave), Abramovich et al. (2000):

$$\hat{\gamma}_{j,k}^* = \text{sign}(\hat{\gamma}_{j,k}) \max(0, |\hat{\gamma}_{j,k}| - \lambda) \quad (3.34)$$

Gao y Bruce (1996) sugieren un método que une lo mejor de ambos tipos de umbral. Existe una larga lista de métodos disponibles para la elección del umbral (Lord et al., 2000).

Uno de los métodos más utilizados es el umbral universal que Donoho y Johnstone (1994) originalmente propusieron como:

$$\lambda_{uni} = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (3.35)$$

donde σ^2 es la varianza del ruido en el modelo 3.27. Según Lord et al. (2000) este modelo se usa frecuentemente en la práctica, porque a pesar de su simplicidad, da buenos resultados con ambos umbrales (duro y suave). La desviación estándar σ generalmente se estima por un proceso robusto que usa la desviación absoluta de la

mediana (estadístico MAD), teniendo en cuenta los coeficientes de alto nivel de la transformada wavelet, porque la señal será inusual en estos niveles. El estimador es

$$\hat{\sigma} = \frac{MAD}{0.6745} \quad (3.36)$$

donde

$$MAD = \text{median} |\hat{\gamma}_{j,k} - \tilde{\gamma}_{j,k}| \quad (3.37)$$

con

$$\tilde{\gamma}_{j,k} = \text{median}(\hat{\gamma}_{j,k}) \quad (3.38)$$

Aunque el umbral universal tiene importantes propiedades asintóticas, sólo depende de los datos por el estimador $\hat{\sigma}$, en otros casos se ignoran los datos y por este motivo no puede afinarse para el problema específico. En general, para grandes muestras, el umbral universal tiende a la desviación de la estimación por sobresuavizado. En la Figura 3.4 se muestra un ejemplo de suavizado de una señal, para ello se ha construido una señal artificial con ruido y se le ha realizado la transformada wavelet con base db4 (ver anexo). Para la reconstrucción se ha utilizado el filtro suave.

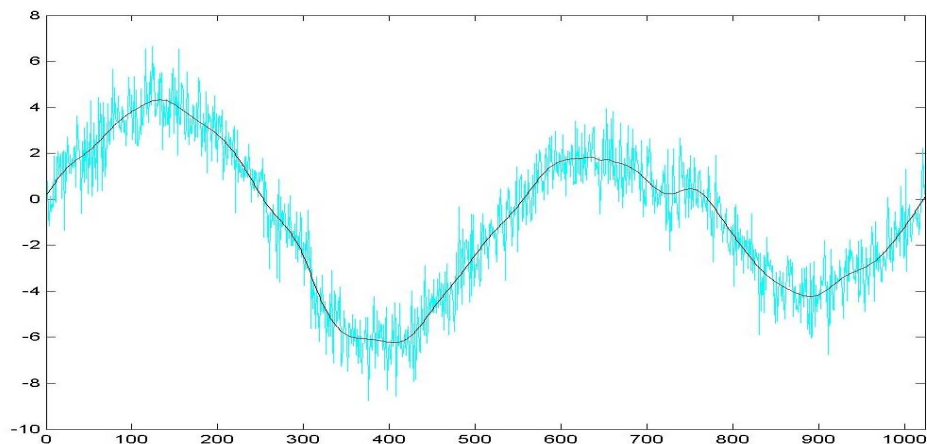


Figura 3.4 Ejemplo de señal artificial con ruido (en color cian) suavizada (en color negro) mediante la transformada wavelet db4 (ver anexo) con un umbral suave.

Estas dos propiedades tan importantes del análisis wavelet se han empleado con los datos de la campaña de Kansas (secciones 6.5 y 6.6). Una vez almacenados los datos observamos que necesitaban un suavizado y le aplicamos la transformada wavelet discreta para eliminar el ruido de la señal (sección 6.5). Además, como uno de los objetivos de la campaña era detectar y localizar fenómenos ondulatorios en la capa superficial, utilizamos la transformada wavelet continua para detectarlos con excelentes resultados (sección 6.6).