

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

WARNING. Access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Organització d'Empreses

TESIS DOCTORAL

PROCEDIMIENTOS DE SECUENCIACIÓN Y
PROGRAMACIÓN EN UN SISTEMA PRODUCTIVO DE
ESTACIONES EN SERIE CON TRANSPORTADORES
ASÍNCRONOS DE MATERIAL

PRESENTADA POR:

Manuel Mateo Doll

DIRIGIDA POR:

Dr. Ramón Companys Pascual

BARCELONA, marzo de 2001

La presente Tesis Doctoral ha sido desarrollada en el marco del Proyecto de la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) denominado "Secuenciación de unidades no homogéneas", referencia TAP98-0494.

*A Manel i Cecília, els meus pares,
i a Lluís,
la meva família.*

AGRADECIMIENTOS

En este punto, en que este trabajo llega a su culminación, quiero agradecer el apoyo y la dedicación que ciertas personas me han prestado durante el proceso de elaboración de esta Tesis Doctoral.

En primer lugar, el agradecimiento comienza por mi Director de tesis, Ramón Companys, del cual espero no tan sólo haber aprendido a investigar, analizar y sintetizar, sino también otras actitudes del terreno humano.

A continuación, debo mencionar a los profesores Joaquín Bautista, Francisco-Cruz Lario y M^a Àngels Gil, que han realizado una valoración crítica positiva del trabajo, lo cual me ha permitido perfeccionarlo.

Por otro lado, quiero recordar al numeroso grupo de profesores del *Departament d'Organització d'Empreses* y del *Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials*, de los cuales he recibido apoyo y empuje suficientes para finalizar esta Tesis.

No obstante, el personal académico nunca es autosuficiente y debe recurrir al personal de administración y servicios y a los becarios de investigación de ambas unidades estructurales. A ellos, mi gratitud por las gestiones de unos y por las sugerencias y trabajo de los otros. En representación de todos los becarios y proyectistas, citaré a Víctor Leal por su colaboración como semilla de parte de esta Tesis.

Una de las satisfacciones alcanzadas a lo largo del desarrollo de la Tesis ha sido conocer y trabajar con profesores de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona, expertos en diferentes ámbitos. Entre ellos, se encuentran los profesores Josep Bordonau, del *Departament d'Enginyeria Electrònica*, Francesc Planas, del *Departament de Matemàtica Aplicada* y Moisès Graells, del *Departament d'Enginyeria Química*, a los que agradezco compartir sus conocimientos conmigo.

Asimismo, quiero agradecer la actitud de las personas de servicios públicos, como la biblioteca de la citada Escuela, y de instituciones publicas, como el CIDEM (*Centre d'Innovació i Desenvolupament Empresarial*) de la Generalitat de Catalunya.

Finalmente, es obligado mencionar a las personas que me permitieron observar la problemática analizada en la industria real: básicamente, a Carlos Vivas, que propició fortuitamente mi contacto con ELBASA, y a Teodoro de Mas, su Director General, que me facilitó la información contenida en el capítulo 9.

A todos, gracias.

TABLA DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN: MARCO DEL TRABAJO	1
1.1. La producción y sus decisiones	1
1.1.1. Definición de producción	1
1.1.2. Definición de logística	2
1.1.3. Relación entre producción y logística	3
1.1.4. La Dirección de Operaciones	4
1.1.5. Decisiones de la Dirección de Operaciones	5
1.2. La programación de operaciones	7
1.3. La secuenciación de operaciones	9
1.4. Métodos de resolución para problemas de programación	11
1.5. Hipótesis de partida y resultados esperados	12
2. EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DEL PUENTE-GRÚA	13
2.1. Una visión general del problema	13
2.1.1. El problema HSP (Hoist Scheduling Problem)	13
2.1.2. Los dos niveles de movilidad del puente grúa	13
2.1.3. Los procesos químicos	14
2.1.4. Líneas únicamente dedicadas a un producto	15
2.2. Características del proceso productivo de referencia	15
2.3. Clasificación de variantes en este tipo de problema	17
2.3.1. Los tanques	18
Ejemplo 1	18
Ejemplo 2	21
2.3.2. Los objetos (o contenedores de objetos)	23
Ejemplo 3	23
2.3.3. Los elementos de automatización	24
Ejemplo 4	25
2.3.4. La distribución en planta del sistema	26
Ejemplo 5	27
Ejemplo 6	28
2.3.5. Resumen y notación	29
2.4. Estado del arte del Problema de Programación del Puente-grúa	30
2.4.1. Aproximación estática o planificativa	30
2.4.2. Aproximación dinámica o resolutive	36
3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DEL PUENTE-GRÚA	41
3.1. Aportaciones iniciales en el problema Hoist Scheduling Problem	41
3.1.1. Resolución mediante programación matemática	41
3.1.2. Resolución mediante procedimientos arborescentes	45
3.1.3. Resolución mediante procedimientos heurísticos y simulación	51
3.1.4. Evaluación de la complejidad del problema tratado	55

3.2. Desarrollos posteriores en la evolución del problema	55
3.2.1. Resolución del caso de múltiples grúas	55
3.2.2. La Programación Lógica con Restricciones	59
3.2.3. Los grafos como soporte de modelos	64
3.2.4. Cotas del problema HSP para el caso cíclico	69
3.2.5. Observación final	71
4. ESTUDIO SOBRE LA VARIANTE MONOBAÑO, MONOFUNCIÓN, MONOGRÚA. ALGORITMOS BÁSICOS	73
4.1. Hipótesis de la variante	73
4.2. Determinación de una secuencia cíclica	73
4.3. Programa lineal PL(H) asociado a una secuencia cíclica H	76
4.3.1. Parámetros del problema y secuencia propuesta	76
4.3.2. Variables a determinar en el problema	77
4.3.3. Restricciones del problema	77
4.3.4. Objetivo del problema	79
4.3.5. Ejemplo ilustrativo 4.1	79
4.4. Determinación del vector T mediante un grafo asociado al problema: el grafo secuencial	82
4.4.1. Elementos del grafo	83
4.4.2. Proceso de resolución	84
4.4.3. Ejemplo de secuencia factible	87
4.4.4. Ejemplo de secuencia infactible	90
4.5. Procedimientos de resolución arborecente (branch and bound)	94
4.5.1. Bases de un procedimiento branch and bound	94
4.5.2. Aspectos a concretar en un procedimiento branch and bound	94
4.5.3. Estrategias de construcción del árbol	95
4.6. Branch and bound mediante tiempos	96
4.6.1. Caracterización de los vértices del árbol	96
4.6.2. Procedimiento de separación	97
4.6.3. Procedimiento de acotación	97
4.6.4. Elección del vértice de exploración inmediata	98
4.6.5. Algoritmo <i>branch and bound</i> mediante tiempos	98
4.6.6. Ejemplo de aplicación de un <i>branch and bound</i> mediante tiempos (BBt)	100
4.7. Branch and bound mediante baños	102
4.7.1. Caracterización de los vértices del árbol	102
4.7.2. Procedimiento de separación.	102
4.7.3. Procedimiento de acotación	103
4.7.4. Elección del vértice de exploración inmediata	103
4.7.5. Algoritmo de <i>branch and bound</i> mediante tanques	103
4.7.6. Ejemplo de aplicación de un <i>branch and bound</i> mediante baños (BBb)	105
4.8. Comparación entre ambos procedimientos de exploración	107
5. RESOLUCIÓN BASADA EN EL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO	109
5.1. Introducción al uso del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	109

5.2. Determinación de variables mediante un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	110
5.2.1. Algoritmos estándares para resolver problemas de optimización combinatoria	110
5.2.2. Esquema del algoritmo para el uso del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	111
5.2.3. Particularidades en la resolución de un grafo asociado a una secuencia H	112
5.2.4. Esquema del algoritmo de resolución basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	114
5.3. Generación de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, asociado a una secuencia H	116
5.3.1. Adaptación de los parámetros y datos para una secuencia H	116
5.3.2. Tabulación de los cuatro vectores de datos	117
5.3.3. Equivalencia entre los cuatro vectores y las restricciones originales	119
5.3.4. Descripción de los elementos de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	119
5.3.5. Construcción del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado asociado a una secuencia	120
5.4. Resolución de una secuencia H mediante un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado: Primera prueba, de infactibilidad	123
5.4.1. Cálculo de cotas inferiores para el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia H	123
5.4.2. Cálculo de cotas superiores para el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia H	126
5.4.3. Análisis conjunto de cotas inferiores y superiores sobre el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia H	129
5.4.4. Ejemplo ilustrativo 5.1	130
5.4.5. Ejemplo de cálculo de cotas del tiempo de ciclo para una secuencia H	130
5.5. Resolución de una secuencia H evaluando un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado: Segunda prueba, de factibilidad	132
5.5.1. Características de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	132
5.5.2. Estudio de la relación entre el rango de exploración y el tiempo de ciclo de una secuencia	135
5.6. Propiedades topológicas de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado aplicables en la determinación del tiempo de ciclo óptimo	138
5.6.1. Problema de minimización del tiempo de ciclo	138
5.6.2. Grafo G asociado al problema anterior	138
5.6.3. Propiedades del grafo G	139
5.6.4. Del grafo G a un esquema matricial	140
5.6.5. Puntos dobles en la aplicación $\Phi_{t,l}$	142
Ejemplo 1	144
5.6.6. Determinación de puntos dobles en la aplicación $\Phi_{t,l}$	145
Ejemplo 2	147
5.6.7. Oscilación de período p entorno puntos dobles de la aplicación $\Phi_{t,l}$	149
5.6.8. Núcleo conceptual de la aplicación Φ_t y su reducida $\Phi_{t,l}$	151
5.7. Aplicación práctica de la Segunda prueba, de factibilidad sobre un grafo de Tiempo de Ciclo Acotado	152
5.7.1. Ejemplo de secuencia no factible (caso 1)	152
5.7.2. Ejemplo de secuencia factible con $K_{\min_H} = LB_H$ (caso 2)	155
5.7.3. Ejemplo de secuencia factible con $K_{\min_H} > LB_H$ (caso 3)	158
5.8. Esquema del <i>branch and bound</i> mediante baños con grafos de Tiempo de Ciclo Acotado	162
5.8.1. Descripción de la acción principal y las acciones secundarias	162
5.8.2. Obtención de cotas en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	163

5.9. Ejemplo completo: <i>branch and bound</i> mediante baños con grafos de Tiempo de Ciclo Acotado	165
6. PROCEDIMIENTO HEURÍSTICO DE RESOLUCIÓN BASADO EN LA GENERACIÓN DE SECUENCIAS, EVALUADAS MEDIANTE EL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO	171
6.1. Introducción a los procedimientos heurísticos	171
6.2. Exploración guiada de nuevas secuencias a evaluar	172
6.2.1. Número máximo de piezas en el sistema durante un ciclo	172
6.2.2. Características básicas del algoritmo heurístico: piezas y operaciones en un ciclo	172
6.3. Ejemplo ilustrativo	175
6.3.1. Descripción del problema 6.1	175
6.3.2. Número máximo de piezas a inicio de ciclo	175
6.3.3. Cuatro piezas a inicio de ciclo (n=4)	176
6.3.4. Tres piezas a inicio de ciclo (n=3)	179
6.3.5. Dos piezas a inicio de ciclo (n=2)	182
6.4. Algoritmo general de aplicación del procedimiento heurístico	185
7. EXPERIENCIA COMPUTACIONAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	187
7.1. Presentación y objetivos del capítulo	187
7.2. Descripción de la experiencia computacional básica de validación	187
7.2.1. Clasificación de ventanas temporales	188
7.2.2. Tipos de velocidades de grúa	188
7.2.3. Experiencia computacional básica	189
7.3. Determinación de las soluciones óptimas para la experiencia computacional básica	190
7.3.1. Variables	191
7.3.2. Reformulación de las restricciones	191
7.3.3. Función objetivo	192
7.3.4. Ejemplo: el problema 11406	193
7.3.5. Ventana Temporal Media y Trabajos Durante Permanencia	197
7.4. Aplicación de un algoritmo arborescente sobre el grafo Secuencial	199
7.4.1. Características de los algoritmos de exploración sobre el grafo Secuencial	199
7.4.2. Resultados de la experiencia computacional básica utilizando el grafo Secuencial	200
7.5. Aplicación del algoritmo <i>branch and bound</i> sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado	203
7.6. Aplicación del algoritmo heurístico sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado	206
7.7. Experiencia computacional ampliada	208
7.8. El Algoritmo Combinado	209
7.8.1. Descripción del Algoritmo Combinado (AC)	209
7.8.2. Evaluación del algoritmo sobre la experiencia computacional básica	210
7.8.3. Descripción de la variante del Algoritmo Combinado (AC')	212
7.8.4. Evaluación del algoritmo sobre la experiencia computacional ampliada	213

7.9. Evaluación de los algoritmos mediante ejemplares <i>benchmark</i>	216
7.9.1. <i>Benchmark</i> Phillips y Unger (1976)	216
7.9.2. <i>Benchmark</i> del grupo Bermudes	217
8. APLICACIÓN DEL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO A OTRAS VARIANTES DEL PROBLEMA	221
8.1. Aplicación del algoritmo <i>branch and bound</i> sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado al caso C2HSP	221
8.1.1. Algoritmo basado en el grafo de tiempo de ciclo acotado para el caso C2HSP	221
8.1.2. <i>Benchmark</i> de Phillips y Unger resuelto mediante el algoritmo MCC	224
8.1.3. <i>Benchmark</i> de Phillips y Unger resuelto mediante el algoritmo MCC adaptado al grafo TCA	225
8.1.4. Experiencia computacional: caso de dos grúas en líneas con 10 ó más baños	227
8.2. Comparación de los resultados entre casos mono-grúa y multi-grúa	229
9. APLICACIÓN A UN CASO REAL EN EL CAMPO DE LA ELECTRÓNICA	231
9.1. Introducción a la empresa	231
9.2. Los productos fabricados	231
9.3. El proceso productivo	232
9.4. Planteo para la resolución de la línea en configuración 1B,1F/1/p/U,⊃	235
9.5. Resolución de la línea para el caso mono-grúa (1B,1F/1/1/U,⊃)	237
9.6. Resolución de la línea para el caso multi-grúa (1B,1F/1/2/U,⊃)	238
9.7. Principios y aplicación de la transformación simétrica	240
9.7.1. Transformación simétrica: el ejemplar directo y el ejemplar inverso	240
9.7.2. Aplicación al caso de la grúa 1 con pivote en el baño 12	242
Ejemplar directo	242
Ejemplar inverso	243
9.8. Evaluación del número de grafos resueltos para el caso multi-grúa (1B,1F/1/2/U,⊃)	244
9.9. Recomendaciones de diseño de la línea de producción	245
10. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN	247
10.1. Conclusiones	247
10.1.1. La situación real analizada	247
10.1.2. Estructura del trabajo	247
10.1.3. Los algoritmos utilizados	248
10.1.4. La aportación de los grafos con Tiempo de Ciclo Acotado	248
10.1.5. La aplicación de grafos con Tiempo de Ciclo Acotado al caso C2HSP	249
10.1.6. Evaluación de objetivos	249

10.2. Líneas futuras de investigación	249
10.2.1. Casos directamente relacionados con la variante del problema tratada	249
10.2.2. Variantes del problema basadas en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado	250
10.2.3. Resolución simultánea de los ejemplares directo e inverso	250
10.2.4. Estudio del caso con objetos heterogéneos	250
10.2.5. Otros problemas de ingeniería posiblemente relacionados con HSP	250
REFERENCIAS	251
ANEXOS	
ANEXO 1.	
Ejemplares de la experiencia computacional básica (de 5 a 10 baños)	261
ANEXO 2.	
Resultados (por series) de las variables tiempo de ciclo y vector de instantes de tiempo T para los 540 ejemplares de la experiencia computacional básica	271
ANEXO 3.	
Comparación de resultados del algoritmo de branch and bound utilizando el grafo Secuencial para resolver secuencias o subsecuencias	281
ANEXO 4.	
Resultados óptimos al aplicar el algoritmo de branch and bound utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado para resolver las secuencias o subsecuencias	301
ANEXO 5.	
Resultados al aplicar el algoritmo heurístico basado en el número de piezas por ciclo, utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado para resolver las secuencias o subsecuencias	339
ANEXO 6.	
Ejemplares de la experiencia computacional ampliada (más de 10 baños)	343
ANEXO 7.	
Resultados al aplicar el algoritmo de branch and bound utilizando el Algoritmo Combinado AC o su variante AC' para resolver los ejemplares de la experiencia computacional ampliada	345

ANEXO 8.

Resultados óptimos al aplicar el algoritmo de Minimum Common Cycle utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA) para problemas con dos grúas _____ **351**

ANEXO 9.

Comparación al aplicar el algoritmo de Minimum Common Cycle y su adaptación al uso del Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA), para problemas con dos grúas ____ **371**

1. INTRODUCCIÓN: MARCO DEL TRABAJO

1.1. La producción y sus decisiones

1.1.1. Definición de producción

A lo largo de la historia, diversos autores se han ocupado de describir el concepto de **producción**, una de las funciones clave en las empresas, y de **sistema productivo**, como conjunto de elementos encargado de realizarla.

Buffa y Sarin (1983) definen “los sistemas productivos como aquellos medios a través de los cuales se transforman insumos para tener productos y servicios útiles como resultado. La secuencia *insumo-conversión-producto* es una manera muy útil de conceptualizar los sistemas productivos, comenzando con la unidad más pequeña de actividad productiva, a la que generalmente se llama operación (...). Los insumos pueden adoptar una gran variedad de formas: son las distintas materias primas, la energía, la mano de obra, la maquinaria, las instalaciones, la información y la tecnología”.

En una línea similar, **Chase y Aquilano (1994)** consideran los sistemas de producción como “un conjunto de componentes cuya función es convertir un conjunto de insumos en un producto deseado, por medio de lo que llamamos proceso de transformación”. Los insumos (o entradas al sistema) pueden ser materias primas, personas, energía o productos que provienen de otros sistemas, y los componentes, una máquina, una persona o una herramienta.

En la definición de **Fogarty y Hoffmann (1983)** sobre las operaciones de la producción, utilizan “un esquema de representación de dichas actividades siguiendo el patrón de un sistema en que las entradas se convierten en salidas mediante un proceso”.

En cambio, **Domínguez Machuca et al (1995)** asocia las empresas a “unidades de producción creadoras de utilidad” ya que “detectan las necesidades de los consumidores y las satisfacen mediante la elaboración de una serie de bienes y servicios que dan lugar a un flujo entre ambos”. Para ello, “la empresa utiliza una serie de factores básicos para su funcionamiento que, en el caso más general, suelen ser: los materiales, los equipos productivos, la energía, el factor trabajo, la información y el capital”. Finalmente, se recuerda que “la creación de un valor añadido después de retribuir los distintos factores es una de las principales funciones de la empresa en el sistema (...)”.

Finalmente, **Vollmann, Berry y Whybark (1995)** se preocupa más por la finalidad de los sistemas de planificación y control de la producción, que consiste en “administrar eficientemente el flujo de materiales, manejar al personal y utilizar el equipo eficazmente, coordinar las actividades internas con las de los proveedores (...)”.

Las anteriores definiciones, según Companys y Corominas (1993), coinciden todas ellas en tres aspectos determinados:

1. La producción consiste en la transformación de unos bienes y/o servicios en otros bienes y/o servicios. Los primeros son los factores de producción, y los

segundos, los productos. Esta transformación tiene lugar debido a que los productos tienen más utilidad que los factores de producción. Aunque habitualmente se identifica producción con la manufactura de bienes, también existe producción en aquellos casos en que el producto resultante consiste parcial o totalmente en servicios. En nuestra sociedad, la producción de servicios es cada vez mucho más importante que la producción de bienes, sobre todo en relación a la proporción de la fuerza total de trabajo empleada.

2. La transformación se realiza en virtud de un proceso productivo que a partir de unas entradas (*inputs*) proporciona unas salidas (*outputs*). Se utilizará, pues, la denominación de sistema productivo para designar el conjunto de elementos materiales y conceptuales que realizan la transformación (y que forman parte de dichas entradas). Las entradas se componen esencialmente por trabajo humano, energía, materiales, dinero generalmente invertido en maquinaria e instalaciones, sin olvidar el conocimiento tecnológico (*know-how*) y la tecnología propiamente dicha (ingeniería del producto y de los procesos) como de conocimiento de gestión y de datos sobre la información del sistema productivo y de su entorno.

3. El sistema productivo está inmerso en un sistema más general, la organización, de la cual precisa para su pleno desarrollo de otras actividades, procesos y sistemas complementarios: tecnológicos, comerciales, contables, financieros, etc. ligados indirectamente con el proceso de transformación.

Globalmente, puede sintetizarse que la primera conclusión indica una creación o incremento de valor a lo largo del proceso de producción; la segunda conclusión se refiere a la necesaria transformación a que son sometidos los factores para convertirse en productos; finalmente, en la tercera y última conclusión se relaciona al sistema productivo con otros elementos de orden superior, como la empresa, bajo las directrices de la cual trabaja.

El **sistema productivo** se define como los medios a través de los cuales se transforman unas entradas en unas salidas, que son bienes o servicios que la sociedad demanda. La secuencia *entrada-conversión-producto* es una manera muy simple de describir el sistema productivo, que entiende el proceso de conversión a partir de la unidad más pequeña en toda actividad productiva, la **operación**. Una operación es una etapa dentro del proceso global de la producción que conduzca al resultado final. Las etapas u operaciones deben estar organizadas adecuadamente para conseguir una cada vez mayor eficiencia del sistema de producción. Así, la administración de los sistemas productivos comporta el control de las variables del proceso de conversión.

1.1.2. Definición de logística

El concepto civil de **logística** aparece en los Estados Unidos a mitad de este siglo, hacia la década de los sesenta, inspirado parcialmente por las ideas procedentes de ambientes militares, donde ya tenía una larga tradición que incluso podría remontarse a los ejércitos romanos. El cargo de logista era sinónimo de intendente de abastecimientos.

La logística empresarial en los años sesenta refleja los conocimientos existentes en aquel momento centrados en la **gestión de stocks** (básicamente, la fórmula EOQ) y sobre gestión

de los transportes. Aquella concepción de la logística se centra en considerar, globalmente integradas en un único sistema, las actividades dirigidas al control del movimiento de los productos acabados, desde el final de la línea de producción hasta su utilización o consumo. La finalidad primordial de este enfoque reside en la búsqueda de una visión global de conjunto que comporte aumentos reales de eficiencia ante obtener mejoras de eficiencia en cada actividad aisladamente, que pueden neutralizarse entre sí.

Poco tiempo más tarde, la era de la **gestión de compras o de aprovisionamiento de materiales**, orientada a ordenar el flujo de materia prima, componentes y materiales de procedencia exterior, necesarios para la producción, desemboca en un enfoque global del conjunto de los movimientos de materiales. Así, se implanta la era de la logística integral, basada en la idea de servicio al cliente y orientada a ordenar los flujos de materiales desde el proveedor hasta el consumidor.

La logística se puede describir como la gestión global, eficaz y eficiente de las actividades requeridas para crear, mantener y controlar los flujos de materiales (materias primas, piezas de procedencia exterior, piezas semielaboradas, subconjuntos y productos) desde el proveedor hasta el punto de consumo o utilización. Su objetivo es lograr unos niveles de servicio predeterminados con el mínimo coste o con la máxima eficiencia, como indicaba ya Magee (1968) o más recientemente Méndez y Cespón (1999).

1.1.3. Relación entre producción y logística

Según Bautista y Companys (2000), al considerar el flujo de materiales íntegramente desde el proveedor hasta el consumidor, la Logística debe considerar el flujo a través del sistema productivo propiamente dicho. En adelante, se considerará básicamente el sistema productivo, aunque sus ideas beneficien al sistema logístico. En el marco de la logística empresarial en fabricación de bienes, la logística de producción constituye una de las etapas decisivas para el éxito de las organizaciones de transformación de bienes, sin que ello reste importancia a las etapas previa y posterior del aprovisionamiento y de la distribución.

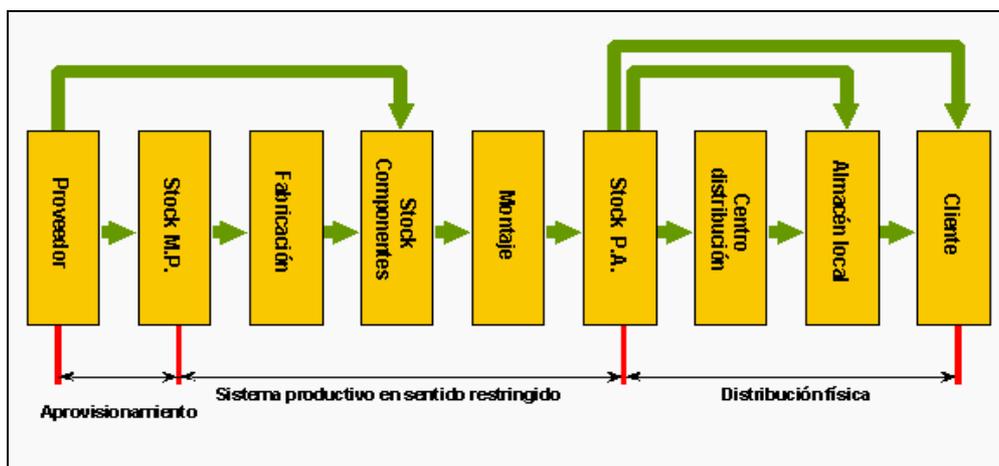


Figura 1.1: El sistema productivo como parte del sistema logístico (Bautista y Companys, 2000).

La figura 1.1 representa un esquema genérico del sistema, que se centra en el flujo de materiales desde el proveedor hasta el cliente. Dicho flujo se inicia en los proveedores, que aportan la materia prima y los materiales de procedencia exterior, y a través de la fase de aprovisionamiento se dirigen hacia el sistema productivo.

Esta materia, previamente almacenada en forma de stock, se convierte en componentes y piezas que alimentan el stock correspondiente a través de diversas transformaciones, que se denomina fabricación. Puede existir aprovisionamiento directo de aquellos componentes precisos para la fase posterior de transformación, pero no elaborados en la fase fabricación por los proveedores. Esta nueva transformación, denominada montaje, permite convertir de componentes a productos terminados, que alimentan su correspondiente stock. Los productos terminados constituyen la última fase de transformación física en el sistema productivo y constituyen bienes que solicitan los clientes. El flujo de materiales se prolonga desde el sistema productivo hasta los clientes, que puede constar de una distribución más o menos compleja.

La **Dirección de Operaciones** se interesa por todos los elementos operativos (transportes, almacenajes, fabricaciones y montajes) del sistema logístico comprendidos desde la adquisición de las materias primas y los materiales de procedencia exterior hasta la entrega de los productos terminados a los clientes.

Existen tres posibles enfoques al considerar la problemática de las operaciones:

- el enfoque de flujo de materiales a través del sistema,
- el enfoque de conjunto de actividades u operaciones de proceso que transforman los productos al ser realizadas simultánea o sucesivamente,
- el enfoque de utilización de la capacidad limitada de los recursos productivos y de distribución del sistema.

La dirección de operaciones debe tener en cuenta estos tres enfoques, altamente correlacionados, realizando una gestión simultánea del flujo de materiales, de las actividades de proceso y de la capacidad de los recursos, llegando a un equilibrio adecuado entre los tres aspectos.

1.1.4. La Dirección de Operaciones

En el conjunto de las decisiones tomadas en el sector productivo, se consideran los tres niveles clásicos de decisión en la empresa, inspirados en conceptos de Dervitsiotis (1981) y de Buffa y Sarin (1992):

- **El nivel estratégico** de la empresa.
- **El nivel táctico**, con las decisiones *de gestión*, que en el ámbito productivo pueden agruparse en decisiones de Diseño de los Sistemas Productivos (a medio y largo plazo) y decisiones de Dirección de Operaciones (a medio y corto plazo).
- **El nivel operativo**, del día a día, con las decisiones propias del control del sistema.

Entre las decisiones de Diseño de los Sistemas Productivos, según Buffa y Sarin (1992), cabe citar:

- la previsión y planificación a largo plazo,
- la selección de equipos y procesos,
- el diseño productivo de los elementos a fabricar,
- el diseño de tareas y medida del trabajo,
- la localización del sistema productivo,
- la distribución en planta.

La **Dirección de Operaciones** en el marco de la producción implica el estudio de las decisiones relacionadas con el diseño, control y logística de los sistemas productivos “operativos”. A pesar que habitualmente en los sistemas de manufactura la gestión de las operaciones merece un interés prioritario, también puede contemplarse en otros tipos de sistemas, como los que proporcionan servicios o información.

1.1.5. Decisiones de la Dirección de Operaciones

La **Dirección de Operaciones** supone llevar a cabo la gestión periódica de aquellos procesos de transformación que permiten lograr los objetivos de la organización. Entre algunas de las **acciones** o decisiones específicas que se consideran en la Dirección de las operaciones de los sistemas productivos, cabe citar como más importantes la planificación de la producción, el cálculo de necesidades, la programación de la producción, y como *feedback* o retroalimentación para decisiones futuras, el seguimiento y control.

No obstante, la Dirección de Operaciones debe velar por la sincronización de todos los elementos operativos que intervienen en la parte del sistema logístico comprendido entre la recepción de materias primas o componentes procedentes de proveedores hasta la entrega de los productos acabados a los clientes. La problemática tratada por la Dirección de Operaciones debe considerar simultáneamente tres puntos de vista:

1. el flujo de materiales que recorre el sistema productivo,
2. el conjunto de actividades, operaciones o tareas necesarias para realizar completamente la transformación de las materias primas en productos acabados,
3. la utilización de la capacidad limitada de los recursos productivos del sistema.

La gestión de las decisiones de Dirección de operaciones suele plantearse a diferentes niveles, como describen Bautista y Companys (2000), lo que permite una jerarquía de objetivos y facilita su seguimiento y control a la hora de ponerlas en práctica. Un modelo de referencia bastante útil establece tres niveles jerárquicos de toma de decisiones (figura 1.2): la planificación de operaciones, el cálculo de necesidades y la programación de operaciones.

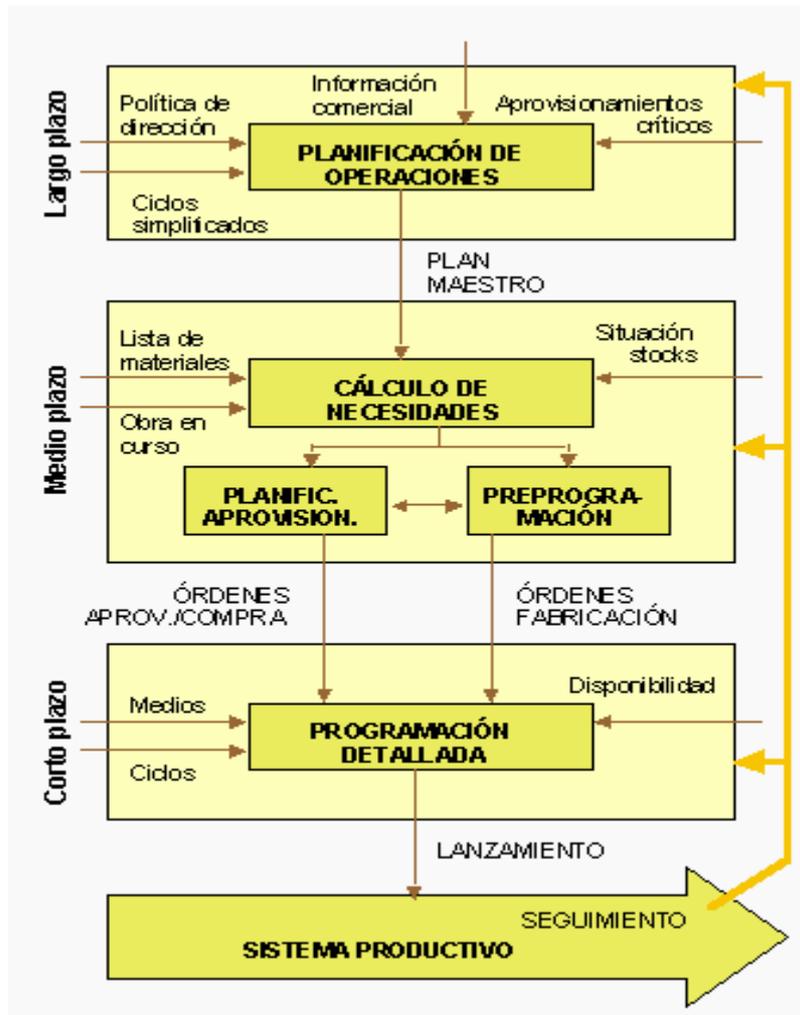


Figura 1.2. Niveles de decisión en dirección de operaciones (Bautista y Companys, 2000).

La **planificación de operaciones** tiene como objetivo realizar la distribución de los recursos productivos, en principio escasos o limitados, entre todas aquellas actividades productivas que compiten por ellos, para poder cumplir con los objetivos estratégicos marcados por la empresa al sistema productivo. El resultado se materializa en un Plan Maestro o Director de Producción, que indica la cantidad de producción de cada uno de los artículos del plan maestro en los intervalos temporales del horizonte de planificación. Previamente, durante su elaboración se ha considerado la información comercial de las ventas previstas y la política estratégica marcada por la dirección así como las disponibilidades de los recursos críticos. Normalmente se toma un horizonte de un año, dividido en meses, con una frecuencia de actualización mensual, para adoptar las oportunas decisiones con la debida antelación a las circunstancias que deberán afrontar.

Las limitaciones de los recursos obligan a la adaptación entre oferta de producción y demanda comercial, que puede verse realizada mediante la constitución de stocks de productos en períodos valle de demanda o la aportación de capacidad productiva adicional. La producción usando tecnología tradicional alcanza una plena eficiencia cuando los productos de gran demanda se fabrican en producción continua o en grandes lotes. Las nuevas tecnologías intentan convertir los sistemas en suficientemente flexibles para romper esta tendencia y adaptar la fabricación a cada uno de los diversos productos a fabricar.

La planificación de operaciones se realiza básicamente a dos niveles. El primero conduce a la obtención de un Plan Maestro Global o Agregado de producción, que agrupa los productos en familias en todos los intervalos de un horizonte medio (un año dividido en doce meses). El segundo, de horizonte menor (típicamente unos cuatro meses) y de división más fina, en intervalos típicamente de semanas, desagrupa las familias en clases más reducidas (Plan Maestro Detallado) para disponer de la carga de las líneas de producción.

El **cálculo de necesidades**, a partir de las cantidades de productos terminados a fabricar en cada intervalo de tiempo, debe establecer las órdenes de aprovisionamiento y fabricación, ambos grupos sincronizados adecuadamente para el funcionamiento eficiente del sistema productivo. El cálculo de las necesidades se efectúa básicamente aplicando la explosión de los productos terminados del plan maestro en los materiales y operaciones necesarios para fabricarlos. En el cálculo de necesidades de recursos de fabricación, el desajuste entre la necesidad y la disponibilidad comporta la reubicación temporal de órdenes de producción o la modificación del plan maestro. Una de las técnicas más usadas se conoce como MRP (*Material Requirements Planning*). El horizonte que abarca un cálculo de necesidades no supera, en general, los cuatro meses.

Finalmente, la **programación de operaciones** debe elaborar un programa que indique cada operación en que se descomponen las órdenes de producción, en qué recurso se va a realizar y durante qué período de tiempo. Al situarse en un nivel más concreto de detalle, debe trabajar con los valores reales de tasas de producción y, mediante el seguimiento y control, comprobar que estos valores se mantienen. Como se observará en esta tesis, el problema de la programación de algunos sistemas productivos puede adquirir gran complejidad, lo que puede verse superado considerando un cierto sobre-equipamiento o una jerarquía de asignaciones. El horizonte se reduce a unos pocos días, sus intervalos en horas, y la actualización se realiza con frecuencia diaria. La función de lanzamiento supone la generación de la documentación necesaria del programa para que se pueda llevar a cabo.

Otras tareas complementarias en la dirección de operaciones, que controlan la evolución del sistema productivo, para evaluar sus cambios son la fiabilidad y mantenimiento del sistema productivo, la gestión de la calidad, o el control de costes y de la mano de obra.

Finalmente, siempre es necesario combinar el conocimiento teórico sobre cómo funciona un **sistema de planificación y control de la producción** con las experiencias reales vividas en tales sistemas. Cuando se trata esta función, muchas veces se enfatiza en la planificación, algo que tiende a ser una muestra estática sobre cómo funciona realmente el sistema. La práctica del control requiere, en cambio, algún mecanismo que simule la ejecución de planes a lo largo del tiempo. A tal efecto, se requiere un conjunto de experiencias de aprendizaje sobre el sistema, que facilitan un control efectivo sobre el sistema.

1.2. La programación de operaciones

La programación de operaciones (conocida en inglés como *scheduling*) es el peldaño principal en la escalera de adquisición de valor por parte del producto. Dentro de la **logística de producción**, la programación de las tareas suele convertirse en el aspecto más complejo (Mendez y Cespón, 1999). A su vez, y una vez fijado el marco de la logística de

producción, el papel desempeñado por los sistemas de planificación y control es fundamental en la mejora de funcionamiento del sistema. Estos sistemas desembocan en las decisiones a un nivel operativo después de haber considerado las decisiones a niveles estratégico y táctico, que conjuntamente forman los tres niveles de decisión en la dirección de operaciones: planificación de operaciones, cálculo de necesidades y programación de operaciones. El nivel operativo es aquél donde claramente queda reflejada la estrecha relación con la ejecución de las actividades, operaciones o tareas, en definitiva con el funcionamiento del sistema. La culminación del proceso de planificación a través de la función de programación de operaciones (*scheduling*) le reporta un carácter de gran influencia sobre el grado de éxito de la dirección de operaciones.

Entre todas las actividades en el ámbito de la gestión diaria de la producción, la labor desarrollada en la programación de la producción puede calificarse, por un lado, como poco valorada y, por otro, relativamente poco desarrollada. Dicha condición puede justificarse por el constante esfuerzo requerido para mejorar el servicio, en términos de plazo de entrega, costes y calidad. Esta función tiene relativamente un escaso desarrollo, en comparación con la planificación por ejemplo, al sumarse dos factores: la complejidad en el manejo de datos y la poca uniformidad entre los diferentes sistemas productivos. Esto resta posibilidades a establecer alguna metodología general que permita aplicar esta función en un gran número de empresas.

Los **objetivos** de la programación de operaciones, pues, son:

- a un nivel externo al sistema productivo, proporcionar un producto a un coste razonable, en el plazo de entrega acordado y con el nivel de calidad fijado;
- a un nivel interno al sistema productivo, lograr una buena medida de productividad mediante un uso eficiente de los recursos disponibles, considerando los objetivos a nivel externo.

Las **restricciones** o limitaciones por las que se encuentra afectado el sistema productivo pueden ser debidas a:

- los recursos disponibles,
- la demanda, planteada a partir de las necesidades del mercado,
- otros aspectos, como la gestión de los recursos automatizados del sistema productivo.

Las **medidas de eficiencia** que se utilizan para evaluar y comparar los posibles resultados de una programación de tareas se centran frecuentemente en:

- los tiempos de entregas de los diferentes productos fabricados, a comparar respecto a las fechas comprometidas de entrega (*due dates*),
- la utilización de los recursos, que se determina a partir de la carga de trabajo (*workload*) asignada a cada uno de ellos,
- la producción en curso (*work in process*).

1.3. La secuenciación de operaciones

Las tecnologías de información, basadas en el uso de ordenadores, utilizadas en diversas funciones empresariales, entre ellas la producción, empiezan a formar un conjunto importante de herramientas de gestión. El uso eficiente de dichas herramientas obliga al director de operaciones a familiarizarse con sus puntos básicos y las implicaciones que tienen en el funcionamiento diario. La implantación de estas nuevas tecnologías también varía sustancialmente de las tradicionales, debido al mayor alcance e impacto que implican, no tan sólo en la producción, sino también en el resto de la empresa. Así, en el ámbito productivo cabe destacar, entre otros, las tecnologías de grupo, las máquinas de Control Numérico, el diseño integrado con ordenador y los **Sistemas de Fabricación Flexible** (FMS, *Flexible Manufacturing Systems*).

Según Widmer (1991), la producción flexible en un sistema productivo implica “que los trabajadores no intervengan directamente sobre la fabricación (...); la programación de la producción se controla mediante un sistema informático”.

Los entornos de fabricación automatizada, cada vez más numerosos, presentan ciertos aspectos particulares no hallados en los modelos de planificación y programación desarrollados para sistemas de producción tradicionales. Por ejemplo, los **modelos con automatización** incluyen habitualmente restricciones sobre la imposibilidad que una máquina realice ciertas operaciones consecutivamente, dentro de los límites impuestos por sus características. Estos modelos válidos para optimizar globalmente el sistema deben sincronizar las actividades u operaciones de los sistemas flexibles de manipulación de material con las operaciones propias del sistema productivo. La complejidad de las situaciones tratadas desemboca en interesantes problemas de optimización combinatoria, uno de los cuales es el que nos ocupa.

Algunas características de funcionamiento que se observan en este tipo de sistemas son las siguientes:

- Las operaciones son realizadas por máquinas.
- Los objetos o útiles son desplazados y manipulados por sistemas automatizados de manipulación de material.
- Debe llevarse a cabo un control de las máquinas, las herramientas y los manipuladores de material.

En la definición de sistemas de producción flexibles aparece implícita la automatización de ciertas máquinas que son controladas externamente por sistemas informáticos. Se pueden hallar ejemplos de este tipo de sistemas en la industria del metal o bien en la industria electrónica, en la producción de placas de circuitos impresos (PCBs, *printed circuit boards*).

La producción flexible se diferencia de la producción tradicional por su grado de **flexibilidad**, pero cabe preguntarse qué se entiende exactamente por flexibilidad. Sethi y Sethi (1990) logran definir cincuenta variantes diferentes de flexibilidad, halladas todas en la literatura, de las cuales en Crama (1997) se seleccionan once puntos de vista distintos, y de los cuales se citan aquéllos con mayor relación con el presente trabajo a continuación:

- flexibilidad en las máquinas: posibilidad que en las máquinas se realicen varias operaciones sin necesidad de un gran esfuerzo en el cambio entre diferentes operaciones;
- flexibilidad en la manipulación de materiales: capacidad de los sistemas de manipulación de materiales para desplazar objetos eficientemente para que estos sigan un proceso adecuado a lo largo de la planta;
- flexibilidad en las operaciones: posibilidad para que una pieza sea fabricada de diferentes maneras;
- flexibilidad en el proceso: referida a los diversos tipos de objetos que se pueden producir, sin grandes tiempos de lanzamiento;
- flexibilidad en las rutas: posibilidad de producir un objeto en un sistema siguiendo diversas rutas alternativas.

Los modelos matemáticos en este campo, usados para obtener planes de producción como en el montaje de placas de circuitos (PCBs) en talleres automatizados, obtienen un programa sometido a las limitaciones impuestas por los recursos (*scheduling under resource constraints*).

Para obtener buenos resultados de eficiencia del sistema productivo, no deben ignorarse las restricciones impuestas por la manipulación de materiales (MHSs, *material handling systems*), cosa que no ocurre en la mayoría de modelos de programación tradicionales, donde se considera el tiempo de transporte prácticamente nulo. Cuando los recursos de manipulación de materiales presentan gran interacción con las estaciones de trabajo, el sistema productivo se ve directamente afectado por las actividades de manipulación. Estas operaciones de manipulación las realizan habitualmente vehículos automatizados (AGVs, *AutoGuided Vehicles*), robots, grúas o similares.

Un modelo general de programación en estas condiciones suele contar con las siguientes características:

- Existe una estación de entrada, una estación de salida, **m** máquinas y **k** manipuladores idénticos.
- Todas las piezas están disponibles inicialmente en la estación de entrada y deben terminar en la estación de salida.
- Cada máquina sólo puede procesar una pieza a la vez, con una duración de la operación $p(i,j)$, es decir, tiempo de proceso de la pieza i en la máquina j .
- El manipulador carga las piezas, las descarga y las transporta de máquina a máquina.
- Cada manipulador sólo puede manipular una única pieza a la vez, siendo $d(j,l)$ el tiempo de movimiento desde la máquina j a la máquina l .
- El objetivo de la programación es elaborar programas simultáneos para las piezas y los manipuladores optimizando alguna medida arbitraria (el tiempo total, el tiempo de ciclo, ...).

- El modelo puede completarse con restricciones adicionales, como precedencias, fechas de entrega, importancia o pesos de las piezas, etc., incluyendo además posibles restricciones sobre los manipuladores.

Crama (1997) cita dos grupos de problemas representativos en la programación de flujo regular con múltiples máquinas (*flow-shop multiserver*): los problemas de programación en células robotizadas y los problemas de programación de transportadores o grúas, en cuyo ámbito se centra el presente trabajo.

1.4. Métodos de resolución para problemas de programación

Los problemas de programación de la producción, en el marco de los sistemas de fabricación altamente automatizados, pertenecen al grupo de problemas de **optimización combinatoria**.

En general, se trata de problemas NP-completos, según la clasificación de Garey y Johnson (1979). Como se explicará en el capítulo 3, Lei y Wang (1989a) demostraron que el problema básico y central de esta tesis se engloba en el grupo de problemas NP-completos.

Para obtener una programación de operaciones según los requerimientos del problema, procesar adecuadamente una variedad de productos u operaciones en un conjunto de recursos, existen diversos **métodos de resolución**:

- En algunos casos, se puede alcanzar una solución óptima al problema planteado, mediante un procedimiento de optimización, tal como la programación lineal, si bien otras técnicas alternativas pueden garantizar los resultados óptimos.
- Cuando la realidad no presenta tal linealidad o la complejidad del problema es mayor, y el número de posibles soluciones no se puede evaluar en un corto espacio de tiempo, se recurre a otras técnicas de exploración de entornos para obtener un resultado satisfactorio.

Como se observa, el conjunto de métodos propuestos parten de la **optimización clásica**, recurriendo por sus propiedades, o bien a la programación lineal, o bien a otras técnicas, como la teoría de grafos, la programación dinámica o la simulación si es necesaria. Ambas posibilidades cuentan con ventajas e inconvenientes en su explotación a las diversas situaciones posibles. Otra opción, las técnicas propias de la optimización combinatoria son menos laboriosas, y gracias a las prestaciones informáticas, ofrecen resultados suficientemente válidos.

Por último, se dispone de los llamados **sistemas expertos**. Estas herramientas aplicadas a la programación de la producción también pueden considerarse adecuadas desde un punto de vista teórico, aunque se puede resaltar dos posibles desventajas de tipo práctico: cada sistema productivo suele ser bastante singular, y requieren actualizaciones en caso de cambios físicos en el sistema productivo.

En definitiva, cualquiera de las opciones planteadas conlleva modelizar los sistemas productivos para resolver o analizar sus problemas, mediante el uso de un paquete informático, que sirva como sistema de ayuda o de planificación a la producción.

1.5. Hipótesis de partida y resultados esperados

El presente estudio va a tratar el problema de programación de grúas o transportadores que indicaba Crama (1997), clasificado en su variante más simple en el grupo de problemas combinatorios NP-completos según Garey y Johnson (1979). Partiendo de aportaciones previas, se pretende encontrar nuevos procedimientos para hallar programaciones factibles y garantizar soluciones óptimas a ejemplares complejos en tiempos menores que los necesarios para los procedimientos conocidos hasta el momento.

Las hipótesis en que se basará el trabajo son las siguientes:

1. En caso de utilizar conjuntamente algunas de las aportaciones formuladas por diversos autores, los resultados se pueden obtener en menor tiempo de cálculo o en menor número de cálculos.
2. Se pueden aplicar otras técnicas, dentro del ámbito de la organización industrial, distintas a las propuestas en los artículos reseñados. Un nuevo procedimiento propuesto puede girar entorno a la programación dinámica acotada.
3. El desarrollo de algoritmos basados en la exploración de entornos puede mejorar los tiempos invertidos en hallar una solución, o bien en asegurar su grado de optimalidad.
4. El estudio de la mayoría de autores se centra en el caso más básico, con objetos homogéneos, con sus múltiples variantes (uno o más baños, una o más grúas, etc.). La variante de objetos homogéneos debe ser un primer paso al estudio de la variante de objetos heterogéneos. Esto implica que el objetivo ya no sea obtener una programación de movimientos de la grúa o grúas, sino también hallar una ordenación de objetos. Por lo tanto, se trata de secuenciar y programar, sin violar las restricciones impuestas.

A diferencia de los resultados ya obtenidos, la tendencia real a la flexibilidad en la producción implica la tendencia progresiva al caso de objetos heterogéneos frente al actualmente general de objetos homogéneos. No obstante, la amplitud del estudio de la producción de objetos homogéneos no ha permitido su extensión a los productos heterogéneos.

Un último resultado del trabajo será el aprovechamiento de las conclusiones extraídas de la experiencia computacional en problemas observados en la realidad.

2. EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DEL PUENTE-GRÚA

2.1. Una visión general del problema

2.1.1. El problema HSP (*Hoist Scheduling Problem*)

El problema desarrollado en esta tesis, conocido en la literatura como HSP (*Hoist Scheduling Problem*), consiste en hallar la secuenciación de objetos y la programación de los movimientos necesarios que debe realizar uno o más puentes-grúa, para transportar unos objetos o elementos a lo largo de una línea de producción, compuesta generalmente por un conjunto de tanques.

Los **puentes-grúa**, o bien grúas elevadoras (*hoisting machines*) son, según la versión inglesa de la Enciclopedia de Ciencia y Tecnología de McGraw–Hill (1997), mecanismos para levantar y bajar materiales con movimientos intermitentes mientras aguantan dichos materiales libremente suspendidos. Se trata de máquinas capaces de recoger una carga de materiales desde una localización y depositarla en otra cualquiera, circunscrita en un área limitada. Por el contrario, las máquinas elevadoras mueven sus cargas sólo en un recorrido vertical, y los monorraíles circulan a lo largo de una cierta ruta horizontal más que sobre un área. Los principales componentes de los puentes-grúa son el mecanismo de las poleas para el levantamiento, la grúa más el cabrestante que realizan los movimientos, y la columna y el bloque de la grúa como elementos estructurales.

Las líneas de fabricación para placas de circuitos impresos son un ejemplo de situación real en que se presenta la citada problemática. Las placas (colocadas en contenedores) deben pasar del tanque 0 (también conocido por estación de carga) al tanque en que se realice la primera operación, al tanque en que se realice la segunda operación, y así, hasta el tanque donde tenga lugar la última operación, y finalmente dejarlas en el tanque destinado a descargarlas. Los contenedores, con las placas, se transportan mediante un **puente-grúa programable**, el cual debe realizar diversas acciones, como:

- sacar contenedores de los tanques,
- depositar contenedores en los tanques,
- transportar contenedores entre tanques,
- moverse (sin desplazar ningún contenedor) entre dos tanques,
- estarse parado.

2.1.2. Los dos niveles de movilidad del puente grúa

Los puentes-grúa que cumplen con esta misión en una línea productiva pueden desplazarse a dos niveles diferentes. En caso de no transportar ninguna carga entre dos baños, el puente-grúa mueve sus abrazaderas a ras de la altura de los tanques, mientras que en caso de transportar alguna carga, los contenedores cuelgan de las abrazaderas del puente-grúa, lo que le obliga a trasladarse a una altura superior que en el caso anterior. Este doble nivel de desplazamiento de la grúa le obliga a realizar las operaciones de levantar la carga hasta una altura suficiente, cuando se encuentra en el tanque donde se recoge un contenedor, y a descender la carga la misma altura, cuando se encuentra en el tanque donde se deposita dicho contenedor.

Los contenedores deben permanecer en los diversos tanques durante un período de tiempo comprendido entre los **tiempos mínimo y máximo** prefijados, lo que se conoce también como ventana temporal de tiempos. Además, para el transporte o para el desplazamiento de los materiales entre cualquier par de tanques del sistema productivo la grúa requiere una duración nada despreciable, que debe tenerse en cuenta al programar sus movimientos.

2.1.3. Los procesos químicos

Los procesos químicos en tanques de una línea de fabricación para placas de circuitos impresos tienen lugar para que un circuito impreso multicapa contenga correctamente dos o más capas de dieléctrico que separan o soportan circuitos de cobre. La multicapa permite básicamente aumentar la densidad de interconexión por unidad de superficie, si bien cuenta con otras ventajas:

- Se apantallan las señales de ruido producidas por otros circuitos o campos eléctricos.
- Se permite que las pistas queden integradas en el interior del circuito y se evitan manipulaciones improcedentes.
- Se evitan deposiciones de cobre electrolítico y estaño-plomo, si las pistas son internas.

Los problemas en las líneas de producción mencionadas se plantean al evolucionar la tecnología basada en el circuito impreso. El primer circuito a doble cara se fabrica en 1942 y en la década de los cincuenta aparecen los transistores, con lo cual se patenta la primera estructura multicapa en 1961. En la década de los sesenta, se desarrolla la tecnología de los baños de metalización química, que favorece la adopción e implantación de los circuitos multicapa, y en los setenta, se desarrollan técnicas de producción y productos especiales. En este contexto aparecerá el primero de los artículos dedicados al *Hoist Scheduling Problem* (Phillips y Unger, 1976).

La fabricación de placas de circuitos impresos, que en los últimos años se ha incrementado debido a la extremada simplificación en su producción en masa y el incremento de la fiabilidad en los equipos, es un ejemplo de aquellas situaciones en que se plantea el problema tratado. Las placas impresas conductoras de múltiples capas se pueden fabricar mediante dos métodos: tecnologías sustrayentes (estampado y grabado) y tecnologías aditivas (recubrimiento).

El número de contenedores que pueden ser utilizados simultáneamente en la línea de producción depende de los valores relativos entre los tiempos mínimo y máximo en cada tanque y los tiempos de movimiento del puente-grúa entre tanques. Antes de resolver un problema cualquiera de este tipo, generalmente se desconoce cuál es el número máximo simultáneo de contenedores en el sistema.

2.1.4. Líneas únicamente dedicadas a un producto

Como ya se indicó en el capítulo 1, en este tipo de industrias se suele recurrir a la fabricación en serie de lotes con gran cantidad de unidades de un producto. En el caso de las líneas de fabricación de placas de circuitos impresos, esta modalidad de producción también es posible. Así, la repetición periódica de los movimientos para cada contenedor que circula a lo largo de la línea permite plantearse la programación del puente-grúa como un ciclo de movimientos. El tiempo entre la entrada de dos contenedores sucesivos en la línea productiva, es decir, la carga desde el tanque 0, se considera **un ciclo**.

El objetivo es maximizar la producción de contenedores por hora, lo que equivale a **minimizar el tiempo de ciclo**, es decir, el tiempo transcurrido entre la salida de dos contenedores consecutivos desde el tanque 0 (estación de carga) o entre la incorporación de un nuevo contenedor y el precedente en la línea de producción. Dicha estación de carga puede actuar simultáneamente como punto de descarga.

2.2. Características del proceso productivo de referencia

En primer lugar (figura 2.1), los procesos industriales que se van a estudiar están formados por diversas etapas, y por tanto, se pueden calificar como **multietápicos**. En cada una de las etapas del sistema productivo, los objetos permanecen sumergidos en un baño contenido en un tanque o cuba para recibir un cierto grado de transformación (etapa).

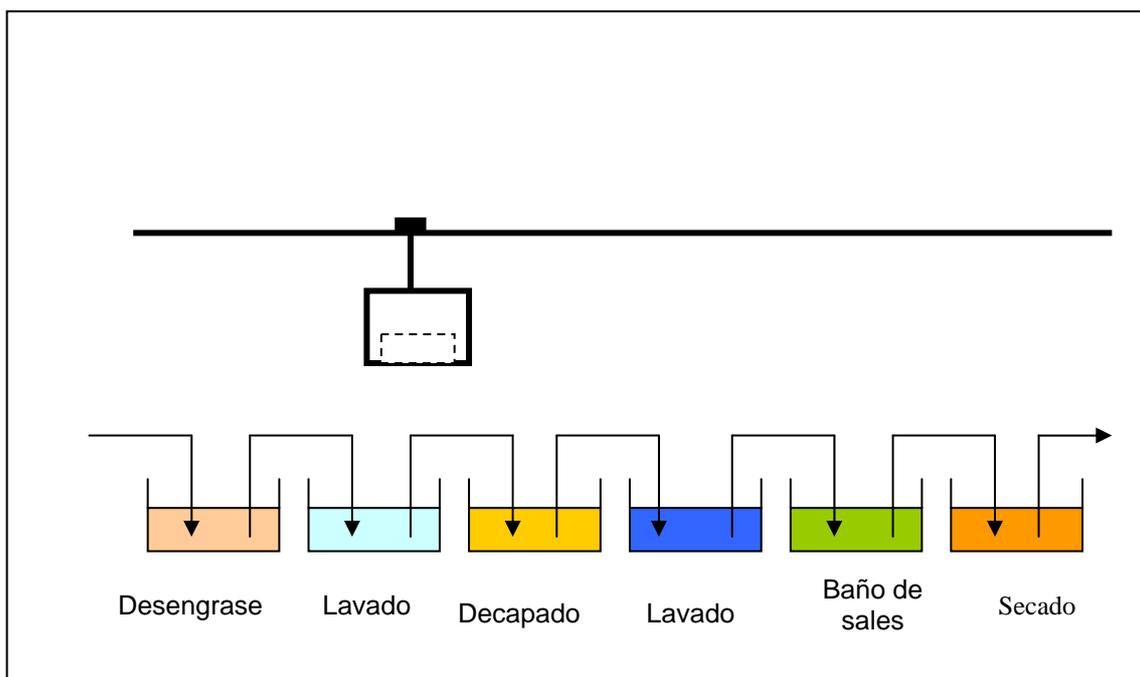


Figura 2.1. Esquema de un proceso de galvanización, como ejemplo con múltiples etapas

Un aspecto común a estos procesos o etapas, que en parte les confiere un carácter particular, son las **restricciones de ventana** (diferencia entre los tiempos máximo y mínimo) asociadas a las operaciones. Los tiempos de inmersión de los objetos en cada baño deben estar limitados dentro de un intervalo de tiempo dado, para controlar las reacciones químicas producidas. Es decir, existe una duración mínima necesaria en que los objetos deben estar sumergidos en los tanques, y también, una duración máxima de remojo en los tanques que no debe sobrepasarse.

El sistema está constituido por **una secuencia de tanques** $1, 2, 3, \dots, m$ (las etapas), que contienen sustancias para tratar los productos. Una grúa, desplazándose por la parte superior de la instalación, toma objetos de la instalación de carga y debe trasladarlos secuencialmente a través de los m baños hasta la estación de descarga, permitiendo que estén sumergidos en éstos el tiempo necesario.

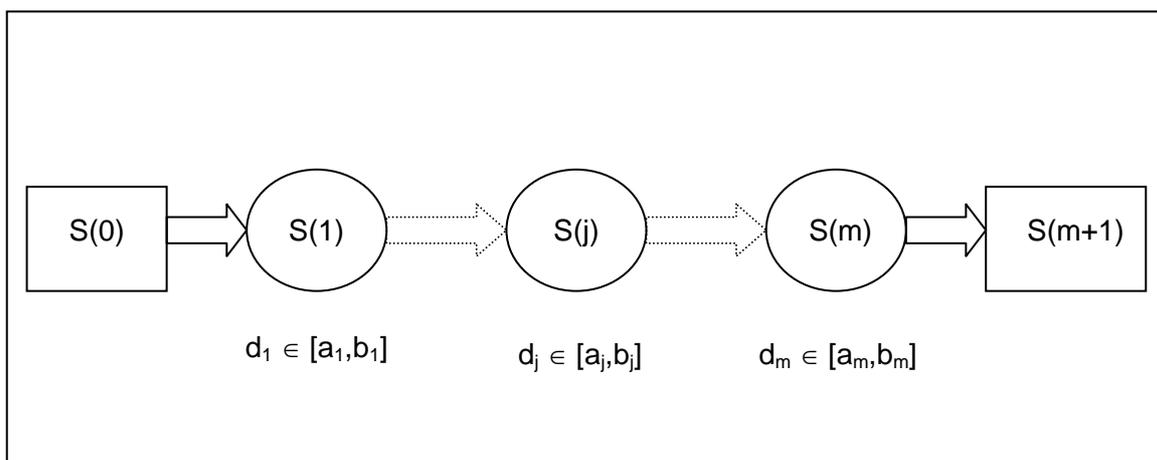


Figura 2.2. Descripción gráfica de la distribución de m tanques con restricciones de ventana

Los **movimientos** que la grúa debe realizar para una determinada acción en la secuencia de operaciones son los siete siguientes, representados en la figura 2.3:

1. Extracción del objeto del tanque origen.
2. Elevación transportando el objeto.
3. Pausa encima del tanque para escurrir el objeto.
4. Movimiento con carga entre las estaciones actual y siguiente en la línea de tanques.
5. Descenso transportando el objeto.
6. Deposición del objeto en el siguiente tanque.
7. Movimiento sin carga entre la estación donde la grúa depositó el objeto y la siguiente estación donde retirar un nuevo objeto, estación indicada por la secuencia de acciones de la grúa.

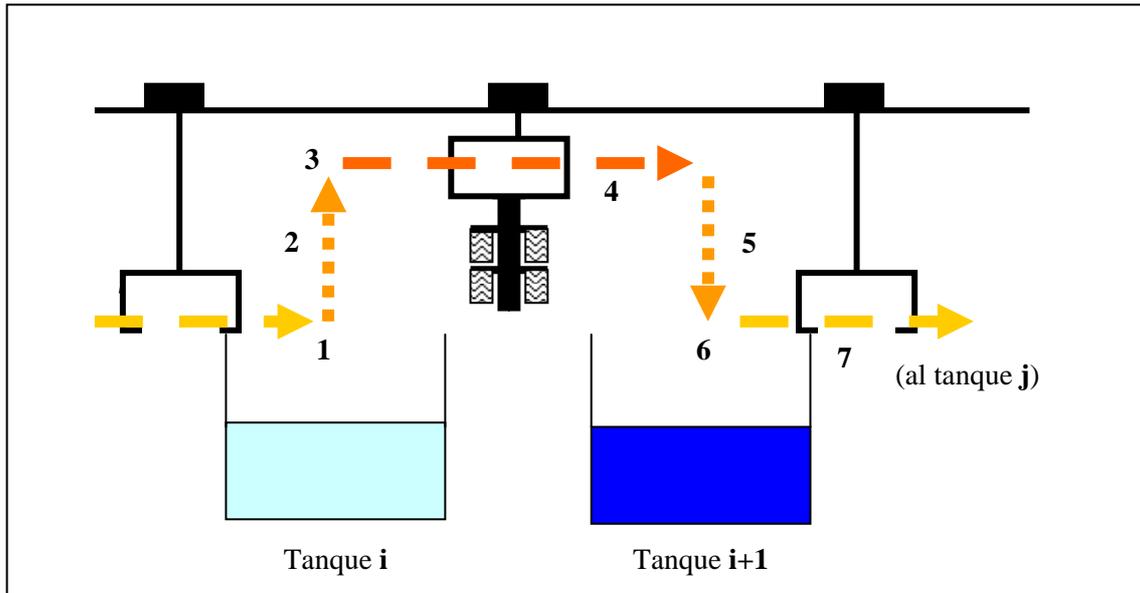


Figura 2.3. Movimientos a realizar por la grúa en un movimiento entre baños consecutivos.

Según las hipótesis planteadas, el movimiento de la grúa con carga (el movimiento 4) se realiza en una posición superior o más elevada que cuando el movimiento de la grúa se produce sin carga (el movimiento 7). Otra variante del problema podría ser que ambos movimientos tuvieran que realizarse en la posición superior y no pudiera ser posible el desplazamiento a lo largo de la posición inferior.

La pausa encima del tanque (el movimiento 3) sirve, por un lado, para escurrir al objeto y para que no gotee al transportarlo, y por otro, para estabilizar la grúa.

Por tanto, los **tiempos** transcurridos desde que se retira el objeto de un tanque hasta que se deposita en el siguiente son diferentes a los posibles tiempos entre ambos tanques sin transporte de objetos. Mientras que los tiempos de movimiento de la grúa transportando objetos sólo se pueden producir entre un tanque y el siguiente, los tiempos de movimiento de la grúa sin transporte de objetos se pueden producir entre cualquier pareja de tanques. La grúa puede consumir un tiempo llamado **tiempo muerto o extra** encima de un tanque en caso que su llegada al tanque sea anterior al instante programado para la recogida del objeto del citado tanque.

En general, hallar un programa de operaciones para la grúa supone un problema combinatorio, con soluciones óptimas no siempre fácilmente alcanzables en ejemplares de una determinada envergadura.

2.3. Clasificación de variantes en este tipo de problema

El proceso industrial descrito consta de m etapas por las cuales debe pasar cada una de las piezas u objetos a programar. En este caso, las etapas se suelen asociar a cubetas, baños o tanques, en los cuales se introducen las piezas u objetos, que se hallan en contenedores o bandejas, sometidos a las reacciones químicas en los baños. Cualquier movimiento es realizado por transportadores aéreos, conocidos industrialmente como puentes-grúa.

Los principales componentes de este tipo de sistemas productivos son:

- los tanques, donde deben producirse las reacciones químicas;
- los objetos, introducidos en las bandejas o contenedores;
- los elementos automatizados, puentes-grúa, encargados del flujo de materiales.

2.3.1. Los tanques

Los tanques, como elementos que contienen a los productos químicos que deben actuar sobre los objetos introducidos, se pueden clasificar básicamente según dos características diferentes: el número de objetos a tratar simultáneamente para una operación del proceso y el número de operaciones asignadas a cada tanque.

La primera clasificación comporta considerar a los tanques según el **número de objetos** que puedan ser procesados **en cada tanque**. Habitualmente, no se trata de un único tanque que contenga diferentes divisiones internas para alojar a diferentes objetos o grupos de objetos a la vez, sino que se destina más de un tanque a una determinada operación, con lo cual se valora el número de tanques destinados a dicha operación. Los cuellos de botella del sistema productivo conducen a los tanques multi-baño, es decir, a permitir que una operación demasiado duradera respecto a las demás se realice en más de un baño simultáneamente.

1.1. **Tanques mono-baño:** Situación de una línea cuando existe un único tanque del sistema destinado a una determinada operación del proceso y todos los tanques sólo pueden tratar un objeto o contenedor a la vez.

1.2. **Tanques multi-baño:** Situación de una línea cuando alguna operación del proceso tiene más de un tanque del sistema destinado a ella y, por lo tanto, cuando el tanque (si tiene compartimentos) o los tanques pueden tratar más de un contenedor a la vez, sometido a una determinada operación. Por tanto, el número de contenedores por tanque está limitado al número de compartimentos o de tanques por operación.

Ejemplo 1

Dado un proceso con 5 operaciones que deben realizarse en el orden indicado, cuyos tiempos mínimos y máximos de proceso son:

Operación	O1	O2	O3	O4	O5
Tiempo mínimo	30	20	70	25	30
Tiempo máximo	50	60	100	50	60

Tabla 2.1. Datos del ejemplo 1.

En la tabla 2.1 se observa que la tercera operación tiene unos tiempos mínimo y máximo superiores a los demás, y en concreto, el tiempo mínimo es superior al doble de cualquiera de los demás tiempos mínimos y el tiempo máximo se sitúa por encima de los demás tiempos máximos.

Si se considera la posibilidad de un único tanque por operación, tanques mono-baño, el sistema estaría formado por los 5 tanques siguientes:

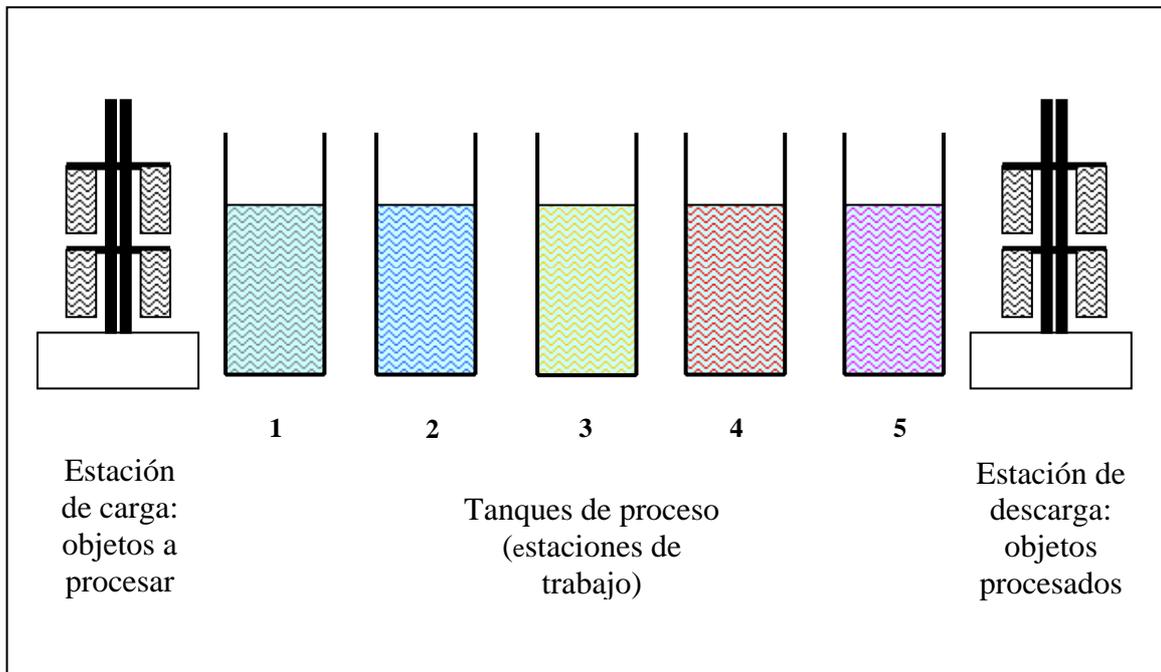


Figura 2.4. Ejemplo 1, con una línea de 5 tanques con tanques mono-baño.

A partir de la definición de tanques multi-baño, podría pensarse en la solución de la figura 2.5, basada en la compartimentación física del tanque que realiza la operación cuello de botella (tanque 3):

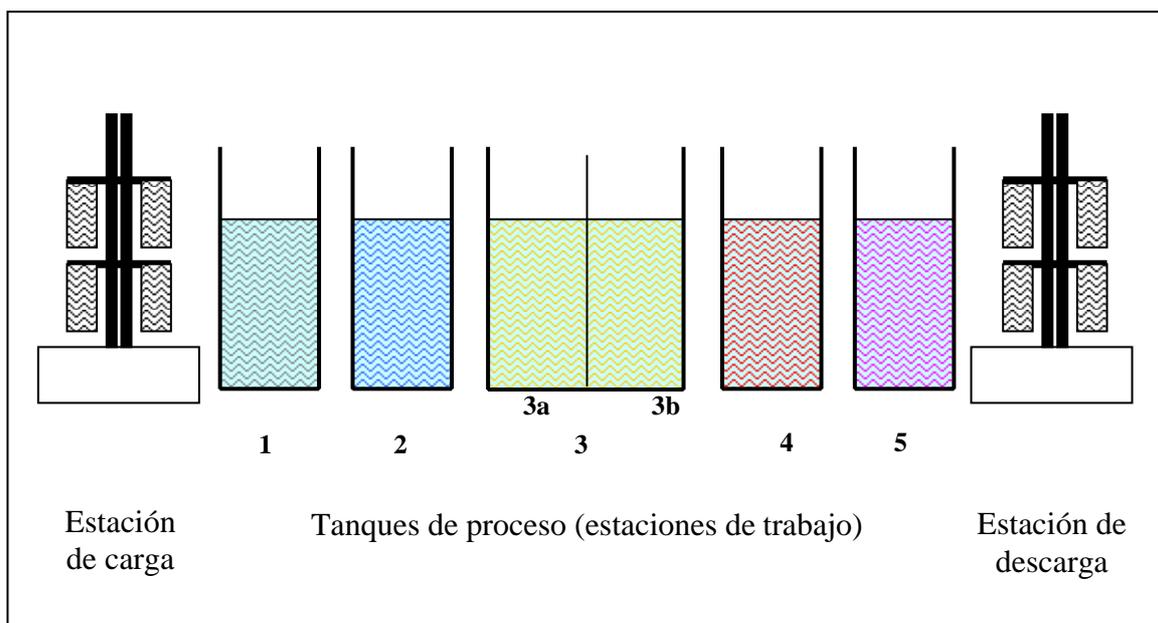


Figura 2.5. Ejemplo 1, con una línea de 5 tanques con el tanque 3 multi-baño (doble: 3a, 3b).

No obstante, a efectos de funcionamiento de la línea y de programación de la grúa, es mucho más fácil asignar dos tanques consecutivos a un único proceso (figura 2.6).

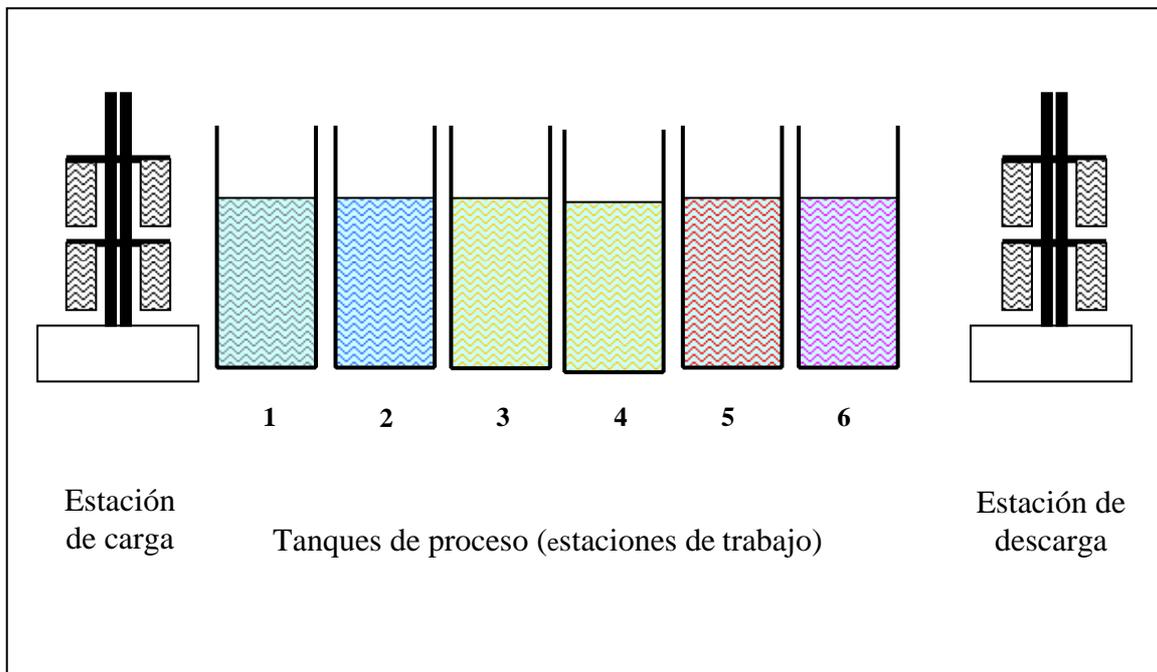


Figura 2.6. Ejemplo 1, con una línea de 6 tanques formando un tanque multi-baño (O3) los tanques 3 y 4.

2. Por otro lado, la segunda clasificación posible sobre los tanques que contienen las reacciones químicas se basa en el número de **tratamientos distintos** que puedan aplicarse **en dicho baño**. Este aspecto es habitual en las líneas productivas tratadas en operaciones como los lavados, que pueden ser necesarios después de aplicar un producto químico diferente sobre los objetos. Estas operaciones, a diferencia de lo comentado en la anterior subdivisión, no actúan como cuellos de botella del sistema productivo, sino más bien lo contrario. Así, puede optimizarse el número de baños, y por consiguiente minimizar la longitud de la línea de producción, mediante tanques multi-función. Esto comporta desarrollar diversas operaciones de corta duración, que no sean simultáneas, en un mismo baño. La introducción de tanques multi-función frente a los tanques mono-función implica la posibilidad que la grúa se desplace transportando objetos o contenedores entre distintas operaciones consecutivas en un sentido u otro, mientras que esto no sería necesario en el caso mono-función si los tanques estuvieran perfectamente ordenados según la secuencia de operaciones del proceso.

2.1. **Tanques mono-función:** Situación de una línea cuando todos los tanques del sistema sólo pueden realizar un tratamiento específico (u operación) sobre los objetos o contenedores.

2.2. **Tanques multi-función:** Situación de una línea cuando alguno de los tanques del sistema puede realizar más de un tratamiento específico (u operación) sobre los objetos o contenedores, tales que no sean consecutivos.

Ejemplo 2

Dado un proceso con 6 operaciones, a realizar en el orden indicado, de las cuales la segunda y quinta operaciones consisten en realizar una misma función, y cuyos tiempos mínimos y máximos de proceso son los siguientes:

Operación	O1	O2	O3	O4	O5	O6
Tiempo mínimo	70	20	80	125	20	60
Tiempo máximo	120	1000	100	150	1000	120

Tabla 2.2. Datos del ejemplo 2.

En la tabla 2.2 se observa que la segunda y la quinta operación tiene unos tiempos mínimo inferiores a los demás. En este caso, el tiempo máximo no es claramente limitativo.

Si se considera la posibilidad de una única operación por tanque, tanques mono-función, el sistema estaría formado por los 6 tanques siguientes. Se indica el recorrido de los objetos o contenedores a lo largo de su evolución en la línea.

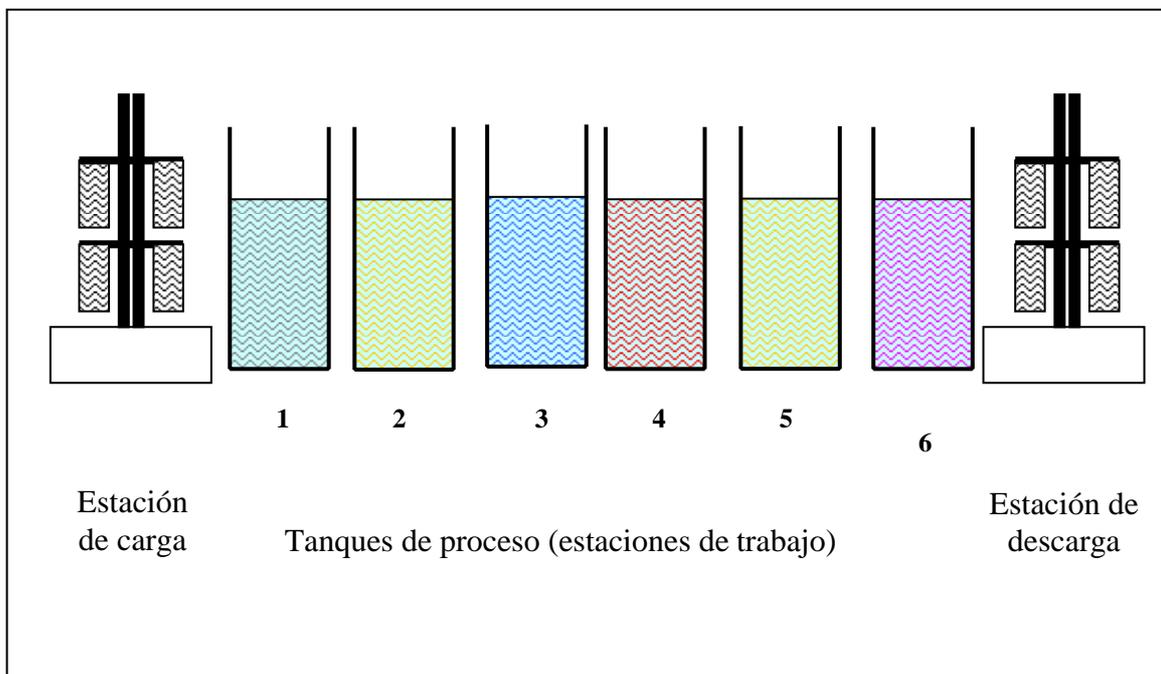


Figura 2.7. Ejemplo 2, con una línea de 6 tanques con tanques mono-función.

La definición de tanques multi-función permite pensar en una distribución de 5 tanques a lo largo de la línea. Así, se proponen dos soluciones tales que el tanque multi-función ocupe la posición de una o la otra operación afectadas, es decir, que el tanque multi-función sea el tanque 2 o el tanque 4. Nuevamente, se indica el recorrido de los objetos o contenedores a lo largo de la línea en ambos casos:

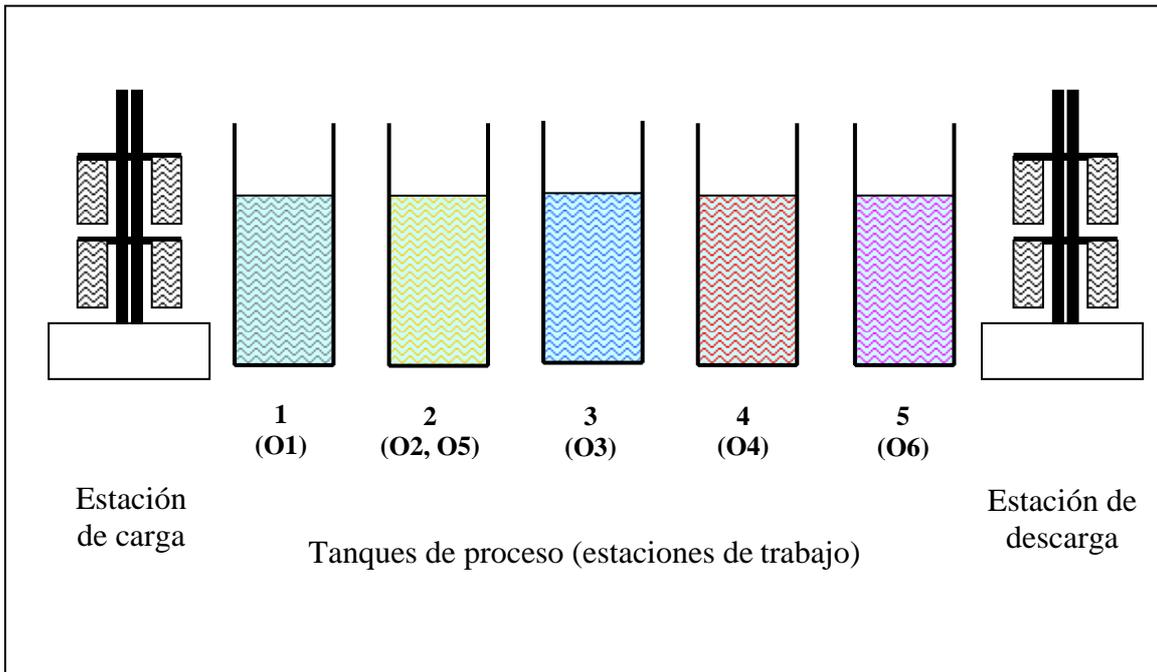


Figura 2.8. Ejemplo 2, con una línea de 5 tanques con el tanque 2 multi-función (operaciones O2 y O5).

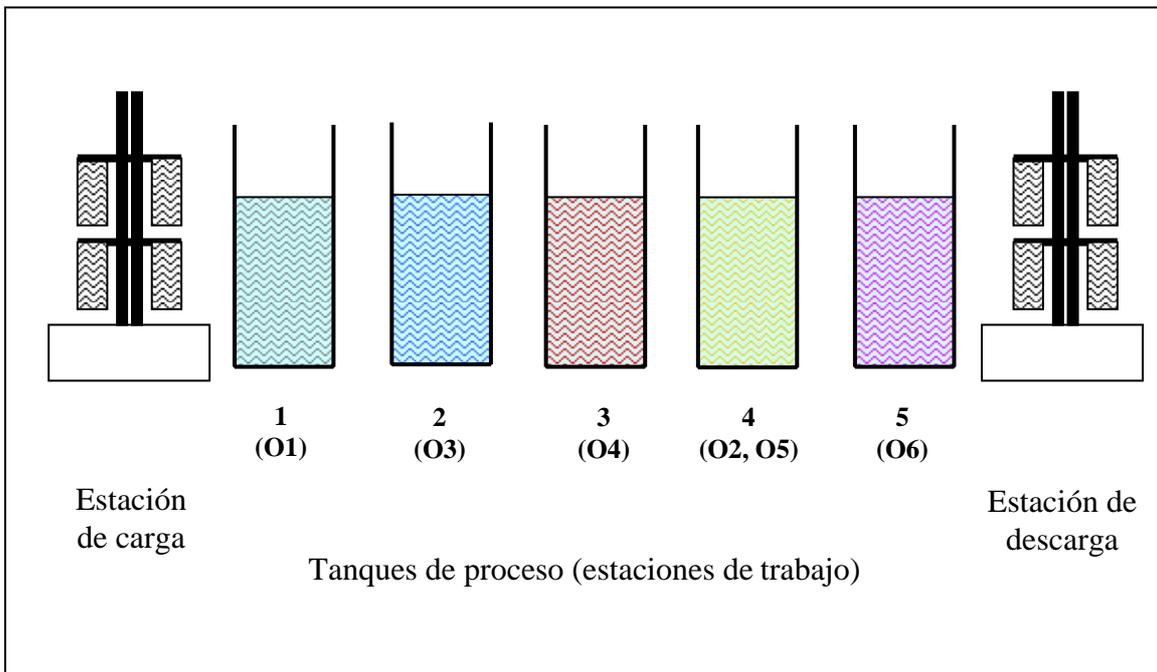


Figura 2.9. Ejemplo 2, con una línea de 5 tanques con el tanque 4 multi-función (operaciones O2 y O5).

2.3.2. Los objetos (o contenedores de objetos)

Por lo que respecta a las piezas, objetos o contenedores cuyas operaciones deben ser programadas en este proceso, puede tratarse de **objetos idénticos o diversos**, es decir, con unas necesidades de tiempo de proceso iguales o diferentes entre sí. En este último caso, se tratará de objetos heterogéneos, mientras que si se trata el caso de diferentes unidades de un único tipo de objeto se tratará de objetos homogéneos.

3.1. Objetos heterogéneos: Este tipo de objetos, al circular por la línea de producción presenta diferentes situaciones al programador de la grúa en función de las características temporales de cada uno. Se puede partir de un estado inicial del sistema vacío y finalizar cuando el último objeto o contenedor secuenciado abandona el sistema (caso estático) o secuenciar la entrada de los objetos y reprogramar los movimientos de material en la línea teniendo en cuenta las distintas particularidades (caso dinámico). Por lo tanto, en el caso estático el objetivo se basa en la minimización del instante de finalización de proceso del último objeto secuenciado en la última etapa, y en el caso dinámico en intentar la entrada y la salida de los diversos objetos lo más temprana posible.

3.2. Objetos homogéneos: Este tipo de objetos presenta una problemática que se repite periódicamente a medida que han de entrar nuevos objetos al sistema, y esto le imprime el carácter de programación cíclica. En este caso, el objetivo se centra en hallar una secuencia de operaciones en las diferentes etapas u operaciones, tal que pueda repetirse cíclicamente, es decir, se pretende minimizar el tiempo de ciclo.

Ejemplo 3

Dado un proceso con 5 operaciones, a realizar en el orden indicado, se dispone de tres variedades de producto diferentes, cada una de las cuales requiere para cada función unos tiempos de proceso comprendidos entre los valores mínimos y máximos siguientes:

Producto/ Operación		O1	O2	O3	O4	O5
P1	Tiempo mínimo	40	20	50	25	30
	Tiempo máximo	70	50	90	60	50
P2	Tiempo mínimo	30	50	60	40	40
	Tiempo máximo	60	90	100	60	80
P3	Tiempo mínimo	50	30	40	60	50
	Tiempo máximo	90	60	90	120	70

Tabla 2.3. Datos del ejemplo 3.

En caso de plantear la fabricación de todos los tipos de producto conjuntamente en una misma línea de producción, alternando unidades de las tres variantes, la situación corresponde a productos heterogéneos:

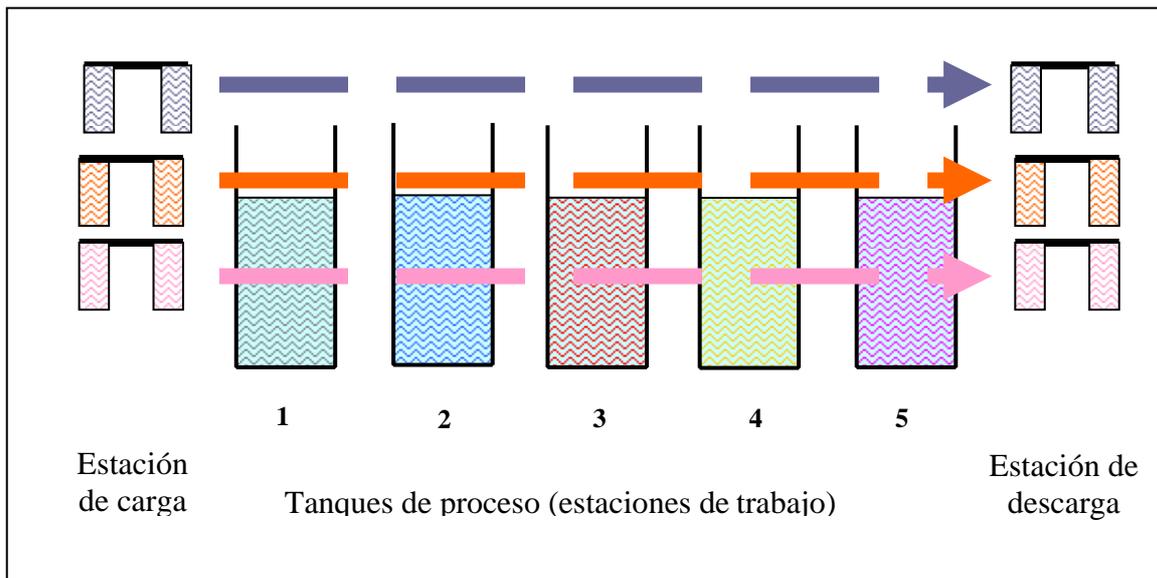


Figura 2.10. Ejemplo 3, con tres productos distintos circulando en una misma línea (objetos heterogéneos).

En caso de plantear la fabricación de cada uno de los tipos de producto por separado, son necesarias tres líneas de producción dedicadas a productos homogéneos:

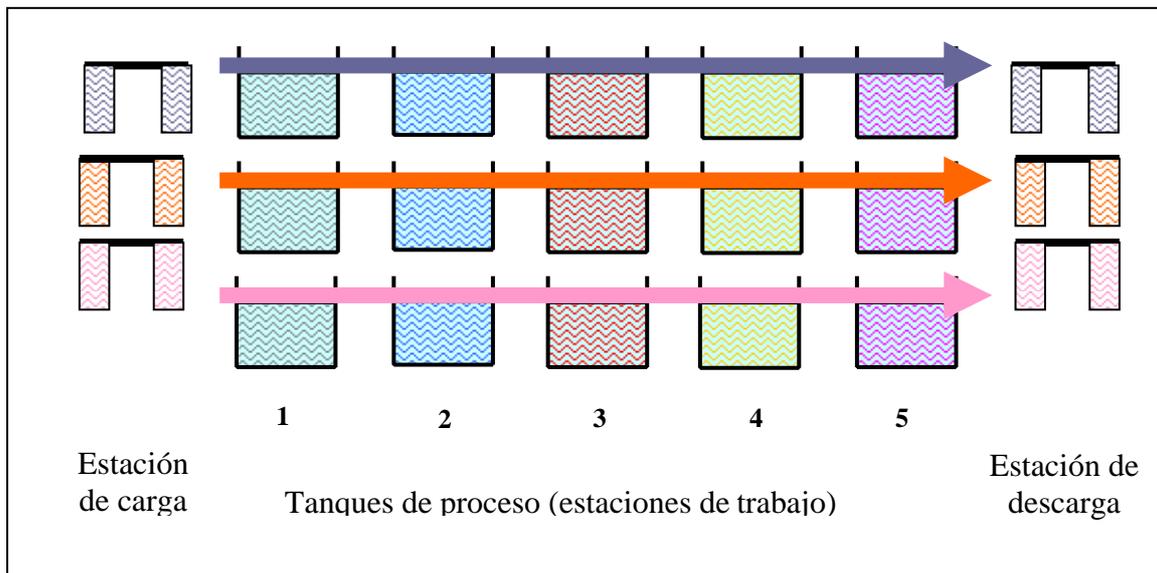


Figura 2.11. Ejemplo 3, con tres productos distintos en tres línea distintas o en tres períodos claramente diferenciados (objetos homogéneos).

2.3.3. Los elementos de automatización

Otro parámetro importante que debe ser considerado en un problema de programación de este tipo es el número de elementos de transporte (llamados **puentes-grúa**, **grúas flotantes** o simplemente **grúas**), con los cuales se efectúa el conjunto de operaciones necesarias de transporte de materiales a lo largo de la línea. En este texto, se ha optado más

frecuentemente por el uso de la palabra grúa, considerando que expresa las propiedades definidas más claramente en las demás acepciones. Así, para estos elementos de transporte se puede establecer básicamente la siguiente división.

4.1. **Una única grúa (mono-grúa)**, que utiliza un carril horizontal para desplazarse a menor altura cuando circula en vacío y a mayor altura cuando lo hace transportando un objeto o contenedor.

4.2. **Más de una grúa (multi-grúa)**, es decir, diversas grúas utilizan un único carril horizontal para desplazarse a menor altura cuando circula en vacío y a mayor altura cuando lo hace con carga, lo que exige, además de la consideración de los tiempos de ventanas temporales y de transporte, una coordinación de movimientos y posiciones simultáneas de las grúas.

Ejemplo 4

Dado un proceso con 8 operaciones, a realizar en el orden indicado, y cuyos tiempos mínimos y máximos de proceso son los siguientes:

Operación	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8
Tiempo mínimo	70	60	80	90	70	60	50	80
Tiempo máximo	120	100	100	150	100	120	90	100

Tabla 2.4. Datos del ejemplo 4.

A partir de los datos en la tabla 2.4 se puede plantear que el transporte de los objetos entre las diferentes operaciones lo realice una única grúa o diversas. Si se considera el uso de una única grúa en la línea, ésta debe ocuparse del sistema completo formado por los 8 tanques, lo cual se muestra en la figura 2.12.

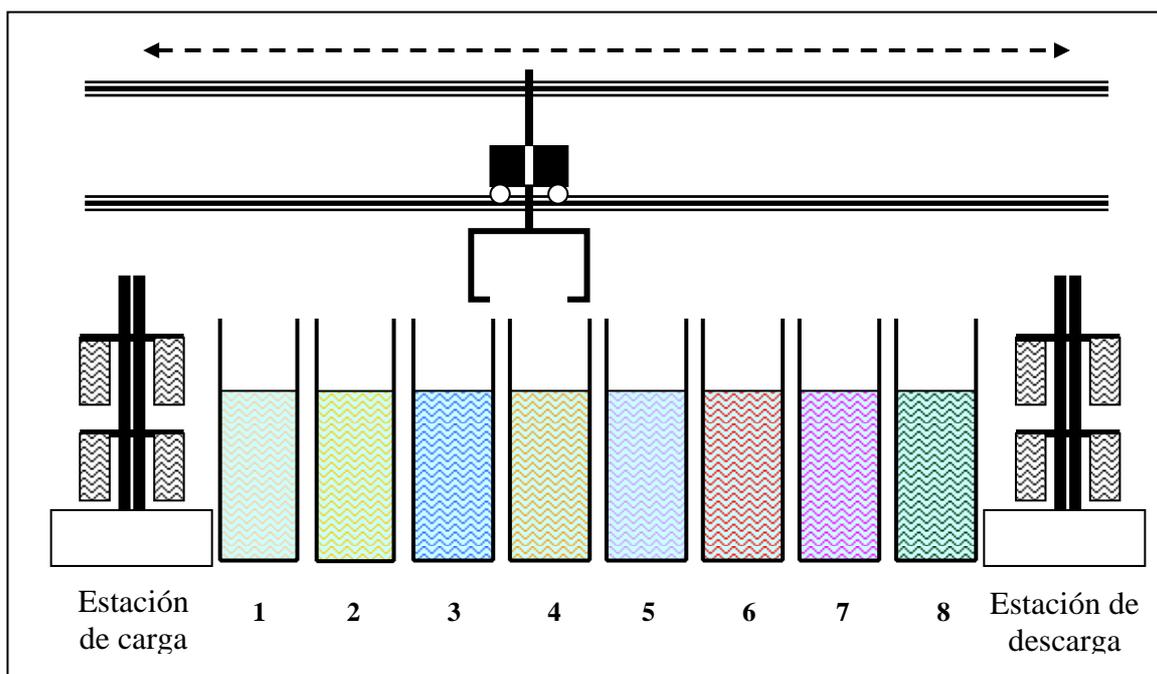


Figura 2.12. Ejemplo 4, con una grúa para las 9 operaciones de transporte (caso mono-grúa).

La posibilidad de usar más de una grúa obliga a una asignación de cada una a un conjunto de tanques. Si por ejemplo, se decide optar por dos grúas (figura 2.13), debe utilizarse un tanque como baño pivote, en el cual la grúa 1 deposita un objeto que recoge posteriormente la grúa 2. En este caso, a partir del análisis de los datos sobre tiempos mínimos y máximos de estancia de los objetos en los baños, se ha asigna el baño pivote al tanque 4 (ya que en él se alcanza la mitad de la suma de todos los tiempos mínimos y máximos).

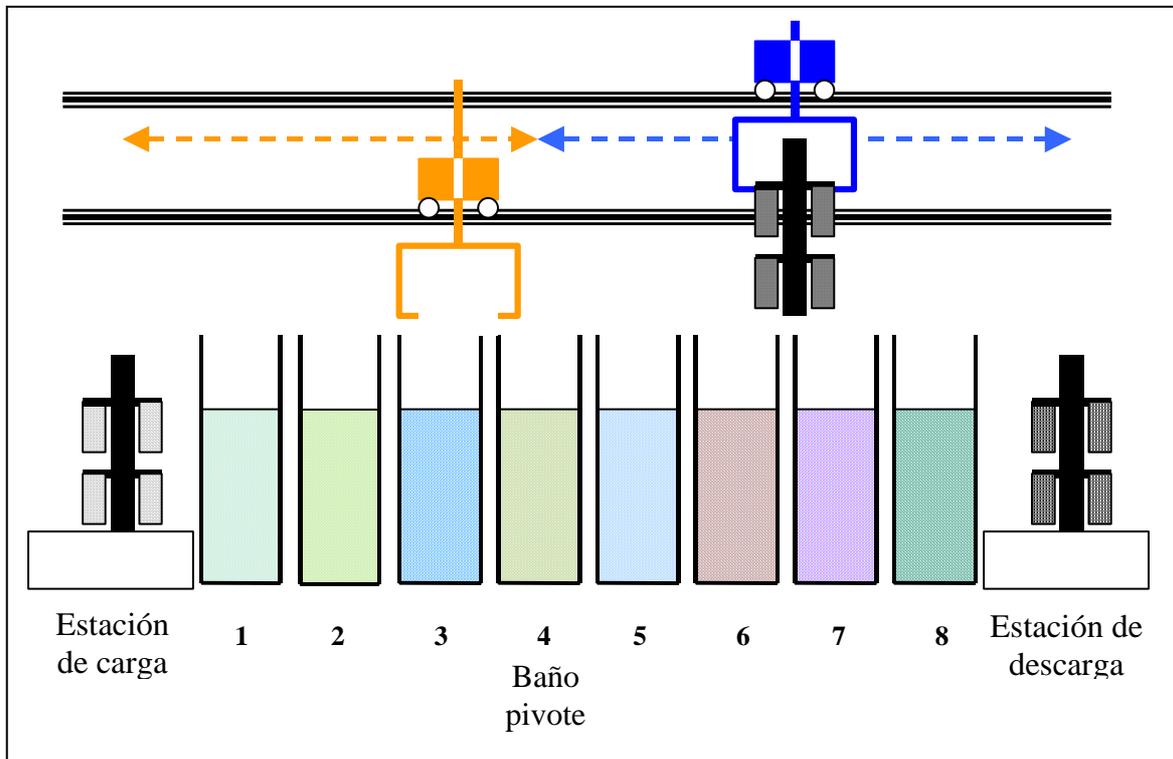


Figura 2.13. Ejemplo 4, con dos grúas que se reparten las 9 operaciones de transporte (caso multi-grúa).

2.3.4. La distribución en planta del sistema

Un último parámetro a considerar, que puede facilitar o mantener el grado de complejidad de las situaciones de este tipo de líneas, hace referencia a la distribución en planta (*layout*). Por un lado, es importante la disposición de los tanques en los cuales tienen lugar las diversas etapas del proceso, así como la posición de las estaciones o lugares de carga (entrada de los objetos al sistema) y descarga (salida de los objetos al sistema).

Así, en función de la disposición de los tanques donde se realizan dichas etapas, se pueden considerar básicamente de dos situaciones:

5.1. **Distribución uniforme:** Los tanques están dispuestos en fila y de manera equidistante entre tanques contiguos, con lo cual una grúa tarda el mismo tiempo en desplazarse en vacío o con carga entre cualquier pareja de tanques consecutivos.

5.2. **Distribución no uniforme:** Los tanques están dispuestos en fila, pero no de manera equidistante entre tanques contiguos, con lo cual una grúa puede tardar más o menos mismo tiempo en desplazarse en vacío o con carga entre cualquier pareja de tanques consecutivos.

Ejemplo 5

Dado un sistema con 5 operaciones, cada una de las cuales realizada en un baño, éstos pueden estar dispuestos uniformemente a lo largo de la línea (figura 2.14) o irregularmente (figura 2.15). Esta variación se refleja en los tiempos necesarios para el desplazamiento de las grúas.

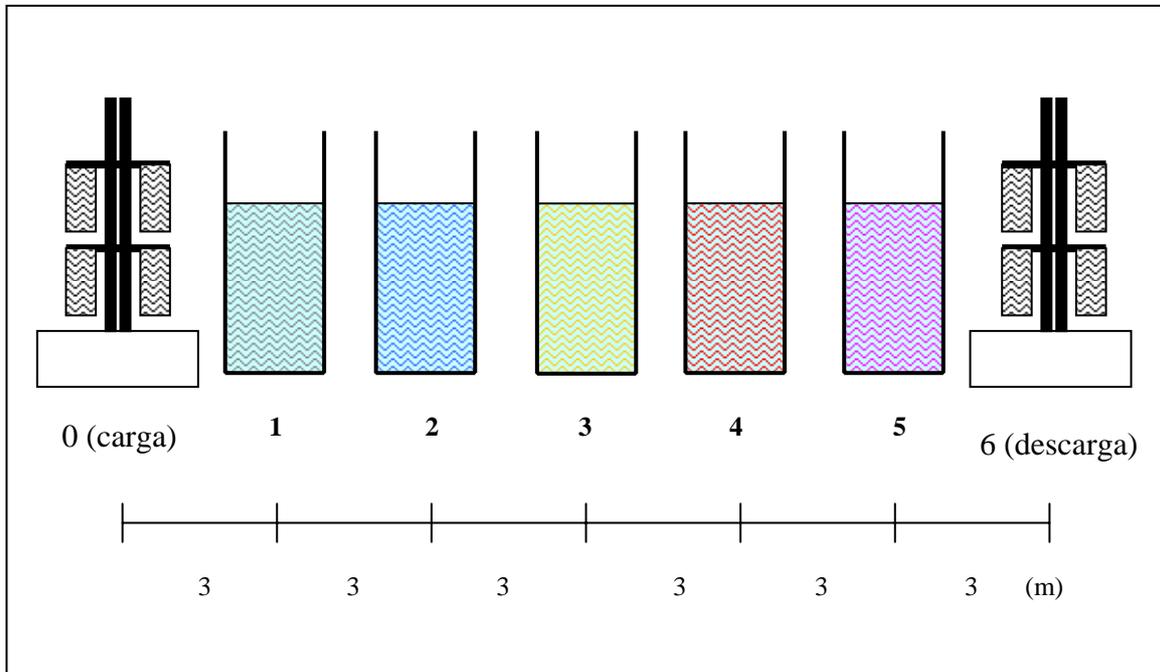


Figura 2.14. Ejemplo 5, con distribución uniforme entre los baños y las estaciones de carga y descarga (3 metros de distancia).

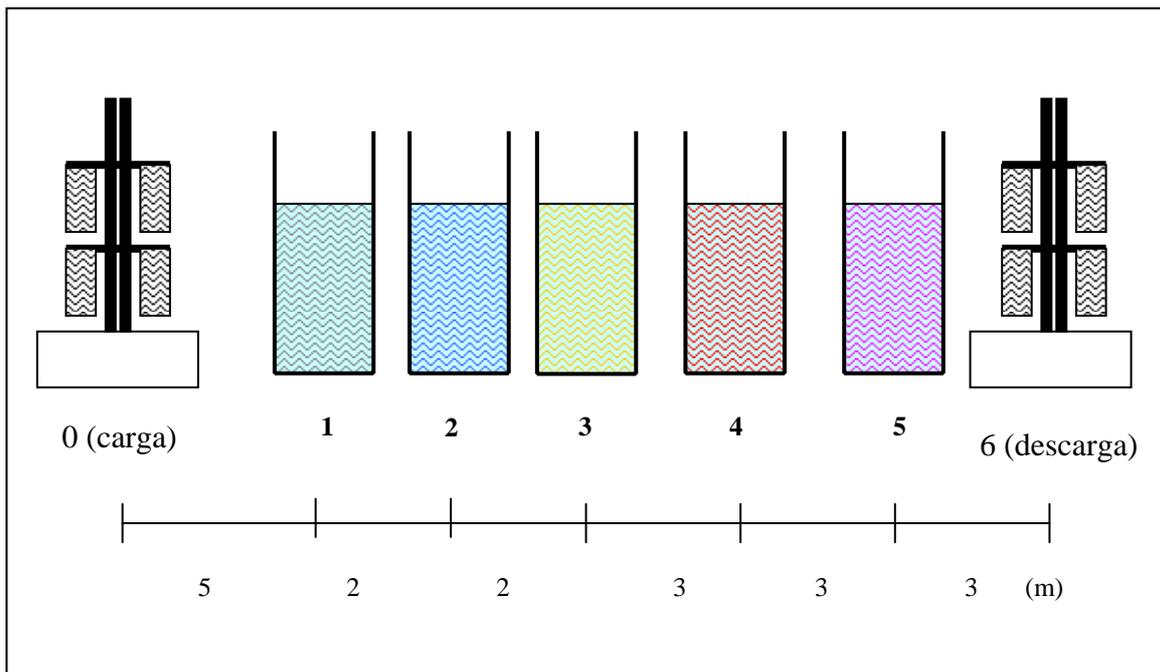


Figura 2.15. Ejemplo 5, con distribución no uniforme entre los baños y las estaciones de carga y descarga (2, 3 y 5 metros de distancia).

Mientras, en función de la posición de las estaciones donde se realizan las etapas de carga y descarga, se pueden considerar dos situaciones:

6.1. **Agrupación entrada-salida:** La estación de carga (operación 0) actúa también como estación de descarga (operación $m+1$). Cualquier movimiento de la grúa para tomar nuevos trabajos o dejar los ya finalizados tiene idéntica duración.

6.2. **Separación entrada-salida:** La estación de carga (operación 0) ocupa una posición diferente en la distribución de la línea de la estación de descarga (operación $m+1$).

Ejemplo 6

Para comparar ambas posibilidades, se muestra una línea de 5 tanques con agrupación de entrada y salida de objetos de la línea, en la estación 0 a la izquierda de la línea (figura 2.16), y con ambas operaciones separadas, entrada en la estación 0 a la izquierda de la línea y salida en la estación 6 a la derecha de la línea (figura 2.17).

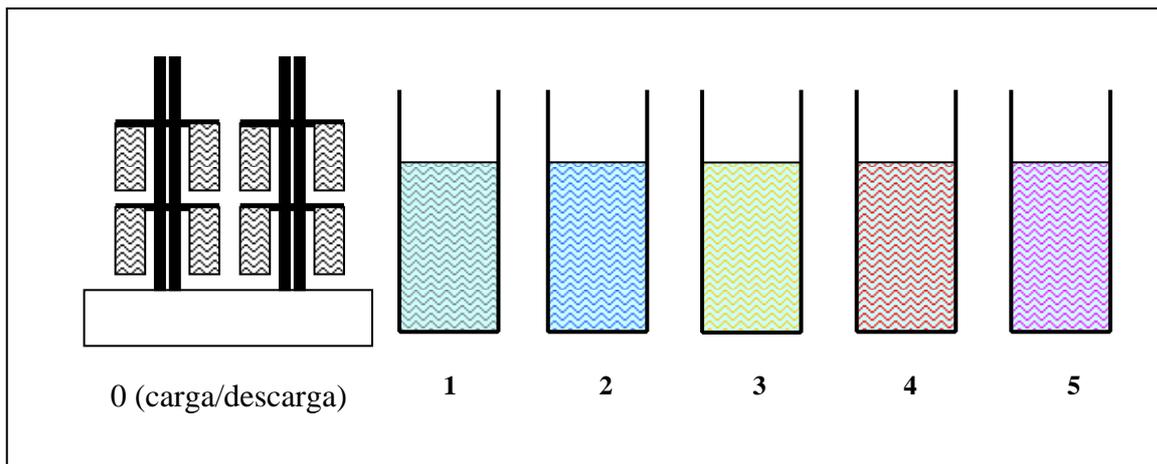


Figura 2.16. Ejemplo 6, con agrupación de entrada-salida en una línea de 5 tanques.

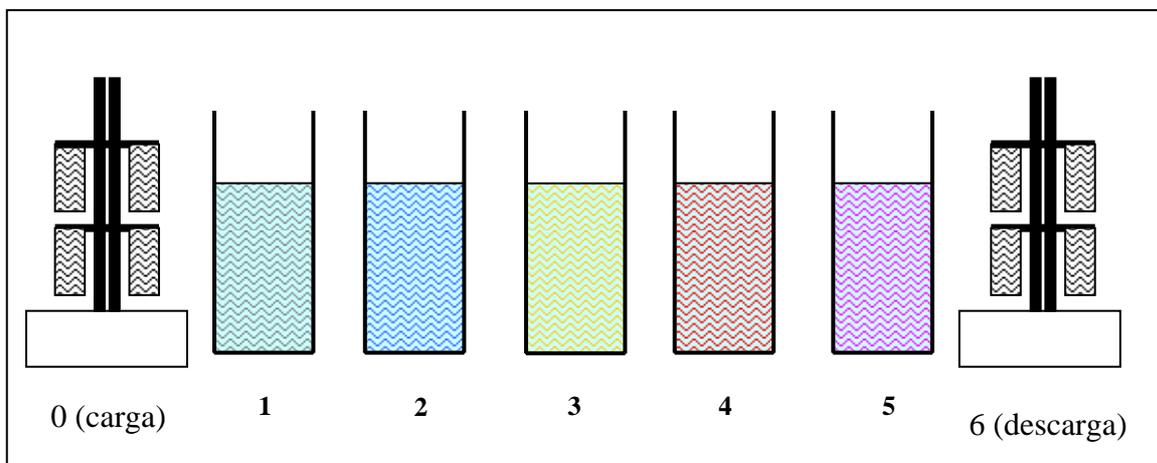


Figura 2.17. Ejemplo 6, con separación de entrada (estación 0)-salida (estación 6) en una línea de 5 tanques.

2.3.5. Resumen y notación

A partir de las subdivisiones definidas en los apartados precedentes, se puede esquematizar la clasificación de una instancia de problema tal como se muestra en la tabla 2.5.

Elemento	Característica	Valores	Notación
Tanques	Baños por operación	Mono-baño	1B
		Multi-baño	+B
	Operaciones por baño	Mono-función	1F
		Multi-función	+F
Objetos	Tipos de objetos	Objetos homogéneos	1
		Objetos heterogéneos	n
Elementos automatizados	Número de grúas	Una grúa	1
		Más de una grúa	p
Disposición física	<i>Layout</i> operaciones	Distribución uniforme	U
		Distribución no uniforme	V
	Carga respecto descarga	Agrupación carga-descarga	∩
		Separación carga-descarga	∪

Tabla 2.5. Clasificación de los problemas.

Para simplificar al tratar los modelos a las diferentes situaciones posibles se propone la siguiente notación: [baños / objetos / grúa / *layout*] formado por 6 valores:

$$[a,b /c/d/e,f]$$

Así, por ejemplo, el problema básico más considerado en la literatura tomaría una de las cuatro siguientes notaciones, en función de la disposición de los baños:

$$\begin{aligned}
 &1B,1F/1/1/U,\cup \\
 &1B,1F/1/1/U,\cap \\
 &1B,1F/1/1/V,\cup \\
 &1B,1F/1/1/V,\cap
 \end{aligned}$$

2.4. Estado del arte del Problema de Programación del Puente-grúa

El problema de programación de grúas (*Hoist Scheduling Problem*) se puede encuadrar como un problema de programación situado entre los problemas de *flow-shop* o de *job-shop* (según la disposición de los tanques que realizan cada una de las operaciones) y los problemas de una sola máquina (en caso de disponer de una única grúa para diversas tareas).

Los trabajos realizados sobre el tema, la mayoría de los cuales intentarán quedar reflejados en la siguiente presentación, se basan en estudios del caso mono-grúa, mono-producto y con unos recipientes mono-baño y mono-función (1B,1F/1/1/-,-).

A continuación, y tomando como referencia la clasificación de dichos artículos presentada por **Manier y Baptiste** (1994), se observa como el problema puede afrontarse desde dos grandes aproximaciones o puntos de vista, complementarios entre sí:

- Por un lado, una **aproximación estática o planificativa**, buscando una secuencia óptima de programación de los movimientos de la grúa, suponiendo que el sistema sufre escasas interrupciones imprevistas.
- Por otro lado, una **aproximación dinámica o resolutive**, que controla la grúa mediante reglas heurísticas para determinar las fechas de entrada de los productos, o lotes de productos, y establecer el orden de movimientos.

2.4.1. Aproximación estática o planificativa

Phillips y Unger (1976) son los primeros investigadores en presentar un modelo sobre este problema. Dicho modelo sirve para una sola grúa, con baños mono-producto más un baño ficticio de carga y descarga, es decir, el fin de los tratamientos sobre los objetos se produce en el baño 0. La solución óptima se encuentra a partir de ordenar las fechas de ejecución de las operaciones de transporte de la grúa a lo largo de un ciclo, una vez utilizada la Programación Lineal Entera Mixta.

Para poder obtener una formulación matemática del problema tratado, se han planteado las siguientes dos hipótesis como básicas:

- la duración de la inmersión de un objeto o contenedor en un baño será idéntica para todas las unidades iguales de producto,
- la solución buscada será periódica, con tiempo de ciclo o período T , del cual debe buscarse un valor mínimo.

El modelo, que se comenta en el apartado 3.1.1, permite hallar una solución para casos de 8 a 13 baños en corto espacio de tiempo, pero no obstante presenta algunas inconcreciones. Finalmente, los autores proponen una extensión del problema al caso de los baños multi-función.

Lieberman y Turksen (1981) introducen un conjunto de algoritmos en una variante relajada del problema que nos ocupa. Se trata de programar las acciones de grúas con la restricción de compartir una vía común, pero con dos particularidades frente al caso HSP: los movimientos de las grúas se consideran instantáneos y los objetos pueden permanecer en espera de ser transportados un tiempo ilimitado. Tanto el problema general como los tres problemas con hipótesis adicionales son NP-completos, y se basan en el número de grúas, de localizaciones y de objetos disponibles para determinar los tiempos de comienzo de los trabajos y los tiempos de proceso de cada operación. Una secuencia es factible si no se producen interferencias entre grúas y si el trabajo entra en el sistema con suficiente antelación. El criterio es minimizar el tiempo para completar todos los trabajos. En **Lieberman y Turksen (1982)** se amplía el estudio al caso de problemas de programación de dos grúas con procedimientos de lotificación y concordancia planteados sobre una red en un digrafo.

Bracker y Chapman (1985) realizan una comunicación de carácter menos técnico. La resolución se basa en una enumeración exhaustiva de todas las configuraciones posibles, acompañadas de una optimización mediante un algoritmo de programación lineal tipo “simplex” para configuraciones factibles. Si se considera como configuración una lista de movimientos de la grúa, sin el cálculo de duraciones exactas, dicho “simplex” permite hallar tales duraciones fijando un tiempo de ciclo óptimo.

Shapiro y Nuttle (1988) toman el problema planteado por Phillips y Unger (1976), excepto considerar separados los lugares de entrada (baño 0) y de salida (baño $m+1$) de objetos en el sistema de baños. El modelo, que se comenta en el apartado 3.1.2, se basa en la utilización de vectores para definir el orden de ejecución de las operaciones y evita la ocupación simultánea de un baño por dos objetos. Los autores proponen algunas definiciones novedosas:

- un n -ciclo es un ciclo en el cual se introducen n objetos en el sistema,
- un tiempo de ciclo (u *offset*) es el tiempo entre la entrada de dos objetos consecutivos en la línea de baños y su notación depende del tiempo de ciclo, tiempos de remoyo y número de objetos presentes en la línea simultáneamente,
- el problema de programación de la grúa se define como la búsqueda de un ciclo factible de movimientos de grúa.

El algoritmo propone un procedimiento de *branch and bound*, donde un nivel j del árbol está formado por todos los órdenes parciales de movimientos considerando las operaciones de los j primeros tanques. La programación lineal permite hallar el mínimo tiempo de ciclo asociado a cada solución parcial.

Este algoritmo está planteado para hallar el tiempo mínimo de ciclo en un caso mono-grúa y puede ser aplicado en baños de del tipo mono-baño y multi-baño. Se puede generalizar el mismo a determinar los n -ciclos, aunque los autores confirman que la programación se endurece notablemente. En cambio, no se considera el caso de más de una grúa como extensión del modelo.

Lei y Wang (1989a) muestran que el problema de programación cíclica de una grúa es NP-completo. Durante su exposición, plantean el problema con los lugares de carga y descarga de los objetos separados.

En **Lei y Wang (1989b)** proponen un método de resolución para hallar n -ciclos periódicos, lo que supone la entrada de n objetos en el sistema durante un ciclo y la salida de exactamente n objetos del mismo. El tiempo de ciclo, entonces tiempo medio entre la salida de dos objetos del sistema, es el cociente entre el período T y el valor n .

Lei y Wang establecen una programación que cumpla ciertas condiciones:

- dos objetos sucesivos no pueden ocupar un baño al mismo tiempo,
- en cada baño, los objetos se tratan en el orden de entrada en la línea (por lo tanto, no se pueden producir adelantamientos),
- los objetos se tratan según los índices de los baños.

Se utiliza el concepto de ventana temporal de transporte de un objeto, siendo el intervalo de tiempo en el cual la grúa debe retirar a un objeto de un baño, para reducir la anchura de dichas ventanas progresivamente, para lo cual se propone un algoritmo de *branch and bound*. El árbol de búsqueda de la solución enumera sistemáticamente todas aquellas secuencias que satisfagan las tres condiciones detalladas y en cada nodo de un nivel, se escoge la siguiente operación entre las disponibles.

Lei y Wang desarrollan una extensión de su modelo para el caso de baños de múltiples compartimentos, mediante la modificación de una de las reglas de evaluación de las operaciones candidatas. Para el caso con carga y descarga en un mismo sitio, se modifica tan sólo la matriz de los tiempos de desplazamiento de la grúa, a diferencia del planteo de Shapiro y Nuttle.

Los autores sugieren el caso de múltiples grúas como posible extensión. Según su estimación, el tiempo de resolución del problema de período 2 con una sola grúa debería ser equivalente al de período 1 con dos grúas. Dicho caso se estudia por los mismos autores en **Lei y Wang (1991)**, mediante el cálculo de un ciclo simple utilizando dos grúas en una misma línea bajo la mayoría de las hipótesis de Phillips y Unger (1976), con tiempo nulo de carga de los objetos y con carga y descarga en lugares distintos.

Como se ampliará en el apartado 3.2.1, se propone el algoritmo heurístico del mínimo ciclo común, o MCC (*Minimum Common Cycle*), para reducir el número de posibles secuencias a $O(m \cdot (m-1)!)$. Se divide la línea de baños en dos zonas y se trata de manera independiente el problema mono-grúa en cada una. Posteriormente, tomando como cota inferior del tiempo de ciclo el máximo de los dos períodos en la partición dada, los instantes de inicio de los movimientos de las dos grúas se sincronizan para respetar las restricciones de ventana en el “baño pivote”. Se plantea la posible extensión del modelo al caso de más de dos grúas.

Matsuo, Shang y Sullivan (1991) analizan el problema de programación de una grúa y de la distribución en planta de una máquinas en un entorno flexible. En este caso, una única grúa se debe programar para mover la obra en curso del sistema, maximizando la tasa de producción. Así, se formaliza el problema, y de manera analítica y empírica se muestra como la programación cíclica facilita una solución casi óptima, superior a la utilización de reglas de programación (*dispatching rules*). Para un entorno simple, se ilustra las propiedades de la programación cíclica que conduce a un óptimo.

Por el contrario, para problemas multi-producto, dada una secuencia hallar el tiempo de ciclo mínimo equivale al máximo coste en un problema de flujo en una red circular en un grafo. Finalmente, se presenta un procedimiento heurístico que secuencia tipos de producto en un ciclo para minimizar aproximadamente el tiempo de ciclo.

Baptiste, Legnard y Varnier (1992) introducen una nueva técnica de resolución para el problema HSP, la Programación Lógica con Restricciones (conocida como CLP, de las siglas *Constraint Logic Programming*). El modelo se programó en un paquete que utilizaba PROLOG. El nuevo procedimiento consigue aportar soluciones óptimas con una estructura muy simple del algoritmo y consigue alcanzar las eficiencias de las demás técnicas ya utilizadas. Los autores aseguran que es fácilmente modificable.

El procedimiento se probó para obtener un programa cíclico para más de una grúa, donde se añaden restricciones para evitar colisiones entre ellas. No obstante, lo más interesante de la implantación del modelo es la observación de la estructura de las soluciones. Se plantean como prolongaciones el análisis del conjunto de soluciones para mejorar las heurísticas, el uso dinámico del conjunto de soluciones, o bien la generalización del caso con más de una grúa, publicado por Varnier, Bachelu y Baptiste (1997).

Baptiste et al. (1993) amplían el artículo Baptiste, Legnard y Varnier (1992) comparando dentro de la Programación Lógica con Restricciones la utilización de valores racionales (PROLOG) frente a los dominios finitos (CHIP). Allí se demuestra que la naturaleza de las técnicas (de consistencia parcial o completa) importa más que los dominios sobre las variables. Con CHIP la consistencia de la solución es parcial, lo que implica que no puede asegurarse que el programa obtenido sea ciertamente factible. Mientras, al comprobarse la consistencia en PROLOG, se puede asegurar que como mínimo existe una solución factible. Así pues, se recomienda destinar el tiempo a la consistencia antes que a una enumeración no fructífera.

La resolución sigue el mismo procedimiento de *branch and bound* descrito en Baptiste, Legnard y Varnier (1992), donde en cada nodo se plantea la disyuntiva de elegir un orden sobre parejas de operaciones de transporte. El número de niveles está limitado por el número de disyuntivas, lo que conlleva a lo sumo 2^n hojas, si bien las infactibilidades pueden reducir este número. Se propone la extensión al caso n-periódico y al caso de p grúas siguiendo el razonamiento de la partición de la línea en p problemas mono-grúa. En este último caso, se identifican diez casos de posibles colisiones, para los cuales se definen reglas de programación que las eviten.

Armstrong, Lei y Gu (1994) proponen un algoritmo para hallar la solución óptima al caso cíclico de período 1 con los lugares de carga y descarga separados. Para evaluar una secuencia cíclica de movimientos, y considerarla realizable, el programa lineal asociado a dicha secuencia debe tener una solución factible. Se plantea un modelo *branch and bound*, aunque, a diferencia de Shapiro y Nuttle, no debe resolverse un problema de programación lineal en cada nodo explorado. En este caso, se utiliza un parámetro llamado MTS (*Minimum Time Span*), que permite definir una cota inferior para el tiempo de ciclo, y así eliminar secuencias parciales infactibles.

En cada nodo del árbol de búsqueda, la resolución de un programa lineal se ha sustituido por un conjunto de operaciones algebraicas sobre el parámetro MTS, basadas en varios lemas y teoremas planteados. Finalmente, cuando se ha generado una secuencia completa,

se determina la solución óptima para dicha secuencia, hallándose dicho período mínimo mediante programación lineal. Se plantea la extensión de dicho procedimiento al caso multi-grúa, con restricciones que eviten las colisiones y a la determinación del número mínimo de grúas para una secuencia cíclica de período fijado.

Yih (1994) propone un algoritmo para líneas de producción de placas de circuitos con los tiempos de operación deben encontrarse entre un rango específico (duración mínima y duración máxima), para cada uno de los diferentes tipos de producto. Además, cada producto diferente puede recorrer una ruta propia. El objetivo de maximizar la producción de unidades sin defectos busca minimizar el tiempo de realización de todas las operaciones. El algoritmo realiza una programación de piezas basada en los tiempos mínimos de proceso y finalmente, analizando las incompatibilidades entre la realización de la grúa por limitación de dicho recurso, programa las tareas en el sistema de acuerdo con el rango específico de duración de las operaciones.

Chen, Chu y Proth (1995) presentan un algoritmo *branch and bound* para hallar el tiempo de ciclo mínimo en un caso cíclico, utilizando propiedades sobre el modelo, que permitan eliminar soluciones infactibles. Así, dadas las particularidades del modelo de estos problemas, los tiempos de ciclo se evalúan en grafos llamados bi-evaluados. El modelo se basa en las hipótesis planteadas en Phillips y Unger (1976). Los mismos autores **Chen, Chu y Proth (1998)** plantean nuevamente su visión del problema aportando detalles gráficos del procedimiento de *branch and bound* y demostraciones sobre la correcta utilización del algoritmo de Ford adaptado.

Cheng y Smith (1995) prueban en la variante del problema planteada por Yih (1994), con múltiples productos y diferentes rutas para cada producto, para lo cual utilizan el modelo de programación PCP (*Precedence Constraint Posting*), un tipo de red general de restricciones temporales. En este modelo, las restricciones pueden ser cualitativas o cuantitativas.

Varnier, Grunder y Baptiste (1995) plantean la influencia de la distribución de los tanques (*layout*) en la productividad de una línea de estas características. Así pues, debe combinarse la búsqueda de un ciclo de programación óptimo con la asignación óptima de cada baño a una reacción química que responda a las operaciones químicas necesarias. Siguiendo el esquema del artículo de Baptiste, Legnard y Varnier (1992), se aplica un procedimiento *branch and bound* bastante eficiente para hallar el layout de una línea con única grúa y única estación de carga y descarga, que utiliza Programación Lógica con Restricciones.

En diseño de líneas sólo consideran como parámetros las restricciones químicas (de ventanas temporales) y las restricciones de desplazamiento de grúa pasan a ser variables, pues sus tiempos dependen de los tanques a visitar y de su posición. La conjugación de las restricciones de ventana con la distribución física de tanques obliga a los autores a utilizar métodos para afrontar el problema, variantes de anteriores procedimientos arborescentes. A partir de un posible *layout* (escogido entre una enumeración de posibles a priori), y sus respectivas cotas para el tiempo de ciclo, se establece una programación. El orden de las operaciones a realizar sobre los objetos permite reducir ampliamente el número de distribuciones inicialmente posibles.

Song, Storch y Zabinsky (1995) utilizan un procedimiento heurístico, para programar una línea de proceso químico, con un único transportador, y también analizar los parámetros de diseño de dicha línea con el objetivo de maximizar la producción de un solo tipo de producto, evitando unidades defectuosas que no cumplieran con las ventanas temporales en los respectivos baños. El proceso de programación que proponen consta de seis pasos (en los cuales se aplican hasta diez reglas de programación). El primer paso consiste en determinar el mínimo incremento de tiempo entre dos unidades consecutivas. El segundo determina los valores de cotas inferior y superior para el tiempo de inicio de cada tarea en su tanque correspondiente. El tercero y cuarto pasos determinan tanto el rango de búsqueda de la solución según las reglas heurísticas como la precisión para nuevas búsquedas en el campo de soluciones factibles. Finalmente, en el quinto se establecen las rutas de los transportadores y en el sexto se identifica y se muestra la solución óptima o mejor de las halladas.

Ng (1996) plantea la posibilidad que los tiempos de movimiento con carga entre tanques no sean constantes, sino nuevas variables en un programa lineal entero mixto. Se puede producir una parada de la grúa después del escurrido. No obstante, la duración de los demás movimientos de la grúa (levantar contenedores, de bajarlos y de escurrido) continúan siendo parámetros del problema. Se desarrolla un procedimiento del tipo *branch and bound* para hallar el óptimo. La ramificación parte del número de contenedores y sus posiciones al inicio del ciclo, para establecer posibles secuencias de movimientos entre tanques. Para cada nodo, se plantea un programa lineal.

Ng demuestra como el número óptimo de contenedores que pueden estar simultáneamente en la línea está acotado y cuáles son los tanques que debe visitar un contenedor durante un ciclo, dado el número de contenedores en una línea. Además, se plantea el cálculo de tres cotas inferiores y una cota superior para el tiempo de ciclo óptimo.

Varnier, Bachelu y Baptiste (1997) tratan la programación de los movimientos cíclicos en una línea con múltiples grúas. Se detalla una clasificación de los problemas con múltiples grúa, que depende del nivel de complejidad que tengan: con zonas de asignación disyuntivas, cuando las grúas comparten parte de la línea y cuando, además, se optimiza el número de grúas en la línea. En el artículo de Lei y Wang (1991) trataba ya la primera categoría; en éste, se analiza la resolución de problemas correspondientes a la segunda. El problema de asignación de operaciones a grúas se realiza mediante reglas heurísticas, y mediante programación con restricciones se halla el programa cíclico óptimo para dicha asignación. Se trata de resolver problemas lo más reales posibles, pues en una línea productiva algunos tanques se dedican a más de una operación (tanques multifunción) y además la entrada y salida de objetos a la línea se produce en un mismo lugar. A diferencia del planteo de Lei, con un flujo unidireccional de contenedores y un solo tanque común a las zonas de dos grúas, ahora el flujo de contenedores es bidireccional y varios tanques pueden situarse en las zonas de solape de dos grúas. Las reglas aplicadas en este artículo tienen como base la tesis doctoral de **Varnier (1995)**, titulada “Extensiones del *Hoist Scheduling Problem* cíclico: resolución basada en el tratamiento de restricciones disyuntivas en Programación Lógica con Restricciones”.

Collart y Denat (1998) demuestra la posibilidad de formular el problema usando las redes de Petri P-tiempo, utilidad gráfica que se ajusta a las características que afrontan un cierto tipo de industrias como las de líneas de recubrimientos. Como principal aspecto positivo de estas técnicas se destaca la consistencia planteada en la combinación de restricciones.

Dengiz y Akbay (2000) plantean dos modelos de simulación para investigar los efectos de las técnicas de aprovisionamiento de materiales en una línea de fabricación de PCBs. Este artículo, si bien no directamente relacionado con la visión planteada del tipo de sistema productivo tratado, muestra la alternativa tecnológica de la fabricación en una línea de montaje que prescinde de transportadores o grúas, frente a la más extendida hasta este momento para fabricar los productos electrónicos citados.

Finalmente, cabe citar las aportaciones elaboradas durante estos últimos años en la misma Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona, a través de los proyectos finales de carrera realizados y de los documentos de investigación publicados.

Fernández (1995) introduce la resolución mediante grafo, técnica en aquellos momentos novedosa, para el caso mono-baño, mono-función, una sola grúa y objetos homogéneos.

Nasarre (1996), partiendo de la experiencia anterior, aplica la resolución mediante grafo al caso mono-baño, mono-función, una sola grúa y objetos heterogéneos.

Baena, Bautista y Mateo (1998) proponen la aplicación de técnicas de exploración de entornos en el caso de determinación de secuencia de movimientos en líneas con objetos homogéneos y, por tanto, en la búsqueda de una programación cíclica. **Leal, Bautista y Mateo (1998)**, por otro lado, perfeccionan la resolución mediante grafo para dicho caso.

Mur (1999) propone un procedimiento heurístico para el caso de objetos heterogéneos con la posibilidad de diferentes rutas de los productos, partiendo de las indicaciones de Yih (1994).

Aranda y Serra (1999) aplican técnicas de exploración de entornos a la búsqueda del programa óptimo de temporización de operaciones en el caso de objetos heterogéneos, con una sola grúa en el caso de estaciones mono-baño y mono-función.

Larrubia y Mengual (2000) proponen un procedimiento heurístico, basado en la resolución mediante grafos planteada por Fernández (1995), para la resolución del caso de más de más de una grúa en un sistema con objetos homogéneos y tanques mono-baño y mono-función. Así, se establecen comparativas que permiten indicar cuándo es conveniente instalar una o más grúas.

2.4.2. Aproximación dinámica o resolutive

Desde este punto de vista, la grúa se controla mediante reglas heurísticas que determinan las fechas de entrada de los sucesivos productos, o lotes de productos, y con ellas se establece el orden de movimientos de las grúas. En la década de los ochenta, cuatro aplicaciones en industrias francesas utilizaron versiones adaptadas de estas reglas a sus condiciones particulares, aunque ninguna basada en modelos teóricos muy precisos. Su objetivo principal es obtener un alto nivel de productividad y también que los productos fabricados en sus cadenas de producción tengan la mayor calidad posible (cumpliendo las condiciones de ventanas temporales en los baños).

Derid (1978) explica su experiencia en la empresa CITEC, con dos cadenas de electrólisis automáticas y con grúas programables para un cierto número de operaciones.

Gross et al. (1981) relatan su experiencia al diseñar para la empresa Sarel una cadena automática flexible de múltiples grúas, en que se permite tratar hasta 19 contenedores por hora, oscilando el tiempo de tratamiento global entre una y dos horas. En este caso, las grúas son independientes entre sí y están destinadas a diferentes zonas prefijadas.

Cannard (1988) describe la aplicación de Focal Informatique para Frappaz Imasa, donde las líneas de baños cuentan con diversas grúas pilotadas por autómatas programables, que actúan sobre cubetas del tipo multi-baño y mono-función.

Ricci y Brousson (1989) cuentan su experiencia en Sleti el Delta Electronique, en donde una cadena de producción contiene cuatro líneas, 100 cubetas, 6 grúas y 3 puestos de transferencia, para la cual debe determinarse una secuencia a corto plazo que incluya un lote de productos a tratar.

Thesen y Lei (1990) realizaron un sistema experto de secuenciación para aplicaciones multi-producto y multi-grúas, para hallar la secuencia de movimientos de una grúa en un entorno cambiante. Para ello, previamente deben realizarse simulaciones que identifiquen buenas reglas en la toma de decisiones, en función del estado del sistema, y construir una base del conocimiento. La efectividad de las reglas propuestas fue comprobada en un contexto real bajo cambios de fabricación y averías, lo que supuso un incremento de productividad en cerca de un 10%.

El problema tratado se basa en la demanda de n diferentes tipos de productos, que llegan en lotes, cuya demanda puede variar y cada uno de los cuales sigue una ruta establecida. La línea se compone de m tanques donde no se permiten esperas del material entre dos tanques, algunos tanques pueden estar repetidos (multi-tanque) y se conocen las distribuciones de tasas de avería de los tanques (concentraciones químicas fuera de las tolerancias permitidas) y su reparación. Finalmente, p grúas idénticas trabajan de manera independiente, comparten un carril único sin poderse cruzar, se pueden estropear según una distribución conocida y, en dicho caso, son apartadas de la línea de trabajo.

Un sistema de programación experto requiere adquirir conocimientos del sistema: identificando reglas de decisión prometedoras, identificando parámetros, usando la simulación para identificar las mejores reglas para diferentes condiciones y estableciendo los criterios de selección de reglas. Los autores determinaron cinco parámetros: número de tanques y de grúas disponibles en un instante de tiempo, tiempo de movimiento de grúa entre dos tanques consecutivos, el tiempo de proceso en un tanque y el perfil de consumo de recursos. Para unas condiciones determinadas, se muestra como ejemplo que estos parámetros conducen a una selección entre dos reglas: la partición de la línea por grúas y la prioridad modificada de la grúa más cercana.

Lamothe, Correge y Delmas (1995) plantean el problema de programación del transportador dinámico (*Dynamic Hoist Scheduling Problem*), para un contexto productivo en tiempo real con multi-producto, en el cual los objetos llegan a la estación de carga aleatoriamente. Así, dado el estado de la línea y los productos en la estación de carga, se debe reprogramar los movimientos de la grúa. Se utiliza un procedimiento de *branch and bound* primero en profundidad. Siguiendo el esquema planteado por Baptiste (1992) en

cada nodo se evalúa una restricción disyuntiva entre dos operaciones que compitan por un mismo recurso. A partir de la evaluación de una función de coste calculada en cada nodo, como el número de conflictos o disyuntivas, se introduce el *backtracking* dinámico cuando alguna restricción hace inconsistente el sistema de inecuaciones planteado. Comparado con otras heurísticas, conduce a mejoras de hasta un 20% e incluso puede proporcionar soluciones buenas para el caso cíclico sin imponer que se halle el tiempo de ciclo.

Fleury et al. (1996a) proponen un nuevo método llamado *Triple Coupling* (triple combinación), para resolver algunos problemas industriales, como el problema HSP. El método que maneja las restricciones propias del sistema productivo, se basa en la conjunción de tres componentes: algoritmos estocásticos (propios de la investigación operativa), un modelo de simulación (como puente hacia su aplicabilidad) y un modelo multi-agente (propio de la inteligencia artificial). Estos tres elementos integrados responden a la estructura jerárquica de un sistema productivo: el subsistema lógico, el subsistema físico y el subsistema decisional. Para determinar la planificación a la entrada de la línea, se utilizan dos tipos de algoritmos: algoritmos del canguro y algoritmos de descenso estocástico. El resultado proporcionado se compone de la programación de entradas a la línea y de la conducción de la grúa. Se facilitan dos ejemplos donde se detalla el posible incremento de producción en la línea, acompañado, no obstante, de incrementos en la violación de las restricciones de tiempo máximo en los tanques. La misma metodología, válida para todo tipo de sistemas productivos, se encuentra descrita desde otro punto de vista en **Goujon, Lacombe y Traore (1996a)**.

En **Fleury et al. (1996b)** se aplica la metodología *Triple Coupling*, anteriormente presentada por los mismos autores, al *Hoist Scheduling Problem* (mediante algoritmos estocásticos para programar tareas a la entrada del sistema, un modelo de simulación para evaluar el criterio a minimizar y un método multi-agente para manejar la grúa). Se aplica sobre los datos de una línea de producción real, con una sola grúa y diferentes secuencias de tratamientos. El modelo propuesto, que contiene los tres componentes ya presentados, asocia una prioridad a cada contenedor en la línea, y cuando la grúa debe mover algún contenedor, se escoge el de mayor prioridad. La prioridad establece que se traten antes tanques llenos que vacíos y seguidamente, que se eviten interrupciones en la línea.

En **Goujon et al. (1996b)** se muestra un modelo de simulación, escrito en Pascal, para una línea compuesta por una serie de tanques y una grúa. La simulación sobre una representación gráfica del sistema cuenta con cuatro funciones principales (inicializar, modificar, resolver y consultar el resultado), y permite a un industrial que pruebe diferentes hipótesis de funcionamiento para su propio sistema. Se propone dos métodos para resolver el problema. En el primer método, el algoritmo garantiza el cumplimiento de todas las restricciones de ventana y se calcula la fecha de entrada en la línea para cada objeto tal que minimice el tiempo de producción. Se trata de un algoritmo *greedy*, en que la grúa se desplaza a recoger contenedores según el orden en que estos lo necesitan, y en caso de empate, se decanta por aquél con menor margen en la ventana temporal en que se halle. En el segundo método, en una primera fase se determina la mejor secuencia de entrada para los productos al sistema mediante un algoritmo estocástico de descenso (o recocido simulado con temperatura nula) o un algoritmo del canguro (para superar soluciones perores). Como continuación, en la segunda fase, se proponen dos tipos de algoritmos (sin y con posibles violaciones de los anchos de ventanas temporales) donde cada producto en la línea tienen una prioridad.

En la tabla 2.6, inspirada en Fleury et al. (1996b), se resume las técnicas utilizadas y los artículos en que se aplican. Algunos de ellos, básicos para los capítulos posteriores, se amplían en el capítulo 3.

Técnica de resolución	Artículo
<i>Branch and bound</i>	Shapiro, Nuttle (1988) Matsuo, Shang, Sullivan (1991) Armstrong, Lei, Gu (1994) Chen, Chu, Proth (1995)
<i>Constraint Logic Programming</i>	Baptiste, Legeard, Varnier (1992) Varnier, Grunder, Baptiste (1995)
Controlador programable (dinámica)	Gross et al. (1981)
Heurísticas	Lei, Wang (1991) Yih (1994)
Programación Lineal (dinámica)	Bracker, Chapman (1985)
Programación Lineal Entera Mixta	Phillips, Unger (1976)
Sistema basado en reglas	Yih (1990)
Sistema experto (reactiva)	Thesen, Lei (1990)
Teoría de grafos	Lieberman, Turksen (1982) Matsuo, Shang, Sullivan (1991) Chen, Chu, Proth (1995) Fernández (1995)

Tabla 2.6. Métodos de resolución vs. autores que los utilizan. Inspirada en *A Hoist Scheduling Problem, containing a fixed number of carriers, solved with an opportunistic approach*. Fleury et al. (1996b)

3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DEL PUENTE-GRÚA

En el presente capítulo se detallan algunas de las aportaciones más relevantes en el problema *Hoist Scheduling Problem*, como complemento a la descripción reseñada en el anterior capítulo y como base a los procedimientos propuestos en capítulos siguientes.

En el primer apartado, se señalan artículos de los principales precursores sobre el tema, escritos en las décadas de los setenta y de los ochenta. Dichos autores han utilizado técnicas usuales de la investigación operativa (programación lineal entera y mixta, procedimientos de ramificación y acotación conocidos como *branch and bound* o simulación), además de justificar que este problema se halla en el conjunto de problemas NP-completos de optimización combinatoria.

En el segundo apartado, se presenta algunos de los artículos más significativos sobre el tema en la posterior evolución vivida en la década de los noventa. Se han seleccionado como documentos representativos de esta época los referentes al análisis de las líneas con múltiples grúas, a la introducción de la propagación lógica con restricciones conocida como *Constraint Logic Programming*, a la nueva visión del problema a través de la teoría de grafos y a la enorme complejidad y dificultad que presenta la programación de los sistemas productivos reales que responden a las características de este trabajo

3.1. Aportaciones iniciales en el problema *Hoist Scheduling Problem*

3.1.1. Resolución mediante programación matemática

Phillips y Unger (1976) proponen la resolución del problema básico (1B,1F/1/1/V,⊃), presentado en el capítulo anterior, partiendo de un modelo basado en la **programación lineal entera y mixta**. Dicho modelo es válido para una sola grúa, baños mono-producto más un lugar de carga y descarga (o baño ficticio).

Las operaciones en dos ciclos distintos se consideran idénticas, lo que obliga a que los objetos en los contenedores estén exactamente dispuestos en el sistema tanto al inicio como al final de dicho ciclo, que corresponde con el inicio del siguiente. Esto implica que durante cada ciclo de movimientos de grúa, y para cada tanque, tenga que depositarse un contenedor y sacarse un contenedor, aunque no obligatoriamente estas dos acciones en el citado orden. Esto conlleva la posibilidad de dos situaciones diferentes:

- si un tanque está vacío al inicio del ciclo, durante el ciclo debe depositarse un contenedor y, posteriormente, debe sacarse el mismo contenedor del tanque;
- si un tanque está lleno al inicio del ciclo, durante el ciclo debe extraerse el contenedor y, posteriormente, debe introducirse otro contenedor en el tanque.

Constantes e índices:

- m** Número de tanques de la línea de producción.
- i** Índice referente a la posición de un tanque en la línea ($i=1, \dots, m$), estación de carga ($i=0$) o estación de descarga ($i=m+1$).
- i'** Índice auxiliar referente a la posición de un tanque en la línea ($i'=0, 1, \dots, m+1$).
- j** Índice auxiliar referente a la posición de un tanque en la línea ($j=0, 1, \dots, m+1$).

Parámetros:

- a(i)** Tiempo mínimo que un contenedor debe permanecer en el tanque i .
($i=0, 1, \dots, m$)
- b(i)** Tiempo máximo que un contenedor puede permanecer en el tanque i .
($i=0, 1, \dots, m$)
- e(i, i')** Tiempo de movimiento de la grúa vacía desde tanque i hasta tanque i' .¹
($i=0, \dots, m+1; j=0, \dots, m+1$)
- f(i, i+1)** Tiempo de transporte de la grúa cargada con un contenedor desde el tanque i hasta el tanque siguiente $i+1$. Más simplificado: $f(i)$.²
($i=0, 1, \dots, m$)

Variables:

- t(i)** = instante relativo en que se extrae un contenedor del tanque i ($i=0, 1, \dots, m$).³
- tmax** = instante en que se extrae el último contenedor en un ciclo, forzada por el conjunto de restricciones a ser el máximo de los instantes $t(i)$.
- y(i, j)** = variables binarias, para toda pareja de tanques i, j ($i=0, 1, \dots, m+1; j=0, 1, \dots, m+1; i \neq j$), forzadas por las restricciones:
 - valen 1 si $t(i) > t(j)$, es decir, cuando se extrae el contenedor del tanque j antes que el contenedor del tanque i en la secuencia de acciones del puente-grúa en un ciclo;

¹ Los tiempos de movimiento de la grúa vacía cumplen dos propiedades:

1. $e(i, i) = 0$
2. $e(i, i') = e(i', i)$

² Cuando la grúa se mueve vacía entre tanques, no necesita subir ni bajar para desplazarse a mayor altura. Por tanto:

$$f(i, i+1) > e(i, i+1)$$

³ $t(0) = 0$. Las m restantes variables $t(i)$ se definen como variables reales, aunque puede darse una solución con $t(i)$ enteras si $a(i)$, $b(i)$ y $e(i, i')$ son todas enteras.

- valen 0 si $t(i) < t(j)$, es decir, cuando se extrae el contenedor del tanque j después que el contenedor del tanque i en la secuencia de acciones del puente-grúa en un ciclo.

$z(i)$ = variables binarias de cada tanque i , una de las cuales vale 1, que forzada por las restricciones indica el último tanque visitado por la grúa en sus actividades de ciclo, y el resto valen 0. ⁴⁽⁴⁾

(i=0,1,...,m)

Notación del programa matemático

Función objetivo:

La función objetivo, que minimiza la duración del ciclo, es la suma de tres términos:

- el instante en que la grúa extrae el último contenedor de un tanque durante un ciclo,
- el tiempo de transporte del contenedor hasta que se deposita en el siguiente tanque,
- el tiempo de movimiento de la grúa vacía entre la posición de colocación del último contenedor y la posición inicial de la grúa para el siguiente ciclo (tanque 0).

$$\text{MIN} \left\{ t_{\max} + \sum_{i=1}^m [f(i, i+1) + e(i+1, 0)] z(i) \right\} \quad (3.1)$$

Restricciones de cota (grupo 1)

En este grupo, deben definirse $2m+1$ restricciones que fuerzan a que t_{\max} valga el máximo de los m valores $t(i)$, cotas inferiores (restricciones del tipo 3.2), y el mínimo de los m valores $t(i)$, corregidos como cotas superiores por un valor muy elevado M (restricciones del tipo 3.3):

$$t_{\max} \geq t(i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$t_{\max} \leq t(i) - [z(i) - 1] \cdot M \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^m z(i) = 1 \quad (3.4)$$

La restricción (3.3) indica que sólo un tanque puede ser el último en el orden de extracción.

Restricciones de grúa (grupo 2)

En este conjunto de restricciones, son necesarias $m \cdot (m-1)$ restricciones, para asegurar que las variables binarias $y(i,j)$, con i, j tales que $i > j$, están definidas correctamente:

$$\begin{aligned} y(i,j) &= 1 && \text{si } t(i) > t(j) \\ y(i,j) &= 0 && \text{si } t(i) < t(j) \end{aligned}$$

⁴ $z(i)=1$ si y sólo si $t(i)=t_{\max}$

Estas restricciones se imponen para que el puente-grúa disponga de suficiente tiempo de movimiento para desplazarse, tanto en el caso de ir vacío como lleno.

$$t(j) - t(i) \geq f(i,i+1) + e(i+1,j) - y(i,j) \cdot M \quad i > j \quad (3.5)$$

$$t(i) - t(j) \geq f(j,j+1) + a(j+1) + [y(i,j) - 1] \cdot M \quad i = j+1 \quad (3.6)$$

$$t(i) - t(j) \geq f(j,j+1) + e(j+1,i) + [y(i,j) - 1] \cdot M \quad i > j+1 \quad (3.7)$$

La relación entre los dos movimientos de la grúa asociados a las variables $t(i)$ y $t(j)$ pueden ser de dos tipos diferentes:

- $t(i) > t(j)$: un contenedor se extrae antes del tanque j que del tanque i (el tanque j precede al tanque i en la secuencia de movimientos de la grúa en un ciclo).

Para el caso $i = j+1$, la restricción (3.6) asegura que el tiempo entre la extracción del tanque j y la extracción del tanque inmediatamente siguiente $j+1$, el tanque i , debe ser suficiente para transportar el contenedor entre j y $j+1$, $f(j,j+1)$, más el mínimo necesario en el tanque $j+1$, $a(j+1)$.

Para el caso $i > j+1$, la restricción (3.7) asegura que el tiempo entre la extracción del tanque j y la extracción del tanque i , posterior aunque no el inmediatamente siguiente, debe ser suficiente para transportar el contenedor entre j y $j+1$, $f(j,j+1)$, más el necesario para moverse la grúa vacía entre el tanque $j+1$ y el tanque i , $e(j+1,i)$.

- $t(i) < t(j)$: el contenedor se extrae después del tanque j que del tanque i (el tanque i precede al tanque j en la secuencia de movimientos de la grúa en un ciclo).

Las restricciones (3.6) y (3.7) alcanzan términos independientes negativos, con lo cual no son activas. Entonces, la restricción (3.5) asegura que el tiempo entre la extracción del tanque i y la del tanque j debe ser suficiente para transportar el contenedor entre i e $i+1$, $f(i,i+1)$, más el necesario para moverse la grúa vacía entre el tanque $i+1$ y el tanque j , $e(i+1,j)$.

Restricciones de baño (grupo 3)

En este último grupo de restricciones, **3m** restricciones garantizan que el tiempo del contenedor en un tanque determinado está comprendido entre un tiempo mínimo $a(i)$ y un tiempo máximo $b(i)$.

Si se considera d el tiempo que transcurre, en un determinado ciclo, desde que se extrae el último contenedor de un tanque hasta el final del ciclo, las expresiones se simplifican notablemente.

$$[t_{\max} + d + t(i)] - [t(i-1) + f(i-1,i)] \geq a(i) - y(i,i-1) \cdot M \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$[t_{\max} + d + t(i)] - [t(i-1) + f(i-1,i)] \leq b(i) + y(i,i-1) \cdot M \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

$$t(i) - [t(i-1) + f(i-1,i)] \leq b(i) + [1 - y(i,i-1)] \cdot M \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

Con todas estas variables, y partiendo de las variables $t(i)$, puede ya definirse la ruta específica que debe seguir el puente-grúa. Las demás variables colaboran a cumplir las restricciones temporales. Además de estas variables y constantes, es necesaria la referencia de un número suficientemente elevado M .

Finalmente, la carga y descarga se efectúa en el tanque 0, con lo cual la notación del tanque $m+1$ queda adaptada como:

$$f(i,i+1) = f(m,0) \quad i = m \quad (3.11)$$

El modelo permite hallar una solución para casos de 8 a 13 baños en un corto espacio de tiempo, aunque presenta algunos fallos. Los autores proponen una extensión del problema al caso de los baños multi-función.

Finalmente, para demostrar la validez del modelo se añade una experiencia computacional (en concreto, un ejemplo con 12 tanques), conocida en la literatura como el “problema de Phillips y Unger”. En este caso:

$$f(i,i+1) = e(i,i+1) + 20^5$$

3.1.2. Resolución mediante procedimientos arborescentes

Shapiro y Nuttle (1988), a partir de la tesis doctoral de Shapiro (1985), retoman el problema de Phillips y Unger, excepto que la entrada y la salida de objetos están separadas, en un procedimiento de *branch and bound*, con resolución de programas lineales, donde se utilizan vectores como indicadores de la secuencia de operaciones.

Se describe un modelo asociado a la generación de una programación cíclica de los movimientos de una grúa para obtener la máxima productividad en una instalación de galvanización para PCB (*printed circuits boards*). El algoritmo propuesto determina un ciclo simple óptimo para un sistema con una única grúa, en un sistema dado (*layout*, reacciones y velocidad de la grúa) y unos procesos fijados (secuencia de tanques y rangos de los tiempos de remojo).

El algoritmo, que puede adoptar distintas configuraciones para carga y descarga y considerar los casos mono-baño y multi-baño, tiene básicamente naturaleza enumerativa e implica resolver secuencias de pequeños subprogramas lineales. Así mismo, se puede generalizar para obtener **n-ciclos**, aportación novedosa de los autores y que se define como un ciclo donde se introducen n objetos y que se calcula dividiendo la duración total de un ciclo entre el número n de objetos.

⁵ Los 20 segundos suplementarios para transportar carga se deben a 8,5 segundos para subir el contenedor más 8,5 segundos para bajarlo, más 3 segundos antes de colocar el contenedor en el tanque para amortiguar la oscilación del transporte.

Modelo matemático

Se desarrolla un modelo de programación matemática para hallar un **ciclo simple** óptimo para **una grúa**. Para simplificar, se asume que ningún tanque de proceso está duplicado, o sea que cada tanque está asociado a un proceso diferente: caso **mono-baño** y **mono-función**. Para un ciclo simple de duración TC (1-ciclo), el tiempo que pasa entre la introducción de dos contenedores sucesivos en el sistema siempre es TC ; y durante ese período, sólo un contenedor abandona el sistema. Los 1-ciclos poseen más propiedades que los n -ciclos.

Se asume que, a pesar del *layout*, los tanques se ordenan según su intervención en la secuencia de procesos. Así, la estación 0 es el lugar de carga, los tanques 1 a m son tanques de proceso y la estación $m+1$ es la de descarga (que, según sea la configuración, puede coincidir o no con la de carga). Según la notación anterior, el movimiento i implicará nuevamente trasladar un contenedor desde el tanque i hasta el tanque $i+1$.

Constantes e índices:

- m** Número de tanques de la línea de producción.
- p** Número de contenedores, objetos o piezas en un ciclo.
- i** Índice referente a la posición de una estación en la línea ($i=0, \dots, m+1$).
- i'** Índice auxiliar de la posición de una estación en la línea ($i'=0, \dots, m+1$).
- j** Índice de un cierto contenedor en la línea ($j=0, \dots, p$).
- k** Índice auxiliar referente al tanque de la línea que contiene un objeto ($k=0, 1, \dots, m$).

Parámetros:

- a(i)** Tiempo mínimo de proceso de un contenedor en el tanque i .
($i=0, 1, \dots, m$)
- b(i)** Tiempo máximo de proceso de un contenedor en el tanque i .
($i=0, 1, \dots, m$)
- e(i, i')** Tiempo de movimiento de la grúa vacía desde el tanque i hasta el tanque i' .
(1)
($i=0, \dots, m+1; j=0, \dots, m+1$)
- f(i)** Tiempo (del movimiento i) de la grúa cargada con un contenedor desde el tanque i hasta el tanque siguiente $i+1$, incluyendo tiempos para ascender, escurrir, desplazarse y descender.
($i=0, 1, \dots, m$)
- L, U** Tiempos mínimos requeridos para cargar y descargar las placas en un contenedor.

Variables:

- s(i)** = duración de la programación establecida de un contenedor en el tanque i
($i=1, \dots, m$).
- $s(0)$ no se utiliza.
- $s(m+1) = \infty$

S está compuesto por $S = [s(1), s(2), \dots, s(m)]$.

$t(i)$ = tiempo entre la introducción de un contenedor en el sistema y su extracción del tanque i ($i=1, \dots, m$).

$$t(0) = 0$$

$$t(m+1) = \infty$$

$$t(i) = \sum_{j=1}^i [f(j-1) + s(j)]$$

T = tiempo de proceso de un contenedor a lo largo del sistema, y vuelta a la estación de carga.

Propiedades para los parámetros de tiempos en movimientos

Además de las condiciones de simetría 3.12 (propiedad 1) y de desplazamiento a doble altura 3.13 (propiedad 2), citadas por Phillips y Unger (1976), se añade una tercera propiedad, definida como desigualdad triangular 3.14:

$$e(i, i') = e(i', i) \quad \forall i, i' \quad (3.12)$$

$$f(i) > e(i, i+1) \quad i=1, \dots, m \quad (3.13)$$

Sea (k_1, \dots, k_{r+1}) cualquier secuencia de tanques:

$$e(i, i) \leq e(i, k_1) + \sum_{n=1}^r e(k_n, k_{n+1}) + e(k_{r+1}, i') \quad \text{para cada par de tanques } (i, i') \quad (3.14)$$

donde k_n indica el n -ésimo tanque visitado por la grúa después del tanque i .

En este contexto, el objetivo es determinar un vector S de tiempos de remojo $s(i)$ en cada tanque ($i = 1, \dots, m$), ya que al elegir dichos valores la temporización de movimientos $t(i)$ ($i = 1, \dots, m$) y el tiempo total T del contenedor en el sistema quedan completamente especificados. En principio, siempre es posible obtener un **ciclo factible** si se procesa un solo contenedor en un instante determinado, en cuyo caso el tiempo de ciclo es TC^0 . En la mayoría de sistemas es posible mejorar este resultado introduciendo más contenedores en un plazo $TC < TC^0$. Así, para $p+1$ contenedores (llamados $0, 1, \dots, p$) procesados con intervalos de producción TC y tiempos de remojo S , la secuencia asociada de operaciones de la grúa puede definirse como un programa de la grúa (TC, S, p) .

Una programación es factible si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) Dos contenedores no pueden ocupar el mismo tanque de proceso a la vez.
- (2) Dos movimientos no se pueden producir simultáneamente.
- (3) Entre los movimientos de la grúa hay suficiente tiempo desde donde fue usada hasta donde será usada.
- (4) Los tiempos de remojo $s(i)$ satisfacen $a(i) \leq s(i) \leq b(i)$

Se observa una clara correspondencia entre programas de infinitos contenedores y los ciclos simples de movimientos de grúa. Obviamente, un ciclo simple de longitud TC con tiempos de remojo S , repetido infinitamente, es lo mismo que cualquier programa infinito

(TC, S, ∞) . Así, cada TC unidades de tiempo se incorpora un nuevo contenedor al sistema. En ese instante (en régimen permanente), los contenedores del sistema tienen edades TC , $2 \cdot TC$, ..., $(p-1) \cdot TC$, y ya que $T \leq p \cdot TC$, un contenedor introducido p períodos antes ya habrá abandonado el sistema. El sistema retorna al mismo estado cada TC unidades de tiempo. Aún más, se demuestra que la secuencia de movimientos entre la introducción de dos contenedores consecutivos es siempre la misma.

El conjunto $F(S)$ es la unión de una secuencia de intervalos inconexos en la escala de tiempo; es necesario el concepto de ordenación de movimientos para dos contenedores consecutivos.

Una ordenación es un vector de dimensión $m-1$ $V = \{v(1), v(2), \dots, v(m-1)\}$, que toma como referencia al mover un contenedor la posición en la línea del anterior contenedor y que debe cumplir que:

$$v(i) \geq i+1 \quad (3.15)$$

$$v(i) \geq v(i-1) \quad (3.16)$$

Así, la condición (3.11) asegura que dos contenedores no ocupen a la vez el mismo tanque, mientras que la condición (3.12) es una condición de consistencia, dado que no se realizan adelantos entre piezas. Se define $F(S, V)$ como el conjunto de todo TC factible (relativo a un par de contenedores) para unos tiempos de remojo S y un orden V .

Para diferentes contenedores ($j=1, \dots, p$), que empiezan a procesarse cada $j \cdot TC$ unidades de tiempo, V_j define la ordenación entre pares de contenedores, siendo $V_p(1)=m$ equivalente a $p \cdot TC \geq T$. Se puede demostrar que para $j \cdot TC \in F(S, V_j)$ ($j=0, 1, \dots, p$) es necesario cumplir un conjunto de inecuaciones lineales, es decir, un programa lineal.

Así, se puede decir que, dados S y TC , el movimiento $k'(0+j)$ de la pieza en la j -ésima posición siguiente a una determinada pieza 0 encaja después del movimiento $k(0)$ de esta pieza de referencia si y sólo si:

$$t(k) + f(k) + e(k+1, k') \leq j \cdot TC + t(k') \quad (3.17)$$

$$j \cdot TC + t(k') + f(k') + e(k'+1, k+1) \leq t(k+1) \quad (3.18)$$

Estas dos condiciones, que aseguran que la grúa tiene suficiente tiempo para ejecutar el movimiento $k'(0+j)$ entre los movimientos $k(0)$ y $k+1(0)$ de la pieza 0 , reflejan las condiciones 2 y 3 de factibilidad para dichos pares de movimientos.

Finalmente, si se considera que carga y descarga se realizan de manera instantánea (tiempo mínimo de las operaciones nulo), un contenedor siempre está a punto para entrar en el sistema en la estación de carga y que, una vez un contenedor ha finalizado sus operaciones, no necesita más tiempo para su descarga.

Algoritmo

El algoritmo propuesto es del tipo *branch and bound*. La estrategia de ramificación enumera elecciones de p contenedores y $\{V_1, \dots, V_j\}$, órdenes parciales de movimientos de

objetos necesarios hasta alcanzar un nivel del árbol, con unas cotas obtenidas resolviendo los correspondientes programas lineales parciales.

El árbol de búsqueda se organiza de la siguiente manera:

- Un vértice perteneciente a un nivel j se describe como $\{V_1, \dots, V_j\}$.
- Si $v_j(1)=m$, el vértice es una hoja; en caso contrario, tiene tantos vértices descendientes posibles de la forma $\{V_1, \dots, V_j, V_{j+1}\}$. Se llama V_{j+1} a una extensión de V_j .
- La estructura se completa con el vértice raíz V_0 , que se halla en el nivel 0.

A cada vértice $\{V_1, \dots, V_j\}$, se le asocia un programa lineal, dados un TC y un vector de remejo S , que presenta la forma:

$$[\text{MIN}] \text{ TC} \tag{3.19}$$

s. a:

$$\text{TC} \in F(S, V_0) \tag{3.20}$$

$$\text{TC} \leq \text{TC}_{\text{best}} \tag{3.21}$$

$$k \cdot \text{TC} \in F(S, V_k) \quad k=1, \dots, j \tag{3.22}$$

La condición (3.20) denota el cumplimiento de las restricciones que no dependen del orden de acciones, siendo TC_{best} la duración de ciclo más corta hasta el momento.

El vértice $\{V_1, \dots, V_j\}$ es factible si existe una solución factible $\{\text{TC}, S\}$ para el programa lineal anterior tal que:

- Cada hoja factible determina un ciclo simple.
- Cada hoja no factible implica un programa (TC, S, p) con $p \cdot \text{TC} < T$.

Para obtener una hoja factible rápidamente y controlar las necesidades de memoria de ordenador, se emplea una primera búsqueda en profundidad. A partir de un vértice factible $\{V_1, \dots, V_j\}$, se examinan extensiones hasta encontrar una que sea factible.

- Examinando $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$ se añaden las restricciones $(j+1) \cdot \text{TC} \in F(S, V_{j+1})$ a las del programa lineal previo, de $\{V_1, \dots, V_j\}$.
- Para un $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$ factible, se guarda suficiente información para continuar la búsqueda desde allí y proceder a examinar sus descendientes.
- Si todos los descendientes de un vértice son infactibles, se realiza *back-tracking*.

Al ser las restricciones del programa lineal asociado a $\{V_1, \dots, V_j\}$ un subconjunto de aquellas asociadas a $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$, se puede asegurar que si un vértice no es factible, sus descendientes tampoco lo son. Asimismo, si $\text{LB}(V_1, \dots, V_j)$ es la duración del ciclo asociado a una solución óptima del programa lineal, LB es una cota inferior para la duración del ciclo de cualquier hoja descendiente de $\{V_1, \dots, V_j\}$.

La restricción (3.21) prohíbe la separación a partir de un vértice cuya extensión no pueda llevar a reducir la duración del tiempo de ciclo de la mejor solución hasta el momento.

Principales pasos del proceso del algoritmo

1. Acotación de los componentes de V_{j+1}

Se puede obtener un ciclo factible sólo procesando un contenedor a la vez en la línea, lo que permite hallar **una cota superior de TC^*** , la duración óptima del ciclo, que actúa como valor inicial para TC_{best} :

$$TC_{best} = \text{MAX} \left\{ \sum_{i=1}^m [a(i) + f(i)] + f(1), z \right\} \quad (3.23)$$

donde z es la cota inferior de la duración del ciclo según la configuración de carga y descarga.

Dado que en un ciclo simple siempre llega un contenedor y uno abandona cada tanque, debe cumplirse que $TC^* \geq \text{MAX} \{s(i)\}$. TC_{best} es una cota superior del tiempo de remojo $s(i)$ en cualquier tanque, lo que también puede permitir ajustar los tiempos máximos de permanencia en los tanques.

2. Exploración de extensiones

Para determinar si una **extensión V_{j+1}** con componentes en el rango determinado por las cotas inferior y superior del tiempo de ciclo es factible, primero se resuelve el programa lineal anterior añadiendo las restricciones:

$$(j+1)TC \in F(S, V_{j+1}) \quad (3.24)$$

$$TC \geq \text{LB}(V_1, \dots, V_j) \quad (3.25)$$

Si se llega a una solución en el programa lineal relajado, se resuelve el problema lineal correspondiente a $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$, dado que su factibilidad, utilizada como detector, es necesaria para la del programa lineal. Además, en lugar de resolver los dichos programas lineales (relajado y completo) directamente, se resuelven sus duales por diversas ventajas:

- El tamaño de la base de los problemas primales crece a medida que se desciende por el árbol de búsqueda y generalmente es mayor que el dual (m variables básicas, correspondientes a $\Delta s(2), \dots, \Delta s(m), TC$).
- Los problemas duales relajado y completo siempre tienen una solución factible con todas las variables estructurales iguales a 0.
- Las restricciones añadidas $(j+1)TC \in F(S, V_{j+1})$ al dual del programa lineal supone añadir columnas a la formulación del dual para $\{V_1, \dots, V_j\}$. Así, se puede resolver el dual expandido, empezando con la base hallada cuando se determinaba si $\{V_1, \dots, V_j\}$ es factible.

3. Búsqueda de nuevos descendientes V_{j+1}

Se ordena la búsqueda de descendientes de un vértice factible $\{V_1, \dots, V_j\}$, cuando se genera cada nueva extensión incrementando en uno o más componentes la extensión

previamente examinada. El examen de las extensiones de $\{V_1, \dots, V_j\}$ se realiza alternando V_{j+1} en todas las posiciones posibles en V_j que satisfacen:

$$v_{j+1}(i) = v_j(i+1) \quad i < m-1 \quad (3.26)$$

$$v_{j+1}(m-1) = m \quad (3.27)$$

4. Factibilidad de los programas lineales

Si un programa lineal completo y su relajado son factibles y $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$ es un vértice hoja, la duración óptima del ciclo para dicho vértice es la mejor hasta entonces, así que se guarda el vértice y se hace *back-tracking*. Si, en cambio, $\{V_1, \dots, V_{j+1}\}$ no es un vértice hoja, se calcula su cota superior $UB(V_1, \dots, V_j)$ y se sigue en el siguiente nivel inferior.

5. Infactibilidad de los programas lineales

Si un programa lineal completo o su relajado son infactibles, se examina otra extensión V_{j+1} de $\{V_1, \dots, V_j\}$. La siguiente extensión analizable se elige basándose en el examen del conjunto mínimo de restricciones inconsistentes (MSIC, *Minimal Set of Inconsistent Constraints*) en el entonces vigente programa lineal. MSIC tiene la propiedad que como conjunto es inconsistente, pero en caso que se elimine un elemento, el resto pasa a ser consistente. Para obtener un programa lineal factible, como mínimo se ha de eliminar o modificar una restricción de cada MSIC. En caso de ser infactible, su dual (siempre factible) no estará acotado y se identificará un MSIC a partir de su tabla del dual.

En función de los diversos casos posibles, el algoritmo realiza diferentes acciones: si no se puede resolver la infactibilidad, se recurre al *back-tracking*; si se puede resolver, se debe analizar el número de restricciones que forman parte de MSIC para actuar sobre el componente correspondiente de V_{j+1} .

Finalmente, se comentan algunos esquemas complementarios empleados que permiten una búsqueda más eficiente, y que pueden encontrarse en la tesis doctoral de Shapiro (1985).

3.1.3. Resolución mediante procedimientos heurísticos y simulación

Yih (1994) presenta un algoritmo basado en la simulación, que consta de dos partes: en la primera parte, se programa las operaciones de la grúa de acuerdo con los tiempos mínimos de proceso en los tanques; y en la segunda parte, se detectan posibles conflictos en las estaciones de trabajo, con lo cual se debe introducir una cierta flexibilidad en las duraciones de las tareas en los baños, hecho que permite la tolerancia de los tiempos máximos de proceso. El artículo propone un algoritmo para las líneas flexibles de producción de PCBs habituales, sin pulmones entre estaciones de trabajo. El algoritmo propuesto programa las tareas en el sistema de acuerdo con el rango específico de duración de las operaciones. Finalmente, se muestra mediante una simulación cómo se realiza una programación de piezas partiendo de los tiempos mínimos de proceso.

El problema tratado es la siguiente variante del *Hoist Scheduling Problem* con una sola grúa.

En el caso tratado se deben procesar n tipos de tareas/piezas, cada uno de los cuales:

- tiene que procesarse en una secuencia de tanques partiendo de la estación de entrada hasta la estación de salida, permitiendo que algunos tanques se puedan saltar,
- tiene, por cada tanque, un rango específico de tiempo de proceso acotado por un mínimo y un máximo,
- será apartado de la línea en caso que los tiempos de proceso no se pudieran hallar en el rango dado,
- llega aleatoriamente a la línea en tamaños de lote independientes, siendo su demanda desconocida a priori.

La línea de producción está formada por m estaciones de trabajo (tanques químicos), cada una de las cuales:

- tiene una función u operación específica asignada,
- puede contener tan sólo una pieza, sobre la cual se está realizando una tarea.

Las operaciones de transporte de las piezas a lo largo del sistema son responsabilidad de una sola grúa, que:

- tiene una velocidad de carga y descarga constante,
- tiene unas velocidades diferentes de desplazamiento con carga y sin carga,
- tiene capacidad para trasladar una sola pieza,
- se considera que siempre está disponible para dichas operaciones.

Un programa será factible si y sólo si este posible programa preestablecido no plantea ninguno de los siguientes conflictos:

1. Conflicto en las estaciones de trabajo: se produce cuando una pieza a punto de pasar a la siguiente estación no puede, debido a que esta última contiene otra pieza.
2. Conflicto por disponibilidad de la grúa: se produce cuando una pieza debería ser trasladada por la grúa, pero debe esperar a que la grúa finalice su actual tarea con una pieza distinta,.
3. Conflicto por la situación de la grúa: se produce cuando una pieza necesita ser extraída por la grúa y la grúa está disponible, pero está demasiado lejos de la estación solicitante y no puede llegar a tiempo.

Estos conflictos, que pueden producirse si la duración de la operación se iguala al tiempo mínimo de estancia en una estación, son superados en caso de usar el rango de valores temporales. El objetivo del algoritmo es determinar durante cuánto tiempo debe prolongarse una cierta operación para maximizar la producción, siempre satisfaciendo las restricciones.

A tal efecto, se define la **tolerancia de un tiempo de proceso** como la diferencia entre los tiempos máximo y mínimo admisibles para dicha operación. A una pieza (que puede formar parte de un lote de piezas) que llega al sistema, se le asigna un instante de entrada a

la línea. Seguidamente, se comprueba que la solución es factible, es decir, no se presenta ningún tipo de conflicto con los instantes de entrada de todas las piezas programadas. En caso negativo, debería actualizarse el tiempo de entrada en la línea de esta nueva pieza.

Para elaborar un programa factible de movimientos de piezas y grúa en la línea, se siguen dos fases de actualización: la primera, con la detección de conflictos de estaciones de trabajo (tipo 1); y la segunda, con la detección de conflictos de grúa (tipos 2 y 3), mediante la utilización de las respectivas tolerancias. Este proceso se repite hasta que no es necesario realizar ningún cambio más en la programación de operaciones.

ALGORITMO

- P1. Incluir los datos de una nueva pieza i disponible en la estación de carga.
- P2. Inicializar la entrada de la pieza i en la línea:
- determinar los instantes de inicio y de finalización de cada operación en cada estación;
 - determinar los instantes de inicio y de finalización de cada movimiento de grúa.
- P3. Comprobar si existen conflictos en las estaciones (por cada estación pieza):
- SI hay conflicto en una estación (dos trabajos simultáneos)
 - Calcular la superposición: MD (*minimal delay*).
 - Retrasar la entrada del segundo trabajo (+MD).
- finSI
- P4. Comprobar conflictos en la grúa:
- Retraso_total=0 (inicialización del retraso de entrada de una pieza)
 - k=1 (inicialización de operaciones)
 - MIENTRAS queden operaciones de grúa pendientes
 - SI hay conflicto en una operación (k)
 - SI hay margen en anterior actividad de la pieza, usar todo o parte:
 - Retrasar las actividades siguientes.
 - SINO
 - Si margen en actividades de piezas previas, usar todo / parte.
- finSI
- Retraso_total = Retraso_total+MD
- k=k+1 (siguiente operación)
- finSI
- finMIENTRAS
- SI Retraso-total \neq 0, repetir P4.
- P5: Actualizar el programa de operaciones de proceso y de grúa.
-

La experimentación se ha basado en una línea compuesta por cinco tanques y una grúa, con las siguientes características:

- Cada contenedor tiene dispuestas 15 placas de circuito.
- Cada tanque químico del proceso contiene diferentes disoluciones del proceso.

- Cada tipo de pieza requiere procesos distintos, es decir, tiempos de proceso diferentes y rutas también diferentes.
- Los materiales fluyen sólo en una única dirección (de izquierda a derecha).
- Cada tanque puede albergar un solo estante.
- La simulación empieza cuando el sistema se encuentra vacío y termina cuando 100 trabajos han finalizado completamente su proceso.

La medida de eficiencia de la programación es el tiempo total (*completion time*) para completar los 100 trabajos, cuyo valor será objeto de minimización. Para comparar un algoritmo básico (sin considerar ventanas temporales) con el propuesto (considerándolas), se utiliza un índice de mejora, definido como:

$$\text{Índice} = (T_b - T) / T_b \quad (3.28)$$

siendo T_b , el tiempo total del algoritmo básico, y T , el tiempo del algoritmo propuesto.

La experiencia computacional cuenta con dos grupos de problemas sobre los cuales se realizó la programación:

- El primer experimento genera 4 réplicas para combinaciones de tres velocidades para la grúa con cuatro tamaños de ventanas temporales en los tiempos de proceso.
- El segundo experimento genera 4 réplicas para combinaciones de tres velocidades para la grúa, las mismas que en el anterior caso, con ventanas temporales en los tiempos de proceso del mismo tamaño, pero cuatro duraciones medias diferentes.

Ambos experimentos muestran interacciones significativas entre la velocidad de movimiento y la varianza de los tiempos de proceso, y también entre la velocidad de movimiento y la media de los tiempos de proceso, siendo en los dos casos pares de factores que afectan al tiempo total (*completion time*).

El algoritmo propuesto permite incorporar condiciones que no estaban plenamente consideradas en anteriores trabajos:

- Toda tarea diferente puede requerir rutas y tiempos de proceso asociados a las operaciones de dichas rutas diferentes. Así, se permite saltarse la realización de alguna acción en un tanque de la línea que se recorre
- Se considera diferentes posibilidades en el tiempo de movimiento de la grúa y su disponibilidad.
- Se incorpora la tolerancia para generar programaciones factibles, como variante a los problemas habituales de *flow-shop* sin limitación de stocks intermedios.

Los resultados experimentales muestran un efecto de interacción entre la velocidad de movimiento de la grúa y la variación de los tiempos de proceso sobre la tasa de mejora. Generalmente, cuando las duraciones varían mucho, la programación está más suelta y es

más variable. Si estas variaciones son menores, es mucho más difícil que las tareas en espera de entrada en el sistema puedan hacerlo más pronto. Se observa que no se puede hacer nada si las estaciones o la grúa se convierten en un verdadero cuello de botella del sistema. Dado que el algoritmo propuesto permite tratar problemas en un entorno *flow-shop* con tiempos mínimos y máximos como restricciones de ventanas temporales, la propuesta de la autora para el futuro es su aplicación en entornos *job-shop*, con las mismas restricciones de ventanas temporales.

3.1.4. Evaluación de la complejidad del problema tratado

Lei y Wang (1989) demuestran que el CHSP problema de programación cíclico de una grúa es NP-completo. El sistema de producción que toman como referencia es el propuesto por Shapiro y Nuttle (1988), con el lugar de carga y el de descarga separados, a cada lado de los tanques de proceso. Por lo tanto, ningún algoritmo puede garantizar una solución óptima en un tiempo acotado polinomialmente evaluando todas las soluciones posibles para algunas las instancias del problema.

Primeramente, se establece que el programa cíclico buscado es un vector con una permutación de los m tanques y que el ciclo se repite indefinidamente. Seguidamente, se define el tiempo de ciclo para dicho programa. El teorema que dice “El problema CHSP es NP-completo” se demuestra con la existencia de un algoritmo no determinístico que resuelve el CSHP en tiempo polinomial, dado que existen como mínimo $m!$ programas cíclicos diferentes para un problema cíclico de m estaciones. Así, el problema HSP se asemeja al TSP, problema del viajante de comercio (simétrico) y dado que se ha demostrado que éste último es NP-completo, el problema cíclico también lo es. De manera análoga, se demuestra el corolario que dice “El problema multi-grúa es NP-completo”. Los autores dejan pendiente la respuesta sobre si un problema de programación p-cíclico es también NP-completo.

3.2. Desarrollos posteriores en la evolución del problema

3.2.1. Resolución del caso de múltiples grúas

Lei y Wang (1991) proponen un algoritmo heurístico MCC (*Minimum Common Cycle*), que sirve para obtener programas cíclicos en caso de disponer de dos grúas en una línea de tanques. Se utiliza una “aproximación zonal” según la cual el sistema se parte en dos conjuntos de estaciones contiguas, donde cada grúa se asigna a uno de ellos. El programa con un común tiempo de ciclo mínimo a ambas grúas se ofrece como la programación buscada, a partir de la partición establecida. Posteriormente, se evalúa una serie de particiones alternativas. La solución final resulta del mejor de los programas generados. Se toman como base las hipótesis de Phillips y Unger (1976), como carga y descarga separadas, tiempo nulo de carga de objetos y objetos idénticos que visitan todas las estaciones, para determinar la secuencia cíclica de movimientos de las grúas.

El problema planteado, *Cyclic Two-Hoist Scheduling Problem* (C2HSP), se basa en 3 componentes (G,P,T) que define una programa cíclico de movimientos para dos grúas:

- G es una permutación que ordena $m+1$ movimientos $\{0,1,\dots,m\}$ en la secuencia: $\langle h[0], h[1], \dots, h[m] \rangle$.
- P es una partición que descompone las $m+1$ estaciones en dos conjuntos, G_1 y G_2 , tal que los movimientos de G_h se asignan a la grúa h ($h=1,2$).
- T es el vector que indica los instantes de tiempo en que un movimiento de G empieza $\langle t[0], t[1], \dots, t[m] \rangle$.

El tiempo de ciclo óptimo $TC(G^*,P^*,T^*)$ será el tiempo para que ambas grúas completen los movimientos que les han sido asignados:

$$TC(G^*,P^*,T^*) = \min \{ TC(G,P,T) \mid \text{para } \forall (G,P,T) \text{ factible} \} \quad (3.29)$$

Bases del algoritmo MCC

El algoritmo heurístico MCC para obtener un tiempo de ciclo común a dos grúas en una línea de tanques, que las sincronice, consta de las siguientes etapas:

Etapla 1: Se realiza una partición del conjunto de $m+1$ estaciones en dos conjuntos, mediante un valor V ($0 \leq V \leq m+1$), y se asigna una grúa a cada uno de ellos:

$$G_1(V) = \{S_0, S_1, \dots, S_V\}$$

$$G_2(V) = \{S_{V+1}, S_{V+2}, \dots, S_m\}$$

La estación S_{V+1} se considera, a la vez, estación de descarga del subsistema $G_1(V)$, ya que descarga un objeto hacia el subsistema $G_2(V)$, y estación de carga del subsistema $G_2(V)$.

Etapla 2: Para cada posible V , se evalúa el tiempo de ciclo para cada uno de ambos subproblemas de secuenciación de grúa, por separado y de forma independiente, mediante algún método de resolución planteado para el caso mono-grúa. Ambos tiempos de ciclo óptimos, $TC_1(V)$ y $TC_2(V)$, se comparan y mediante un proceso iterativo se alcanza el mínimo tiempo de ciclo común de ambos subsistemas $TC^*(V)$.

El proceso iterativo de sincronización de ambas grúas consta de las siguientes etapas:

- Se determina un valor inicial para $TC^*(V)$: $TC^*(V) = \text{Max} \{ TC_1(V), TC_2(V) \}$
- Se resuelve el subproblema de menor tiempo de ciclo imponiendo que el nuevo tiempo de ciclo sea mayor o igual que $TC^*(V)$.
- Si al resolverlo, el tiempo de ciclo óptimo es mayor que $TC^*(V)$, este valor sustituye al anterior $TC^*(V)$ y el proceso se repite, en esta ocasión, con el otro subproblema.
- Dado V , se para cuando ambos subsistemas tienen iguales tiempos de ciclo, $TC^*(V)$.
- El valor óptimo de V (V_{MCC}) corresponde al tiempo mínimo de cualquier V :

$$TC^*(V_{MCC}) = \min \{ TC^*(V) \mid \forall V \}$$
- Con V_{MCC} , partición óptima, se unen las dos secuencias de las grúas en una sola, ajustando el comienzo de tiempos de movimientos de la grúa 2 para cumplir la restricción de ventana temporal en la estación $V_{MCC}+1$.

Para un sistema con $m+1$ estaciones y dos grúas, son posibles $m! \cdot 2^{(m-1)}$ secuencias: el primer multiplicando supone el número de permutaciones circulares para $m+1$ estaciones, y el segundo, el número de posibles asignaciones de cada grúa a una estación, siendo $m-1$ al suponer que el movimiento de extracción de la estación 0 se asigna irremediabilmente a la grúa 1, y el de la estación m , a la grúa 2. Con el algoritmo MCC, el número de combinaciones posibles se reduce a un orden $O(m \cdot (m-1)!)$, pues m es el máximo número posible de particiones examinadas y $(m-1)!$ es una cota superior para el número de permutaciones circulares. Cualquier procedimiento propuesto anteriormente por Phillips y Unger (1976), Shapiro y Nuttle (1988) o Lei y Wang (1989a) es válido para resolver los subproblemas de una grúa en su parte de estaciones.

Lemas para problemas con más de una grúa

Se presentan también cuatro lemas, con propiedades de aceleración del proceso:

Lema 1: Para cualquier partición V , el mínimo tiempo de ciclo común es mayor o igual que el máximo de los dos tiempos de ciclo mínimos, correspondientes a los dos subproblemas:

$$TC^*(V) \geq \text{Max} \{ TC_1(V), TC_2(V) \} \quad (3.30)$$

Lema 2: Sea G un subsistema arbitrario de una grúa con m estaciones a su cargo y tiempo de ciclo TC_G . Sea Z el subsistema formado añadiendo una estación adicional $m+1$ a G . Entonces:

$$TC_Z \geq TC_G \quad (3.31)$$

donde TC_Z es el tiempo de ciclo óptimo para dicho subsistema Z .

Lema 3: Si $TC_1(V) = TC_2(V)$, entonces:

$$V_{MCC} = V \quad (3.32)$$

Lema 4: Sea V^* una partición, con un tiempo de ciclo común $TC^*(V^*)$ conocido:

si $TC_1(V) > TC^*(V^*)$, entonces $V_{MCC} < V$;

si $TC_2(V) > TC^*(V^*)$, entonces $V_{MCC} > V$.

Funcionamiento del algoritmo

La partición inicial del algoritmo es $V^0 = m/2$. Siendo $TC_1(V^0)$ y $TC_2(V^0)$ los tiempos de ciclo óptimos para cada subproblema, y definidas las “particiones izquierda” formadas por $V^0, V^0-1, \dots, 1$ y las “particiones derecha” formadas por $V^0, V^0+1, \dots, N-1$, se prosigue así:

si $TC_2(V^0) > TC_1(V^0)$, se opera con las particiones derecha;

si $TC_1(V^0) > TC_2(V^0)$, se opera con las particiones izquierda.

Tanto si se procede en un sentido o en otro, el proceso finaliza al cumplirse una de las condiciones siguientes: llegar al extremo de una de las particiones ($V=m-1$; $V=1$), o que

$\text{Max}\{ \text{TC}_1(V), \text{TC}_2(V) \} > \text{Min}\{ \text{TC}^*(V) \mid \forall V \text{ evaluada hasta entonces} \}$ siendo el segundo miembro la solución final de dicho algoritmo $\text{TC}^*(V_{\text{MCC}})$.

Algoritmo MCC

```

V0=m/2
G1(V0)= {S0, S1, ..., SV0} ; G2(V0)= {SV0+1, SV0+2, ..., SN}
PARA cada grúa (h=1,2)
    Optimización del tiempo de ciclo para una grúa, con resultado TCh(V0)
SI TC1(V0) = TC2(V0)
    VMCC = V0 ; TC*(VMCC) = TC1(V0) = TC2(V0)           lema 3
SINO
    TC*(VMCC) = ∞; V = V0 ; VMCC = V0
    SI TC1(V) > TC2(V)
        paso = -1           primero, la partición izquierda
    SINO
        paso = +1           primero, la partición derecha
    finSI
    parar = Falso: partición_contraria = Falso
    MIENTRAS (parar = Falso)
        Max_inicial = Max { TC1(V), TC2(V) }
        REPETIR
            TC*(V) = Max { TC1(V), TC2(V) }
            TCw(V) = Min { TC1(V), TC2(V) }
            Optimizar tiempo ciclo (una grúa), añadiendo TCw(V) ≥ TC*(V)
        HASTA { TCw ≥ TC*(V) }
        SI TC*(V) < TC*(VMCC)
            VMCC = V ; TC*(VMCC) = TC*(V)
        finSI
        parar=[TC*(VMCC)<Max_inicial { TC1(V), TC2(V)} o [V=1] o [V=N-1]
        SI [parar = Verdadero] y [partición_contraria = Falso]
            partición_contraria = Verdadero           cambio de partición
            paso = paso·(-1); V=V0 ; parar = Falso
        finSI
        SI [parar = Falso]
            V=V + paso           nueva partición
            G1(V)= {S0, S1, ..., SV} ; G2(V)= {SV+1, SV+2, ..., SN}
            PARA cada grúa (h=1,2)
                Optimizar tiempo ciclo (una grúa); resultado TCh(V)
            finSI
        finMIENTRAS
    finSI

```

El algoritmo MCC presenta la aportación de la partición, es decir, la optimización de problemas de una grúa aporta una cota inferior. Se propone su extensión al caso de más de 2 grúas, con un vector de partición: $[V_1, V_2, \dots, V_{H-1}]$.

3.2.2. La Programación Lógica con Restricciones

Baptiste, Legeard y Varnier (1992) proponen un modelo para el *Hoist Scheduling Problem* basado en la programación lógica con restricciones o CLP (*Constraint Logic Programming*), escrito en PROLOG. Se facilitan soluciones óptimas con programas bastante simples de construir y con una eficiencia similar a la conseguida por otros métodos. La mayoría de modelos propuestos hasta entonces se limitaban al modelo más simple (mono-baño, mono-función, un producto, una grúa), encontrando soluciones óptimas en el mundo académico, y por tanto, difíciles de aplicar en casos reales, ya que habían restringido el problema de partida. Las modificaciones necesarias para que el modelo represente casos reales incrementan ampliamente su complejidad de resolución. Esta razón llevó al uso de esta nueva técnica al problema planteado. La elección de CLP se fundamenta en que el problema utiliza simultáneamente la estrategia y la optimización en la resolución, dos fases propias de la programación lógica con restricciones.

Los lenguajes CLP, técnica usual en Inteligencia Artificial, tiene como objetivo integrar estrechamente el mecanismo de resolución del lenguaje Prolog con técnicas específicas para resolver restricciones, declaradas a través de dominios. Para tratar las restricciones, Prolog dispone de técnicas eficientes de resolución en esos dominios, para usar listas de ecuaciones o inecuaciones, y la concatenación de listas, cuyo término izquierdo se integra como operador originario. Así, durante el proceso de ejecución del programa, se va modelizando al considerar algunas ecuaciones y al aplazar las restricciones aún no evaluables para tratarse posteriormente.

Las principales implementaciones en el mercado son: Prolog, utilizado en el algoritmo de este artículo, sirve para aritmética lineal racional, términos binarios y árboles infinitos, y CHIP, adecuado para dominios finitos, términos binarios y términos racionales lineales. Las principales aplicaciones de sistemas CLP son problemas combinatorios, que requieren modelos con una representación estratégica y una definición de restricciones.

Algoritmo

El algoritmo propuesto se centra en la programación del ciclo óptimo de líneas de producción con una sola grúa, si bien su extensión al caso multi-grúa es asequible y no modifica la complejidad del problema ni su tiempo de resolución.

El sistema sujeto a la programación de la grúa es el presentado en Phillips y Unger (1976), en el primer punto de este capítulo:

- Todos los tiempos de remojo de los objetos están acotados entre un valor mínimo y un valor máximo.
- Una única grúa debe realizar todos los movimientos de transporte de objetos.
- Los tiempos de movimiento de la grúa entre tanques son constantes (y por lo tanto, conocidos a priori).
- A continuación, a pesar de la distribución de tanques en la línea o *layout*, éstos tendrán índices según el orden en la secuencia de procesos. Así, el tanque 0 es de carga; m es de descarga y los transportes se dan entre dos tanques i e $i+1$ (la disposición física real se incluye implícitamente en la matriz de distancias).

Una secuencia factible de los movimientos de una grúa será factible si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Los tiempos de operaciones $O(i,k)$ incluidos entre el mínimo y el máximo.
 2. Dos productos diferentes no pueden ocupar un mismo tanque a la vez.
 3. Dos movimientos de una grúa no se deben nunca superponer en el tiempo.
 4. Hay suficiente tiempo para que la grúa se desplace entre donde se usa por última vez y donde se necesite a continuación.
-

Notación

- m Número de tanques (los tanques se numeran entre 1 y m), siendo i el tanque de la operación i -ésima.
- $e(i,j)$ Tiempo de movimiento en vacío entre dos tanques i y j (que incluye aceleración de la grúa, viaje y desaceleración).
- $f(i)$ Tiempo de transporte de producto entre los tanques i e $i+1$ (incluye sacar el objeto, dejar secarlo, moverse entre tanques y bajar el objeto hasta el nuevo tanque).
- $a(i)$ Duración mínima necesaria de la operación del producto k en el tanque i .
- $b(i)$ Duración máxima admisible para la operación del producto k en el tanque i .
- $O(i,k)$ Operación de remojo del producto k en el tanque i .
- $o(i)$ Duración programada de la operación $O(i,k)$.
- $R(i,k)$ Transporte del producto k entre los tanques i e $i+1$.
- TC_{\min} Cota superior del tiempo de ciclo.
- TC_{\max} Cota inferior del tiempo de ciclo.
- TC Tiempo de ciclo, a minimizar

Variables

El problema estará completamente definido por el conjunto de variables $t(i)$ y el tiempo de ciclo TC :

$$t(0) = o(0)$$

$$t(i) = t(0) + \sum_{l=1}^i f(l-1) + o(l) = t(i-1) + f(i-1) + o(i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.33)$$

Cuando estas variables tomen valores, definirán segmentos de utilización de la grúa, siendo cada operación de trasvase $R(i,k)$ el intervalo cuando la grúa está ocupada:

$$[t(i) + k \cdot TC, t(i) + f(i) + k \cdot TC]$$

para el producto $(k+1)$ entre los tanques i e $i+1$.

Restricciones de tanques (tiempos de remojo)

Las restricciones deben reflejar las condiciones 1 y 2 especificadas previamente.

De la condición 1, se puede convertir en la doble inecuación generada por los tiempos mínimo y máximo, $a(i) \leq o(i) \leq b(i)$. Una propagación de dicha relación acota directamente las variables $t(i)$, considerando que: $t_{\min}(i) \leq t(i) \leq t_{\max}(i)$ para $i = 1, \dots, m$.

Relacionando todas estas variables, se pueden hallar las cotas inferior y superior para cada instante $t(i)$:

$$t_{\min}(i) = \sum_{l=1}^i [f(l-1) + a(l)] \quad (3.34)$$

$$t_{\max}(i) = \sum_{l=1}^i [f(l-1) + b(l)] \quad (3.35)$$

Dado que dos productos no pueden permanecer en un mismo tanque a la vez (condición 2), se puede acotar inferiormente el tiempo de ciclo, que debería ser superior a la suma del mayor tiempo de remojo, más el transporte del producto a este tanque más el transporte al siguiente tanque:

$$TC_{\min} = \max_{l=0;m} [f(l-1) + a(i) + f(i)] \quad (3.36)$$

siendo la cota superior del tiempo de ciclo, la extracción del objeto del último tanque más el tiempo de transporte necesario:

$$TC_{\max} = t_{\min}(m) + e(m,0) \quad (3.37)$$

quedando acotado el tiempo de ciclo: $TC_{\min} \leq TC \leq TC_{\max}$.

Restricciones de grúa

Para satisfacer las condiciones 3 y 4, se deben considerar disyuntivas para la grúa al tener que realizar dos operaciones $R(i,k_i)$ y $R(j,k_j)$ sobre dos productos diferentes.

Como en toda disyuntiva, pueden darse dos situaciones opuestas:

1. Si la operación $R(i,k_i)$ precede a $R(j,k_j)$, esto obliga a que se cumpla la siguiente restricción:

$$[t(j) + k_j \cdot TC] - [t(i) + f(i) + k_i \cdot TC] \geq e(i+1,j) \quad (3.38)$$

2. Si la operación $R(i,k_i)$ sigue a $R(j,k_j)$, se expresa:

$$[t(i) + k_i \cdot TC] - [t(j) + f(j) + k_j \cdot TC] \geq e(j+1,i) \quad (3.39)$$

Ambas relaciones sólo sirven en caso que $k_i \neq k_j$, y si se toma como referencia un objeto 1, como $k_i=1$, los demás objetos ($k_{\max}-1$) que se encuentran simultáneamente en la línea pasan a ser $k_j=2, \dots, k_{\max}$ (siendo k_{\max} el máximo número de productos que la grúa manipula).

Si un programa es factible para dos productos 1 y k, pasados k períodos, el mismo programa será factible para cualquier par de productos elaborados durante el mismo número de períodos, tal como habían mostrado Shapiro y Nuttle (1988). Además, incluso no es necesario comparar el orden de dos operaciones $R(i,1)$ y $R(j,k)$, si $j \geq i$, ya que el transporte con rango i de un producto no puede interferir sobre el transporte con rango j superior del siguiente producto.

Algoritmo

La estrategia, basada en que existen pocas configuraciones factibles de las secuencias posibles de movimientos de la grúa, se desarrolla en 2 partes:

- la primera parte usa la programación lógica con restricciones en Prolog para obtener configuraciones factibles (y las correspondientes cotas para todas las variables);
- la segunda parte usa las facilidades en la enumeración de Prolog para encontrar la mejor solución en el conjunto fuertemente restringido de configuraciones factibles anteriores.

Para evitar probar todas las configuraciones de tareas de la grúa, se desarrolla una estrategia de resolución heurística basada en una enumeración de valores para los índices i, j y k, introduciendo primero las restricciones más limitativas en el espacio de soluciones. Esta heurística compara los intervalos caracterizados por las fechas más tempranas y más tardías para el inicio de viajes de la grúa, límites de los intervalos expresados por:

$$I(i,1) = [t_{\min}(i), t_{\max}(i)]$$

$$I(j,k) = [t_{\min}(j)+k.TC_{\min}, t_{\max}(j)+k.TC_{\max}]$$

El análisis de las diferentes interacciones entre todos los intervalos $I(i,1)$ e $I(j,k)$ puede presentar tres casos distintos:

1. Cuando se produce una intersección vacía o relativamente corta de tiempo entre dos de dichos intervalos:

$$t_{\min}(i) < t_{\min}(j)+k.TC_{\min} \tag{3.40}$$

$$t_{\max}(i) < t_{\max}(j)+k.TC_{\max} \tag{3.41}$$

$$t_{\max}(i) - [t_{\min}(j)+k.TC_{\min}+f(j)] < e(j+1,i) \tag{3.42}$$

o bien:

$$t_{\min}(i) > t_{\min}(j)+k.TC_{\min} \tag{3.43}$$

$$t_{\max}(i) > t_{\max}(j)+k.TC_{\max} \tag{3.44}$$

$$[t_{\max}(j)+k.TC_{\max}] - [t_{\min}(i)+f(i)] < e(i+1,j) \tag{3.45}$$

En estos casos, el orden de ambas operaciones $R(i,1)$ y $R(j,k)$ está claramente definido. Para la primera configuración, el programa escogerá (3.38), y para la segunda, (3.39).

La restricción correspondiente a estos casos se añade en primer lugar al sistema matemático, dado que dichas tareas están definitivamente ordenadas, y así se puede restringir el espacio de búsqueda de soluciones.

2. La segunda intersección posible, con un solape mayor, se caracteriza por las siguientes inecuaciones:

$$t_{\min}(i) \leq t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} \leq t_{\max}(i) \quad (3.46)$$

$$t_{\max}(i) < t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max} \quad (3.47)$$

$$t_{\max}(i) - [t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} + f(j)] \geq e(j+1, i) \quad (3.48)$$

o bien:

$$t_{\min}(i) \leq t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max} \leq t_{\max}(i) \quad (3.49)$$

$$t_{\min}(i) > t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} \quad (3.50)$$

$$[t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max}] - [t_{\min}(i) + f(i)] \geq e(i+1, j) \quad (3.51)$$

Para la primera configuración, se puede suponer que la operación $R(i,1)$ debería preceder a $R(j,k)$ posiblemente, así que se añade en principio la relación (3.38) al sistema. Pero, si durante la resolución con dicha restricción, el conjunto de restricciones se convierte en inconsistente, se permite la posibilidad de modificar la elección y sustituirla por (3.39), usando *backtracking*. En el segundo caso, las restricciones se utilizan en el orden opuesto.

3. Finalmente, el tercer tipo de interacciones corresponde a solapes completos de los intervalos:

$$t_{\min}(i) \leq t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} \leq t_{\max}(i) \quad (3.52)$$

$$t_{\min}(i) \leq t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max} \leq t_{\max}(i) \quad (3.53)$$

o bien:

$$t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} \leq t_{\min}(i) \leq t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max} \quad (3.54)$$

$$t_{\min}(j) + k \cdot TC_{\min} \leq t_{\max}(i) \leq t_{\max}(j) + k \cdot TC_{\max} \quad (3.55)$$

En estos casos, no queda claro qué operación, $R(i,1)$ o $R(j,k)$, precede a la otra. Así que la restricción se escoge arbitrariamente: por ejemplo, primero (3.38), y si no, (3.39).

En resumen, el algoritmo fija en primer lugar las restricciones correspondientes a la primera situación, donde no hay posible elección; seguidamente, las restricciones del segundo grupo de situaciones, donde la selección casi se apunta, y finalmente, las restricciones del tercer tipo de relaciones entre intervalos. Así, resulta más provechosa la propagación de restricciones.

En el artículo, después de la descripción de la experiencia computacional, se apuntaba un posible análisis del conjunto de las soluciones para conducir a mejores heurísticas, que agilizaran el proceso de resolución. Por otro lado, se planteaba un uso dinámico del conjunto de soluciones, que permitiera considerar cierta incertidumbre en los tiempos de ciclo, y se apuntaba el desarrollo de la aplicación al caso con más de una grúa, artículo ya publicado por Varnier, Bachelu y Baptiste (1997).

3.2.3. Los grafos como soporte de modelos

Chen, Chu y Proth (1995) presentan un algoritmo *branch and bound*, cuya eficiencia depende estrechamente de la calidad de cotas inferiores. Esto supone encontrar el tiempo de ciclo óptimo en el caso cíclico, utilizando propiedades analíticas sobre el modelo, que permiten eliminar soluciones dominadas o infactibles. Así, dado que se plantea una clase específica de problemas de programación lineales, se evalúan los tiempos de ciclo de dichos problemas en **grafos bi-evaluados**. Se trabaja tomando un modelo que sigue las hipótesis de Phillips y Unger (1976).

Variables

Sea $C=\{c(0), c(1), \dots, c(m)\}$ la distribución inicial de objetos en el ciclo, con:
 $c(i)=1$, si la estación $S(i)$ contiene un objeto a inicio de ciclo y
 $c(i)=0$, en caso contrario.

Sea $K(C)$ el número de objetos transportados por la grúa en el ciclo:

$$K(C)=\sum_{i=0}^m c(i) \quad (3.56)$$

Sea $L=\{l(0), l(1), \dots, l(m)\}$ con $l(i) \in \{0, 1, \dots, m-1, m\}$ la secuencia de movimientos correspondiente a un programa cíclico.

Notación del programa matemático

Función objetivo

$$[\text{MIN}] \text{ TC} \quad (3.57)$$

Restricciones de tanque (ventana temporal)

$$a(i) \leq t(i) + c(i) \cdot \text{TC} - t(i-1) - f(i-1) \leq b(i) \quad i=1, \dots, m \quad (3.58)$$

Restricciones de tanque lleno a inicio de ciclo

$$t(i) + f(i) + e(i+1, i-1) \leq t(i-1) \quad i \text{ tal que } c(i)=1 \quad (3.59)$$

El movimiento i -ésimo se debe realizar antes que el movimiento $(i-1)$ -ésimo si y sólo si $c(i)=1$.

Restricciones de grúa

$$t(l(i)) + f(l(i)) + e(l(i)+1, l(i+1)) \leq t(l(i+1)) \quad 0 \leq i \leq m-1 \quad (3.60)$$

$$t(i) + f(i) + e(i+1, 0) \leq t(l(m)) + f(l(m)) + e(l(m)+1, 0) \leq \text{TC} \quad 0 \leq i \leq m \quad (3.61)$$

Las restricciones (3.61) complementan a (3.60) para el caso del último movimiento de un ciclo.

Cota superior del número de objetos simultáneos

Sea k el número de objetos que una grúa puede tratar en un ciclo, TC el tiempo de ciclo y $d(i)$ el tiempo de tratamiento en la estación i , se cumplen las siguientes propiedades:

$$TC \geq \sum_{i=0}^m f(i) + \min_{1 \leq i \leq m} e(i,0) \quad (3.62)$$

La desigualdad (3.62) implica que el tiempo de ciclo debe ser como mínimo la suma de tiempos de transporte de la grúa más el tiempo mínimo para que la grúa vuelva a la estación de carga (primer movimiento de un ciclo).

$$k \cdot TC \geq \sum_{i=0}^m f(i) + \sum_{i=1}^m d(i) + e(m+1,0) \quad (3.63)$$

$$(k-1) \cdot TC \leq \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + \sum_{i=1}^m d(i) - e(1,m) \quad (3.64)$$

La desigualdad (3.63) refleja que un objeto introducido previamente en el sistema lo abandonará antes de finalizar el k -ésimo ciclo, mientras que la desigualdad siguiente (3.64) añade que dicho objeto abandonará el sistema después de finalizar el $(k-1)$ -ésimo ciclo, ya que el movimiento sobre la estación m se realiza durante el k -ésimo ciclo.

$$a(i) \leq d(i) \leq b(i) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.65)$$

$$d(i) \leq TC - f(i-1) - f(i) - e(i+1,i-1) \leq b(i) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.66)$$

Las habituales desigualdades (3.65) reflejan la ventana temporal de cada estación i , y las (3.66) suponen que el tiempo de ciclo será mayor o igual que la suma de tiempos de movimientos partiendo de las estaciones $i-1$ e i más el viaje de vuelta de la grúa desde $i+1$ hasta $i-1$.

Dado que $k \in \{1,2,\dots,m\}$, K_{max} (la cota superior de k) se puede obtener resolviendo las inecuaciones (3.62) a (3.66) para $k = m, m-1, \dots$ y así sucesivamente, hasta que se cumplan y se obtenga K_{max} .

Algoritmo

El algoritmo de *branch and bound* propuesto resuelve problemas de programación lineal siguiendo dos procedimientos:

- **Procedimiento A:** enumera todas las posibles distribuciones de objetos en un ciclo de movimientos de la grúa.
- **Procedimiento B:** enumera todas las posibles secuencias de movimientos de la grúa para distribuciones iniciales de objetos potencialmente factibles en un ciclo de movimientos de la grúa.

Dada una distribución inicial de objetos C_k , en un vértice del árbol, una cota inferior del tiempo de ciclo se obtiene relajando las restricciones de ventana temporal (3.58) y las de capacidad del tanque (3.59), correspondientes a las estaciones en que $c(i)$ no es conocida, más las restricciones de capacidad de la grúa (3.60 y 3.61). Si para este problema relajado no hay solución, la distribución inicial parcial no conduce a programas cíclicos factibles, y puede eliminarse el vértice. En caso contrario, se dispone de una cota inferior del tiempo de ciclo. En caso que $K(C_k)$ sea mayor que K_{max} , también se puede eliminar el vértice.

Cuando el procedimiento **A** alcanza una distribución inicial C potencialmente factible, si la solución del problema $P(C)$ satisface las restricciones (3.60 y 3.61), la solución es un programa cíclico óptimo para la distribución inicial C .

En el procedimiento **B**, cada vértice se asocia a un conjunto de restricciones de precedencia entre movimientos consecutivos de grúa, llamado O , junto a las restricciones del problema $P(C)$, que pasa a denominarse vértice (C,O) . Si para un problema $P(C,O)$ no hay solución, esto no conduce a programas cíclicos factibles, y el vértice puede eliminarse. En caso contrario, se dispone de una cota inferior del tiempo de ciclo.

Si la solución de un problema $P(C,O)$ satisface las condiciones (3.60 y 3.61), se obtiene un programa cíclico factible. En caso contrario, a partir de dicho vértice (C,O) se crean dos subvértices al añadir a O , bien la restricción de precedencia entre las actividades i y j , o viceversa.

El número de elementos de O está acotado superiormente por: $UB(O) = (m-1) \cdot m/2 - (m-1)$, siendo $(m-1) \cdot m/2$ el número máximo de restricciones de precedencia para m movimientos y $m-1$ el número de restricciones de precedencia fijadas por restricciones del problema $P(C)$.

Utilización de algoritmos basados en caminos de los grafos

Cada uno de los problemas lineales anteriores contenía inecuaciones lineales del tipo:

$$t(j) - t(i) + h(j,i) \cdot TC \geq l(j,i) \quad (3.67)$$

para $h(j,i) \in \{-1,0,1\}$ y $l(j,i) \in \mathcal{R}$, que pertenece al conjunto de números reales. Se propone un algoritmo de caminos en grafos que calcula el tiempo de ciclo en grafos bi-evaluados.

Grafos bi-evaluados

Un grafo bi-evaluado está formado por una tupla $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{A},l,h)$, donde \mathbf{V} es el conjunto de vértices, \mathbf{A} es el conjunto de arcos, l define las longitudes de los arcos ($l:\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{R}$) y h las alturas de los arcos ($h:\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{R}$). El inicio y el final de los arcos en \mathbf{G} corresponden a vértices

distintos, aunque pueden solaparse dos arcos con los mismos vértices inicial y final. No existen bucles.

Sea $L(p)$ la longitud de un circuito p en un grafo bi-evaluado G y $H(p)$ su altura. El tiempo de ciclo en un grafo bi-evaluado G se define como el valor óptimo TC^* del problema P , si éste tiene solución el problema:

$$\begin{aligned} & [\text{MIN}] \quad TC & (3.68) \\ & \text{sujeto a} \end{aligned}$$

$$L(\gamma) - TC \cdot H(\gamma) \leq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (3.69)$$

$$TC \geq 0 \quad (3.70)$$

donde Γ es el conjunto de circuitos elementales.

Si todos los arcos en un grafo bi-evaluado tienen alturas no negativas y todos los circuitos elementales tienen alturas positivas, entonces: $TC^* = \max(\gamma \in \Gamma) L(\gamma)/H(\gamma)$. En cambio, un grafo bi-evaluado con alturas negativas puede indicar que la secuencia no tenga solución.

Grafos para los problemas $P(C_k)$ y $P(C,O)$

Cualquier programa lineal con una función objetivo TC y restricciones del tipo:

$$t(j) - t(i) + h(j,i) \cdot TC \geq l(j,i) \quad (3.71)$$

donde $h(j,i) \in \mathbb{Z}$ y $l(j,i) \in \mathbb{R}$, puede transformarse en un problema que halla el objetivo TC en un grafo bi-evaluado. Para un problema $P(C_k)$ o $P(C,O)$, el grafo bi-evaluado se define mediante:

- Vértices ($n=m+1$): $V = \{0, 1, \dots, m\}$
- Para cada restricción $a(i) \leq t(i) - t(i-1) - f(i-1) \leq b(i)$:
se define un arco del vértice i al vértice $i+1$ con longitud $a(i) + f(i-1)$ y altura 0; y otro arco del vértice $i+1$ al vértice i con longitud $-b(i) - f(i-1)$ y altura 0.
- Para cada restricción $a(i) \leq t(i) + TC - t(i-1) - f(i-1) \leq b(i)$:
se define un arco del vértice i al vértice $i+1$ con longitud $a(i) + f(i-1)$ y altura 1; y otro arco del vértice $i+1$ al vértice i con longitud $-b(i) - f(i-1)$ y altura -1.
- Para cada restricción $t(i) + f(i) + e(i+1, j) \leq t(j)$:
se define un arco del vértice i al vértice j con longitud $f(i) + e(i+1, j)$ y altura 0.
- Para cada restricción $t(i) + f(i) + e(i+1, j) \leq TC$:
se define un arco del vértice i al vértice 0 con longitud $f(i) + e(i+1, 0)$ y altura 1.

Algoritmo para evaluar el tiempo de ciclo en grafo bi-evaluado

Se presenta un algoritmo, basado en el algoritmo del tipo Ford-Bellman, que comprueba la existencia de circuitos de longitud positiva en un grafo, en un grafo bi-evaluado con tiempo de ciclo, y si es necesario, calcula su valor. Un arco $a \in A$ tiene una longitud:

$$l'(LB, a) = l(a) - h(a) \cdot LB \quad (3.72)$$

En consecuencia, se obtiene un nuevo grafo $G'(LB)=(V,A,l')$.

Si $L'(LB, \gamma)$ es la longitud de un circuito $\gamma \in \Gamma$ en $G'(LB)$, entonces:

$$L'(LB, \gamma) = L'(\gamma) - H(\gamma) \cdot LB \quad (3.73)$$

1. Si $L'(LB, \gamma) \leq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow TC^* = LB$
2. Si existe algún circuito $\gamma^+ \in \Gamma$ tal que $L'(LB, \gamma^+) > 0$:
 - a) Si $H(\gamma^+) \leq 0 \Rightarrow L(\gamma^+) - H(\gamma^+) \cdot TC \geq L(\gamma^+) - H(\gamma^+) \cdot LB > 0$ para $\forall TC \geq LB$
(el problema no tiene solución).
 - b) Si $H(\gamma^+) > 0 \Rightarrow TC^* \geq L(\gamma^+) / H(\gamma^+) > LB$ (nueva mejor cota inferior).

Algoritmo de Evaluación de Tiempos de Ciclo (CTE)

$LB = LB_0$ (cota inferior de TC^* para G)

final = no

MIENTRAS (no final)

 Comprobar si hay algún circuito positivo en el grafo $G'(LB)$, usando FLA.

 SI no hay ningún circuito positivo

$TC^* = LB$

 final = sí

 SINO

$\gamma^+ =$ circuito positivo

 finSI

 SI final = no

 SI $H(\gamma^+) \leq 0$

 final = sí

(solución no factible para G)

 SINO

$LB = L(\gamma^+) / H(\gamma^+)$

 finSI

 finSI

finMIENTRAS

Algoritmo Tipo Ford (FLA)

$i=0; v(1)=0; v(k) = -\infty \quad (1 < k \leq n)$

parar = no

MIENTRAS (parar = no)

 SI $i > B'$

 parar = sí

no hay circuito de longitud positiva

 finSI

 PARA $k=1$ hasta $k=n$

 PARA $a \in I(k)$

 SI $v(o(a)) + l'(a) > v(k)$

```

                la(k) = a
            finSI
            pc = comprobar_circuito(k)
            SI pc = Verdadero
                parar = sí          hay circuito de longitud positiva
            SINO
                v(k) = v(o(a)) + l'(a)
            finSI
        finPARA
    finPARA
    i=i+1
finMIENTRAS

```

La complejidad computacional del algoritmo CTE es, en el peor de los casos, $O(n^4 p^2)$, donde n es el número de tanques más 1 ($n=m+1$) y p es el número de arcos del grafo G ($p=3m+1$).

3.2.4. Cotas del problema HSP para el caso cíclico

Ng (1996) plantea la posibilidad de tiempos de movimiento con carga entre tanques no constantes, sino variables en el contexto de un programa lineal entero mixto. Se desarrolla un procedimiento del tipo *branch and bound* para hallar el óptimo. El algoritmo, aplicado sobre una línea cuyo tanque 0 se usa como carga más descarga y sin tanques duplicados (monobaño, monofunción), puede encontrar programas cíclicos óptimos también para casos de otras líneas con diferentes configuraciones en carga y descarga, así como tanques duplicados. Se demuestra que con tiempos de espera de la grúa cargada (*waiting times*) como variables, el tiempo de ciclo es siempre menor o igual que con el caso de ninguna espera (*zero waiting time*).

Se demuestra como el número de contenedores que pueden estar simultáneamente en la línea depende de las magnitudes relativas a los tiempos mínimo y máximo de remojo, los tiempos de movimiento de grúa y los tiempos de movimiento entre tanques. Así, se determina que el número óptimo de contenedores en una línea (n^*) está acotado por:

$$n^* \leq \text{MIN} \{ \text{UB}(\tau) / \text{UB}(\text{TC}) + 1, m \} \quad (3.74)$$

Dado que el tiempo de cálculo necesario para hallar el óptimo de un problema depende en gran medida del ajuste o bondad de las cotas generadas, se formulan tres cotas inferiores y una cota superior para el tiempo de ciclo óptimo. Para ello, se obtienen expresiones para determinar el conjunto de tanques que debe visitar un contenedor durante un ciclo, dado un número de contenedores en una línea (m). Dichos conjuntos de movimientos consecutivos con carga entre tanques en un mismo ciclo son mutuamente exclusivos y conjuntamente exhaustivos.

La primera cota inferior se obtiene al considerar que la grúa debe realizar todos los transportes entre tanques con carga y además debe desplazarse en vacío a otro tanque, con

carga pendiente de ser trasladada, o bien permanecer en el tanque destino durante el tiempo mínimo establecido.

$$LB_1 = \sum_{i=0}^m [f(i) + \gamma(i)] \quad (3.75)$$

donde $\gamma(i) = \text{MIN} \{ \text{MIN}_{j \neq i+1} [e(i+1, j)], a(i+1) \}$. $\gamma(i)$ es el menor tiempo necesario para que la grúa pueda empezar el siguiente movimiento al de recoger un objeto del tanque i .

La segunda cota inferior propuesta aparece de la relajación del programa lineal, dado un número de contenedores y su posición al iniciar el ciclo, cuando no se consideran las variables enteras, es decir, sin considerar que la grúa puede realizar un solo movimiento a la vez.

$$LB_2 = \text{MAX}_{j=1, \dots, n} \left[\frac{1}{j} \left\{ \sum_{i=V_j+1}^{V_{j+1}} f(i-1) + \sum_{i=V_j+1}^{V_{j+1}-1} a(i) + e(V_{j+1}, 0) \right\} \right] \quad (3.76)$$

donde V_j es el conjunto de tanques desde los cuales se extrae el objeto j -ésimo en la línea al iniciar un ciclo de movimientos de la grúa durante el mismo ciclo.

Finalmente, la tercera cota inferior prescinde de la asistencia de la grúa a los movimientos de otros baños que contengan otros contenedores que no sean el que visita ese baño. Esto permite establecer unos tiempos de inicio de movimientos que vienen fijados por los tiempos mínimos de las ventanas temporales:

$$LB_3 = \text{MAX}_{j=1, \dots, n} \left[t(k) + \sum_{i=k+1}^{V_{j+1}} f(i-1) + \sum_{i=k+1}^{V_{j+1}-1} a(i) + e(V_{j+1}, 0) \right] \quad (3.77)$$

donde dado $t(i)$, $i \in \{V_j, V_{j+1}, \dots, k\}$ y $k \in \{V_j, V_{j+1}, \dots, V_{j+1}-1\}$.

La cota superior procede del ciclo factible con un solo contenedor tratado por ciclo:

$$UB_1 = \sum_{i=1}^{m+1} [f(i-1) + a(i)] \quad (3.78)$$

donde $a(m+1)$ es el tiempo de descarga mínimo (en principio, considerado nulo).

La fórmula 3.78 es válida en caso que se concentre en un mismo punto la carga y descarga de los objetos o contenedores. En caso de localizaciones separadas para la carga y la descarga, debe sumarse el tiempo de desplazamiento de la grúa en vacío entre ambas estaciones (de carga y de descarga):

$$UB_1' = \sum_{i=1}^m [f(i-1) + a(i)] + f(m) + e(m+1, 0) \quad (3.79)$$

La estrategia de ramificación parte de la enumeración de los valores del número de contenedores y sus posiciones a inicio del ciclo, para establecer posibles secuencias de movimientos entre tanques. En primer lugar, se ramifica en orden creciente del posible número de contenedores y en segundo lugar, en función de las posiciones de cada uno de los contenedores. El árbol se va ramificando en función del contenedor asociado a cada movimiento con carga, es decir, el siguiente nivel de la ramificación contiene tantos vértices como contenedores candidatos a dicho movimiento en la secuencia de movimientos del ciclo de la grúa. Para cada vértice, se plantea un programa lineal con $3m+n+3$ restricciones y $2m+2$ variables.

3.2.5. Observación final

Como observación final antes de plantear la visión propia del problema cabe notar un aspecto que se ha tomado como criterio: la colocación de índices, como es el número de tanque i . Se ha realizado de la siguiente forma:

- en las aportaciones de otros autores, hasta este capítulo, entre paréntesis, como por ejemplo $a(i)$;
- en las aportaciones propias, a partir del siguiente capítulo como subíndice, como por ejemplo a_i .

4. ESTUDIO SOBRE LA VARIANTE MONOBAÑO, MONOFUNCIÓN, MONOGRÚA. ALGORITMOS BÁSICOS

4.1. Hipótesis de la variante

A partir de este capítulo se inicia el estudio del caso caracterizado por tanques **monobaño** y **monofunción**, disponiendo de **monogrúa**. Las hipótesis necesarias para la variante $1B,1F/1/1/U,\cup$ o bien $1B,1F/1/1/U,\cap$, indistintas a efectos del modelo a plantear, son las siguientes:

1. El tiempo de proceso para la estancia de un objeto en cada estación debe estar entre los valores de un intervalo dado (entre un valor de tiempo mínimo y otro de tiempo máximo).
2. El transporte de los objetos lo realiza una única grúa, que se desplaza a lo largo de un carril, cuya misión consiste en tomar y dejar los objetos en las diferentes estaciones.
3. Se considera que la operación de transporte no se puede interrumpir.
4. La etapa de carga (que se produce en la considerada estación 0) siempre dispone de objetos preparados al llegar la grúa.
5. Un tanque cualquiera i debe estar vacío cuando vaya a depositarse un objeto por parte de la grúa.
6. Todos los tanques están ordenados en la línea de producción siguiendo las etapas del proceso, lo que implica que en el tanque i se realiza la operación i -ésima. Después de visitar el tanque i , un objeto debe pasar al tanque $i+1$.
7. Todos los objetos tratados corresponden a un mismo producto, son idénticos y siguen una misma ruta.

4.2. Determinación de una secuencia cíclica

Como se demuestra en Shapiro y Nuttle (1988), la resolución de un caso con una sola grúa, monobaño, monofunción y con productos homogéneos ($1B,1F/1/1/-$) comporta hallar una **secuencia cíclica**. Así, el objetivo del algoritmo a plantear consiste en minimizar el tiempo de ciclo de un conjunto de órdenes homogéneas que deben pasar por m etapas, con restricciones de ventana, con un tanque asignado para cada una de las cuales, mediante un único puente-grúa o robot transportador.

Tal como ya razonan Phillips y Unger (1976), durante un ciclo de movimientos la grúa debe visitar a un tanque para recoger un objeto, bien éste haya sido depositado durante aquel mismo ciclo de movimientos (que empieza con el movimiento de toma de un nuevo objeto de la estación de carga) o en un anterior ciclo de movimientos.

Al plantear como objetivo describir la ruta de la grúa en la línea de producción, una **secuencia cíclica (H,T)** se define a partir de dos vectores de m componentes (el primero de los cuales enumera una posible secuencia de visitas de la grúa a los tanques, y el segundo evalúa el instante de recogida de los objetos en las citadas visitas):

1. Una secuencia de operaciones de la grúa, que indica el orden de movimientos:

$$\mathbf{H} = \langle h[0], h[1], \dots, h[k], \dots, h[m] \rangle$$

2. Los instantes de tiempo de inicio de cada uno de los movimientos de la secuencia:

$$\mathbf{T} = \langle t[0], t[1], \dots, t[k], \dots, t[m] \rangle$$

El vector de operaciones \mathbf{H} , si bien es una variable del problema, ya que la secuencia de operaciones influye directamente sobre el vector de tiempos \mathbf{T} .

Sean:

h_i : movimiento de transporte del objeto de la estación i a la estación siguiente $i+1$, para $0 \leq i \leq m$;

t_i : tiempo de inicio del movimiento h_i (entre las estaciones i e $i+1$), $0 \leq i \leq m$.

Tal como se plantea el problema y la solución a hallar, se trata de repetir continuamente los movimientos en un determinado orden. Así pues, el vector \mathbf{H} de la secuencia que describe el recorrido de la grúa es una permutación circular de $m+1$ estaciones, como también apunta Shapiro y Nuttle (1988).

Por ejemplo, para una supuesta línea de producción con 2 estaciones ($m=2$), con los movimientos de la grúa, tal como se han definido, a las estaciones 0, 2, 1, 0, 2, 1 y así sucesivamente (representado por $\langle 0,2,1,0,2,1,0,2,\dots \rangle$ o por $\langle h_0,h_2,h_1,h_0,h_2,h_1,h_0,h_2,\dots \rangle$), las siguientes secuencias se consideran equivalentes:

$$\langle h_0,h_2,h_1 \rangle \equiv \langle h_2,h_1,h_0 \rangle \equiv \langle h_1,h_0,h_2 \rangle.$$

Véase la figura 4.1. En primer lugar, aparece el movimiento h_0 , consistente en extraer la pieza de la estación 0, seguido de los movimientos h_2 y h_1 , que suponen desplazar la pieza que originalmente estaba en la estación 2 y la que ha sido depositada en la estación 1. Así, al producirse de nuevo el movimiento h_0 , las condiciones son idénticas a las iniciales. También se observa como, de nuevo, la disposición de las piezas y la grúa (cuyos movimientos se indican con flechas) para los segundos movimientos h_2 y h_1 coincide con la disposición de las piezas y la grúa de los primeros movimientos citados.

Los objetos se representan con bolas verdes depositadas en los baños; los movimientos de la grúa con carga entre dos tanques consecutivos se reflejan con flechas azules y los movimientos de la grúa sin carga entre tanques, con flechas rojas.

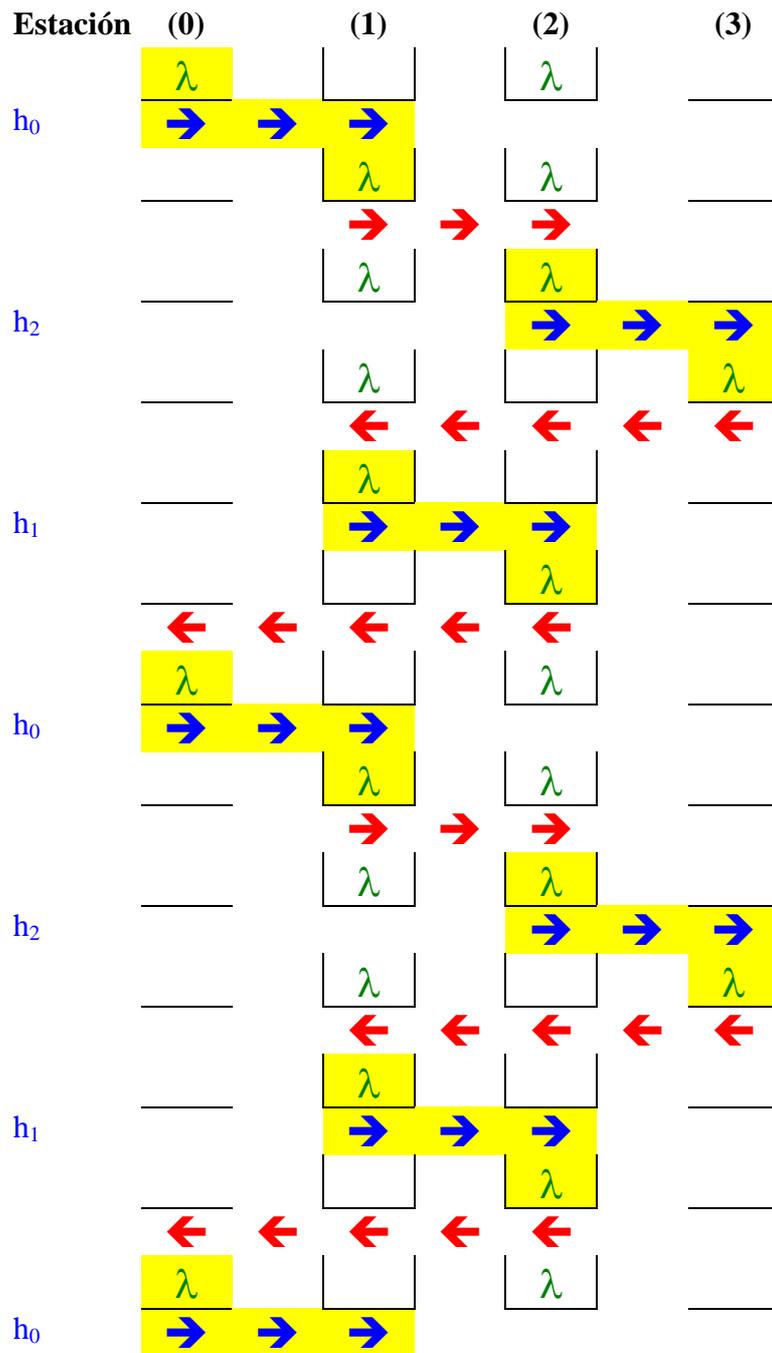


Figura 4.1. Representación gráfica del vector \mathbf{H} como una permutación circular.

Consideraciones adicionales

- Se tomará como referencia de inicio de la secuencia cíclica de movimientos de la grúa el instante en que la grúa recoge un objeto de la estación de carga (estación 0):

$$h[0] = 0 \tag{4.1}$$

$$t[0] = 0 \tag{4.2}$$

- La notación para el movimiento k-ésimo se describirá de la siguiente manera:

$$h[k] = h_i \quad (4.3)$$

$$t[k] = t_i \quad (4.4)$$

indica que la operación k -ésima de la grúa se corresponde con aquélla en que se retira un objeto del baño i de la línea de producción. Así, ordenando los instantes del vector \mathbf{T} según el índice k , se dispone de éstos en orden creciente: $t[0] < t[1] < \dots < t[m]$.

- El tiempo del ciclo de movimientos de la grúa viene determinado por el instante en que la grúa empiece a realizar su movimiento $m+1$ desde que inició que el ciclo, que debe corresponder con el inicio del primero de los movimientos del siguiente ciclo, es decir:

$$TC(H,T) = t[m+1] \quad (4.5)$$

4.3. Programa lineal PL(H) asociado a una secuencia cíclica H

Al plantear la evaluación de un vector de tiempos \mathbf{T} para una secuencia cíclica de movimientos de grúa propuesta, se debe presentar los datos de partidas, las restricciones propias del problema y el objetivo. Dada la linealidad de las restricciones y la función objetivo, se observa que se trata de un programa lineal.

4.3.1. Parámetros del problema y secuencia propuesta

Los **datos** de partida o parámetros del programa lineal para resolver el caso planteado son los siguientes:

- Duraciones de la ventana temporal de estancia de los objetos en los tanques:

$$\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Se utilizan a_i y b_i , como notación original de Phillips y Unger (1976), bastante extendida en los demás autores. En general, se dispone de dos vectores $\mathbf{A} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

- Tiempos de movimiento de la grúa para desplazarse entre diferentes tanques:

- con carga: $\mathbf{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, m$
- sin carga: $\mathbf{e}_{i,j} \quad 0 \leq i, j \leq m+1$

En este caso, existe menos parecidos entre los diversos autores, algunos con supraíndices, y se ha optado por f_i y $e_{i,j}$ como abreviatura de *full transport* y *empty transport*. En general, se dispone de un vector $\mathbf{F} = \langle f_0, f_1, \dots, f_m \rangle$ y la matriz \mathbf{E} , de dimensiones $(m+2) \cdot (m+2)$, si bien es suficiente $(m+2) \cdot (m+1)$ por la propiedad de simetría de los datos, presentada en el capítulo anterior.

- Secuencia de movimientos:

$$\mathbf{H} = \langle h[0]=h_0, h[1], \dots, h[m] \rangle$$

Finalmente, como variables a lo largo de la resolución del problema, en función de la secuencia a evaluar, se debe determinar una secuencia de movimientos parcial o completa de la grúa, y se utiliza h_i para referirse a los movimientos de la grúa, en inglés *hoist movements*.

4.3.2. Variables a determinar en el problema

Relacionado con este último vector de datos de entrada, la posible secuencia de los movimientos de la grúa, aparece un vector de **variables** del programa lineal, los instantes de tiempo de inicio de los movimientos, a las cuales debe añadirse el valor del tiempo necesario para adoptar nuevamente la posición como punto de partida de la secuencia de movimientos.

- Tiempo de inicio de movimientos:

$$\mathbf{T} = \langle t[0], t[1], \dots, t[m] \rangle$$

- Tiempo de ciclo:

$$\mathbf{TC}(\mathbf{H}, \mathbf{T}) = t[m+1]$$

En total, suman $m+1$ variables, de las cuales m proceden del vector \mathbf{T} , pues $t[0]$ queda predeterminado por hipótesis, más la variable del siguiente movimiento $m+1$, que culmina el ciclo.

4.3.3. Restricciones del problema

Al plantear una secuencia de movimientos de grúa, el problema presenta dos grupos de restricciones claramente diferenciadas: las restricciones de tiempo de los tanques y las restricciones de tiempo de la grúa.

R1. Restricciones del tiempo de proceso de un objeto en un tanque

Este conjunto de limitaciones depende de la secuencia de movimientos de la grúa, del tiempo de movimiento de la grúa con carga entre estaciones y de las restricciones de ventana asociadas a dicho baño.

Sea una secuencia de movimientos: $\mathbf{H} = \langle \mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j, \dots, \mathbf{h}_{[m]} \rangle$ donde $\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_{[m]}$ son tanques cualesquiera, diferentes de 0 y entre sí, que la grúa visitará siguiendo el orden indicado en la secuencia de movimientos establecida. Sea el vector de tiempos asociado a la anterior secuencia: $\mathbf{T} = \langle t_0, \dots, t_i, t_j, \dots, t_{[m]} \rangle$. Según la notación expuesta, cuando la grúa recoja un objeto del tanque i en el instante t_i , la llevará al tanque $i+1$. A continuación, se dirigirá en vacío al tanque j , donde recoge un objeto en el instante t_j , y así sucesivamente.

Dentro de este grupo de restricciones, cabe distinguir dos tipos:

R1.1 (operaciones monociclo): Este tipo de restricción corresponde con la situación que el tanque i no contiene ningún objeto en el instante de inicio del ciclo, es decir, que en un mismo ciclo la grúa visita antes al tanque $i-1$ que al tanque i . En caso que se cumpla esta condición, la restricción de tanque i asociada toma la siguiente forma:

$$a_i \leq t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i \quad (4.6)$$

Si se analiza la expresión, el término central es la duración del tratamiento en el baño i calculado como el instante de recogida del objeto (t_i) menos el instante en que se depositó, obtenido asimismo como el instante de recogida del objeto en el anterior tanque $i-1$ (t_{i-1}) más el tiempo de traslado entre ambos (f_i). Éste debe estar comprendido entre los límites que marcan la restricción de ventana asociada al tanque i (a_i , b_i).

R1.2 (operaciones biciclo): Este tipo de restricción corresponde con la situación que el tanque i contiene un objeto en el instante de inicio del ciclo, es decir, que en un mismo ciclo la grúa visita antes al tanque i que al tanque $i-1$. En caso de cumplir dicha condición, la restricción de tanque i asociada toma la siguiente forma:

$$a_i \leq t_i + TC - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i \quad (4.7)$$

Analizando la expresión, se observa como para calcular la duración del tratamiento en el baño i en el término central, se debe sumar el tiempo de ciclo (**TC**) al instante de recogida del objeto en el anterior tanque $i-1$ (t_{i-1}) más el tiempo de traslado entre ambos (f_i), para hallar el instante en que se depositó el objeto restado del instante de recogida del objeto (t_i). Nuevamente, esta duración debe estar comprendida entre los límites que marcan la restricción de ventana asociada al tanque i (a_i , b_i).

R2. Restricciones de tiempo de desplazamiento de una grúa

Este conjunto de limitaciones, provocadas por los tiempos de viaje de la grúa, dependen de la secuencia de movimientos de la grúa, del tiempo de movimiento de la grúa con y sin carga entre estaciones e indirectamente de las restricciones de ventana en los baños. En definitiva, relacionan la temporalidad para dos movimientos de grúa consecutivos.

Sea una secuencia de movimientos: $\mathbf{H} = \langle \mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j, \dots, \mathbf{h}_{[m]} \rangle$ y el vector de tiempos asociado a la anterior secuencia: $\mathbf{T} = \langle \mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \dots, \mathbf{t}_{[m]} \rangle$, tal como fueron definidos. Según la notación y las hipótesis expuestas, cuando la grúa recoja un objeto del tanque i en el instante \mathbf{t}_i , la llevará al tanque $i+1$. A continuación, se dirigirá en vacío al tanque j , donde recoge un objeto en el instante \mathbf{t}_j , y así sucesivamente.

R2.1 (movimientos internos de ciclo): Según la notación expuesta, el tiempo entre los instantes \mathbf{t}_i , cuando la grúa recoja un objeto del tanque i que llevará al tanque $i+1$,

hasta que recoja el siguiente objeto del tanque j en el instante t_j , debe ser como mínimo:

$$t_j \geq t_i + f_i + e_{i+1,j} \quad (4.8)$$

La grúa debe tener el tiempo suficiente para recoger el objeto en el tanque i , y efectuar los movimientos de traslado con carga hasta el tanque $i+1$ (f_i) y de traslado en vacío desde el tanque $i+1$ hasta el tanque j ($e_{i+1,j}$).

R2.2 (movimiento interciclos): La relación entre el último movimiento, $[m]$, en un ciclo y el primero del siguiente incluye el tiempo de ciclo (TC), por pertenecer a dos ciclos diferentes:

$$t_0 + TC = t_{[m+1]} \geq t_{[m]} + f_{[m]} + e_{i+1,0} \quad (4.9)$$

El número total de restricciones (de los dos tipos) siempre es proporcional a la dimensión del problema m , es decir, al número de tanques de que se compone la línea. Se trata de $2m$ restricciones de tanque (dos para cada tanque) y de $m+1$ restricciones de grúa (una para cada movimiento del ciclo). Así pues, en total son necesarias $3m+1$ restricciones.

4.3.4. Objetivo del problema

La función objetivo del programa lineal, dado que se pretende que para realizar completamente una secuencia de movimientos de la grúa se requiera un tiempo mínimo, ésta debe plantearse como:

$$[\text{MIN}] TC(H,T) = t_{[m+1]} \quad \text{si } t_0 = t[0] = 0 \quad (4.10)$$

4.3.5. Ejemplo ilustrativo 4.1

El tratamiento de unas piezas en una línea de producción se realiza mediante un proceso que consta de 3 fases. Cada pieza procesada debe permanecer en la estación donde se realice una de las anteriores operaciones durante un tiempo, medido en segundos, comprendido entre un valor mínimo y máximo que se muestran en la siguiente tabla.

Operación	Lavado	Baño de sales	Secado
Tiempo mínimo	30	40	40
Tiempo máximo	50	60	50

Tabla 4.1. Datos del ejemplo 4.1.

Se dispone de una única grúa transportadora que realiza el movimiento de las piezas entre estaciones, además del transporte desde la estación de carga a la estación de lavado y desde la estación de secado a la estación de descarga. El tiempo requerido por la grúa para recoger una pieza en una estación y depositarla en la estación destino es de 10 segundos. En vacío, la grúa se desplaza a una velocidad media de 1 m/s. Todas las estaciones, incluso las de carga y descarga, se encuentran alineadas y equidistan 5 metros.

Resolución para $\mathbf{H} = \langle 0, 2, 1, 3 \rangle$

A continuación, se plantea el programa lineal para la citada secuencia de movimientos \mathbf{H} .

a) Datos:

- Ventana temporal de estancia de los objetos en los tanques:

$$\begin{aligned} a_1 &= 30; b_1 = 50 \\ a_2 &= 40; b_2 = 60 \\ a_3 &= 40; b_3 = 50 \end{aligned}$$

- Tiempos de movimiento de la grúa para desplazarse entre diferentes tanques:

$$\begin{aligned} \text{con carga: } f_i &= 10 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{sin carga: } e_{i,j} &= 5 \cdot |i - j| \quad (0 \leq i, j \leq 4) \end{aligned}$$

- Secuencia de movimientos:

$$\text{por ejemplo, } \mathbf{H} = \langle 0, 2, 1, 3 \rangle$$

Gráficamente, esto implica que a inicio del ciclo de movimientos una pieza se encuentre en la estación 0 o de carga y otra en la estación 2 y la evolución a la presencia de las piezas en los baños a lo largo del ciclo sea la representada en la figura 4.2.

b) Variables:

- Tiempo de inicio de movimientos:

$$T = \langle t[0], t[1], t[2], t[3] \rangle = \langle t_0, t_2, t_1, t_3 \rangle$$

- Tiempo de ciclo:

$$t[4] = \mathbf{TC}$$

Número total de variables = $m+1 = 4$

c) Restricciones:

R1.1 (operaciones monociclo):

$$\begin{aligned} a_1 \leq t_1 - (t_0 + f_0) \leq b_1 & \quad ; & t_1 \geq 30 + 10 = 40 \\ & & t_1 \leq 50 + 10 = 60 \\ a_3 \leq t_3 - (t_2 + f_2) \leq b_3 & \quad ; & t_3 - t_2 \geq 40 + 10 = 50 \\ & & t_3 - t_2 \leq 50 + 10 = 60 \end{aligned}$$

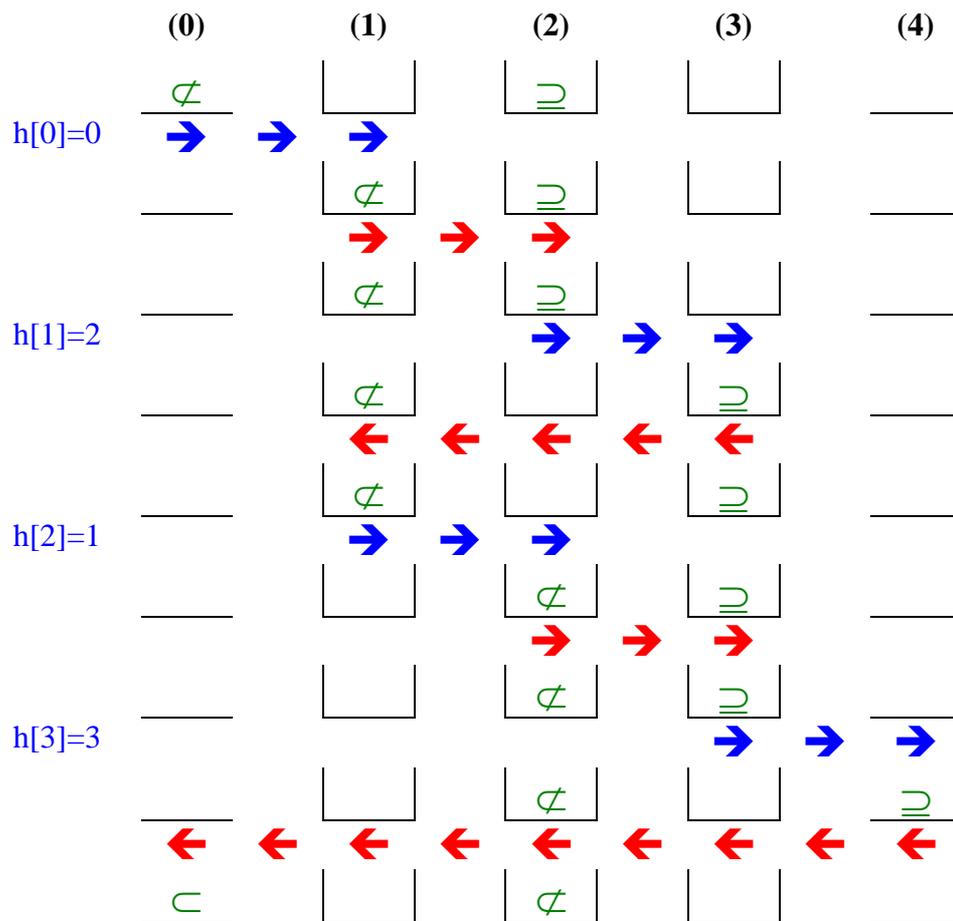


Figura 4.2. Representación gráfica de la secuencia $H=<0,2,1,3>$ del ejemplo.

R1.2 (operaciones bicicleta):

$$a_2 \leq t_2 - (t_1 + TC + f_1) \leq b_2 \quad ; \quad \begin{aligned} t_2 - t_1 - TC &\geq 40 + 10 = 50 \\ t_3 - t_2 - TC &\leq 60 + 10 = 70 \end{aligned}$$

R2.1 (movimientos internos de ciclo):

$$\begin{aligned} t_2 &\geq t_0 + f_0 + e_{1,2} & ; & & t_2 &\geq 10 + 5 = 15 \\ t_1 &\geq t_2 + f_2 + e_{3,1} & ; & & t_1 - t_2 &\geq 10 + 10 = 20 \\ t_3 &\geq t_1 + f_1 + e_{2,3} & ; & & t_3 - t_1 &\geq 10 + 5 = 15 \end{aligned}$$

R2.2 (movimiento interciclos):

$$t_0 + TC \geq t_3 + f_3 + e_{4,0} \quad ; \quad TC - t_3 \geq 10 + 20 = 30$$

Número total de restricciones = $3m+1 = 10$

d) Función objetivo:
[MIN] TC

4.4. Determinación del vector T mediante un grafo asociado al problema: el grafo secuencial

La capacidad de resolución en caso de pretender resolver el problema planteado mediante un paquete comercial de programación lineal está condicionada a los tres intervalos de consumo de tiempo necesarios para la resolución de un ejemplar de problema:

- Intervalo de preproceso: tiempo necesario para exportar desde el programa principal los datos del ejemplar, preprocesados en un formato adecuado al paquete comercial utilizado.
- Intervalo de proceso: tiempo para que el paquete comercial evalúe el programa lineal asociado a la secuencia de movimientos de la grúa seleccionada.
- Intervalo de postproceso: tiempo para finalizar el uso del paquete, guardar los datos obtenidos en ficheros en un formato estándar, cerrar ficheros e importarlos desde el programa principal.

La resolución del programa lineal planteado puede resolverse mediante grafo como alternativa a la utilización de paquetes para programas lineales, al tener asociado el coeficiente 1 todas las variables incógnitas (el vector T y el escalar TC).

Así pues, al trasladar las anteriores restricciones a un grafo, el objetivo se convierte en hallar el camino máximo (entre el nudo que represente el inicio $t[0]$ y el que represente la finalización $t[m+1]$ de movimientos de la grúa en un ciclo) que tenga un valor mínimo.

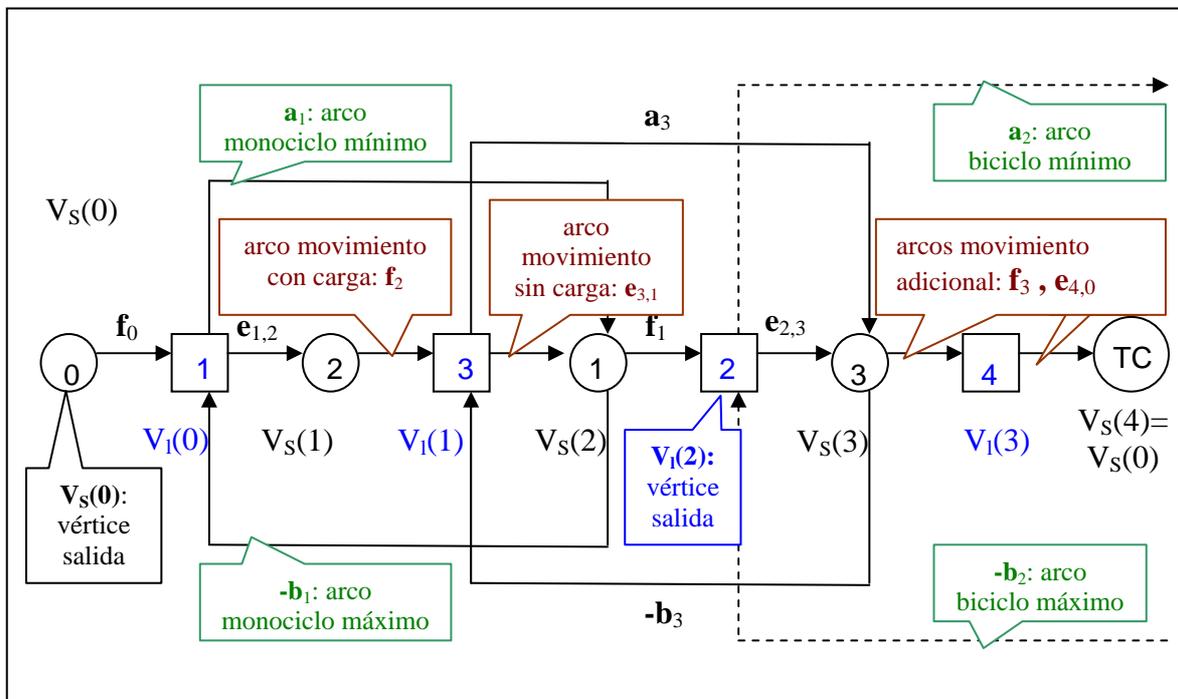


Figura 4.3. Representación de los elementos de ciclo de un grafo secuencial, para la secuencia $H = \langle 0,2,1,3 \rangle$.

Para ello, se utilizará una aplicación del método CPS (*Critical Path Scheduling*), presentada por Fernández (1995) y denominada **MCM** (Método del Camino Mínimo), basada en el algoritmo de Bellman-Kalaba. La variante sobre el método MCM original supone la relajación en la evaluación de algunas restricciones.

4.4.1. Elementos del grafo

Cada uno de los problemas lineales anteriores contiene inecuaciones lineales del tipo:

$$t_j - t_i \geq l_{i,j} \quad (4.11)$$

con $l_{i,j} \in \mathfrak{R}$, que pertenece al conjunto de números reales.

Para que un grafo quede unívocamente descrito, debe definirse el significado de sus elementos principales:

- **V**, el conjunto de vértices;
- **A**, el conjunto de arcos;
- **I**, las longitudes de los arcos ($l: \mathbf{A} \rightarrow \mathfrak{R}$).

λ **Vértices (V)**: Representan las acciones de extracción o deposición de objetos en los tanques, a los que la grúa se desplaza durante un ciclo de movimientos (si la grúa se dirige con carga hacia un tanque, el viaje es para depositar algún objeto, o si la grúa se dirige sin carga, el propósito es recoger algún objeto).

- **Vértices de salida (V_s)**: Los $m+2$ vértices de este tipo se corresponden a tanques de recogida (donde la grúa llega sin carga). En el grafo, se representan siguiendo el orden establecido en el vector $H = \langle h[0]=0, h[1], \dots, h[k], \dots, h[m] \rangle$, añadiendo como último el vértice correspondiente a $h[m+1]=h[0]$:

$$V_s = \{ h[0]=0, h[1], \dots, h[m], h[m+1]=0 \}$$

- **Vértices de llegada (V_l)**: Los $m+1$ vértices de este otro tipo se corresponden a tanques de depósito (donde la grúa llega cargada). En el grafo, se representan siguiendo el orden de movimientos establecido en el vector $H = \langle h[0], h[1], \dots, h[k], \dots, h[m] \rangle$:

$$V_l = \{ h[0]+1=1, h[1]+1, \dots, h[m]+1 \}$$

El orden de los vértices en el grafo siempre viene determinado por la secuencia de movimientos **H**. Además, existe una correspondencia de un vértice de llegada para cada vértice de salida, excepto para el último movimiento **h[m+1]**, que a la vez supone el vértice de inicio del siguiente ciclo, o sea un nuevo **h[0]** en el tiempo.

λ **Arcos:** El número de arcos de un grafo viene determinado por las limitaciones o necesidades temporales por el desplazamiento de la grúa o por la permanencia de los objetos en los baños. Debido a que existen $3m+1$ restricciones el número de arcos del grafo será dicha cantidad:

- **Arcos de operación:** Los $2m$ arcos de este tipo se deben a las ventanas temporales de permanencia de los objetos en los tanques, y pueden producirse por tiempos mínimos necesarios a_i o limitativos máximos b_i .
- **Arcos de movimiento:** Los $2 \cdot (m+1)$ arcos de este tipo son causados por los tiempos necesarios de desplazamientos de la grúa, y pueden dividirse en dos grupos: con carga, cuando contienen tiempos de traslado con algún objeto (f_i); sin carga, cuando son tiempos entre visita de tanques consecutivos por parte de la grúa ($e_{i,j}$).

λ **Longitudes de los arcos:** Dichos valores están asociados a los tiempos que transcurren (motivados por el desplazamiento de la grúa o el tiempo de permanencia de los objetos en los baños):

- **De operación monociclo mínimos:** para cada restricción (4.6), $a_i \leq t_i - (t_{i-1} + f_{i-1})$, se define un arco del vértice de llegada i al vértice de salida i con longitud $a_i + f_{i-1}$.
- **De operación monociclo máximos:** para cada restricción (4.6), $t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i$, se define un arco del vértice de salida i al vértice de llegada i con longitud $-b_i - f_{i-1}$.
- **De operación biciclo mínimos:** para cada restricción (4.7), $a_i \leq t_i + TC - (t_{i-1} + f_{i-1})$, se define un arco del vértice de llegada i al vértice de salida i con longitud $a_i - TC + f_{i-1}$.
- **De operación biciclo máximos:** para cada restricción (4.7), $t_i + TC - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i$, se define un arco del vértice de salida i al vértice de llegada i con longitud $-b_i + TC - f_{i-1}$.
- **De movimiento con carga:** para cada restricción (4.8), $t_j \geq t_i + f_i + e_{i+1,j}$, se define un arco del vértice de salida i al vértice de llegada $i+1$ con longitud f_i .
- **De movimiento sin carga:** para cada restricción (4.8), $t_j \geq t_i + f_i + e_{i+1,j}$, se define un arco del vértice de llegada $i+1$ al vértice de salida j con longitud $e_{i+1,j}$.
- **De movimiento adicional con carga:** para la restricción $t_0 + TC \geq t_{[m]} + f_{[m]} + e_{[m]+1,0}$ (4.9), se define un arco del vértice de salida $[m]$ al vértice de llegada $[m]+1$ con longitud $f_{[m]}$.
- **De movimiento adicional sin carga:** para la restricción $t_0 + TC \geq t_{[m]} + f_{[m]} + e_{[m]+1,0}$ (4.9), se define un arco del vértice de llegada $[m]+1$ al vértice de salida $[m]+1$ con longitud $e_{[m]+1,0}$.

4.4.2. Proceso de resolución

En el procedimiento basado en el MCM (Método del Camino Crítico), el algoritmo de resolución propuesto para calcular los instantes de inicio de los m movimientos de un ciclo de operaciones de la grúa, excepto el movimiento 0 tomado como referencia, la necesidad de utilizar los vértices correspondientes a tres ciclos de movimientos de grúa. Para referirse a dichos tres ciclos se utilizarán los nombres:

- **Ciclo presente:** contiene $m+2$ vértices de salida y $m+1$ vértices de llegada.
- **Ciclo pasado:** contiene $m+2$ vértices de salida y $m+1$ vértices de llegada.
- **Ciclo futuro:** contiene $m+2$ vértices de salida y $m+1$ vértices de llegada.

En total, suman $6m+9$ vértices, aunque el último vértice del ciclo pasado es el primero del ciclo presente y el último del ciclo presente corresponde con el primero del ciclo futuro, lo que implica tan sólo $6m+7$ vértices. La relajación del problema consiste en trabajar solamente con el ciclo presente ($2m+3$ vértices) y considerar que arcos entre vértices de diferentes ciclos, en lugar de incidir sobre vértices de los ciclos pasado o futuro, lo hagan sobre vértices del mismo ciclo presente sumando o restando, según sea el caso, el valor del tiempo de ciclo en aquella iteración del proceso para determinar los valores de los vértices.

Algoritmo Resolver grafo secuencial

```
AUX = 0
itera = 1
t0 = 0
tc = 0

MIENTRAS itera > 0 Y itera < m+1
  cambios = 0
  Analizar el grafo en sentido creciente de tiempo
  tc = tVl(m) + eVl(m), 0
  SI tc > tcbest
    factible = 0
    Salir MIENTRAS
  finSI

  Analizar el grafo en sentido decreciente de tiempo
  tc = tVl(m) + eVl(m), 0
  SI tc > tcbest o t0 > 0
    factible = 0
    Salir MIENTRAS
  finSI

  SI cambios = 0 (todos los valores idénticos)
    Salir MIENTRAS
  finSI
  itera = itera + 1
finMIENTRAS
```

Analizar grafo en sentido creciente de tiempo

$$t_{V_l(0)} = t_{V_s(0)} + f_{V_s(0)}$$

PARA cada movimiento ($1 \leq i \leq m$)

 Buscar vértice de llegada tal que $V_l(j) = V_s(i)$

$$t_{grua} = t_{V_l(i-1)} + e_{V_l(i-1), V_s(i)}$$

 SI se debe inicializar (iteración 1)

$$t_{V_s(i)} = t_{grua}$$

 SINO

 SI es operación monociclo

$$t_{V_s(i)} = \text{MAX} \{ t_{grua}, t_{V_l(j)} + a_{V_s(i)} \}$$

 SINO (es operación biciclo)

$$t_{V_s(i)} = \text{MAX} \{ t_{grua}, t_{V_l(j)} - t_c + a_{V_s(i)} \}$$

 finSI

 finSI

$$t_{V_l(i)} = t_{V_s(i)} + f_{V_s(i)}$$

 SI $t_{V_s(i)} \neq \text{aux}(i)$

$$\text{cambios} = \text{cambios} + 1$$

$$\text{aux}(i) = t_{V_s(i)}$$

 finSI

finPARA

Analizar grafo en sentido decreciente de tiempo

PARA cada movimiento ($m \geq i \geq 0$)

 Buscar vértice de salida tal que $V_s(j) = V_l(i)$

 SI es operación monociclo

$$t_{V_l(i)} = \text{MAX} \{ t_{V_s(i)}, t_{V_s(j)} - b_{V_l(i)} \}$$

 SINO (es proceso biciclo)

$$t_{V_l(i)} = \text{MAX} \{ t_{V_s(i)}, t_{V_s(j)} + t_c - b_{V_l(i)} \}$$

 finSI

$$t_{V_s(i)} = t_{V_l(i)} - f_{V_s(i)}$$

 SI $t_{V_s(i)} \neq \text{aux}(i)$

$$\text{cambios} = \text{cambios} + 1$$

$$\text{aux}(i) = t_{V_s(i)}$$

 finSI

finPARA

4.4.3. Ejemplo de secuencia factible

Utilizando el ejemplo del anterior apartado 4.3.5, y tomando nuevamente como secuencia a evaluar $\mathbf{H} = \langle 0,2,1,3 \rangle$, la representación de dicho grafo según el modelo presentado en el apartado 4.4.1 se corresponde con la figura 4.4.

En la siguiente figura 4.4 se pueden observar los arcos que conectan el ciclo presente con el ciclo pasado y el ciclo futuro, mientras que en la figura 4.5 dichas relaciones se han adaptado a las relaciones entre vértices del mismo ciclo, ciclo presente, lo que supone depender del valor del último vértice TC. Esto puede suponer interrumpir en algún momento el proceso de convergencia absoluta de obtención de TC, por lo cual se habla de problema relajado.

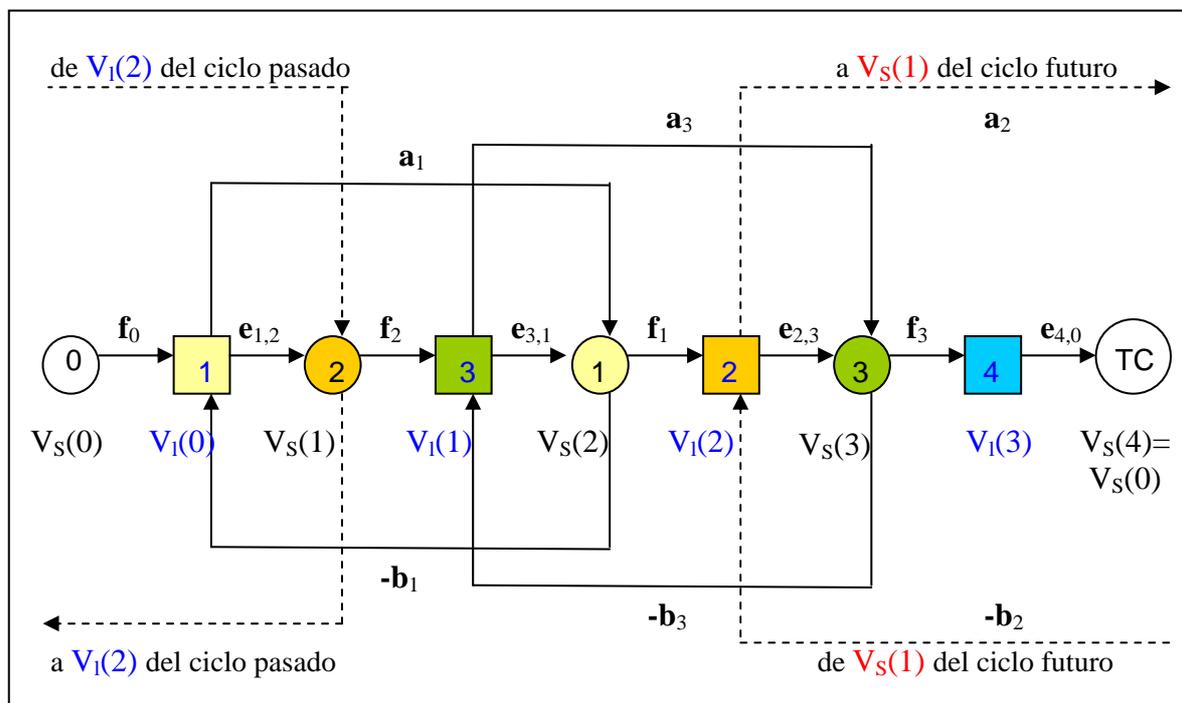


Figura 4.4. Representación del ciclo presente y sus arcos relacionados con los ciclos pasado y futuro para la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,1,3 \rangle$.

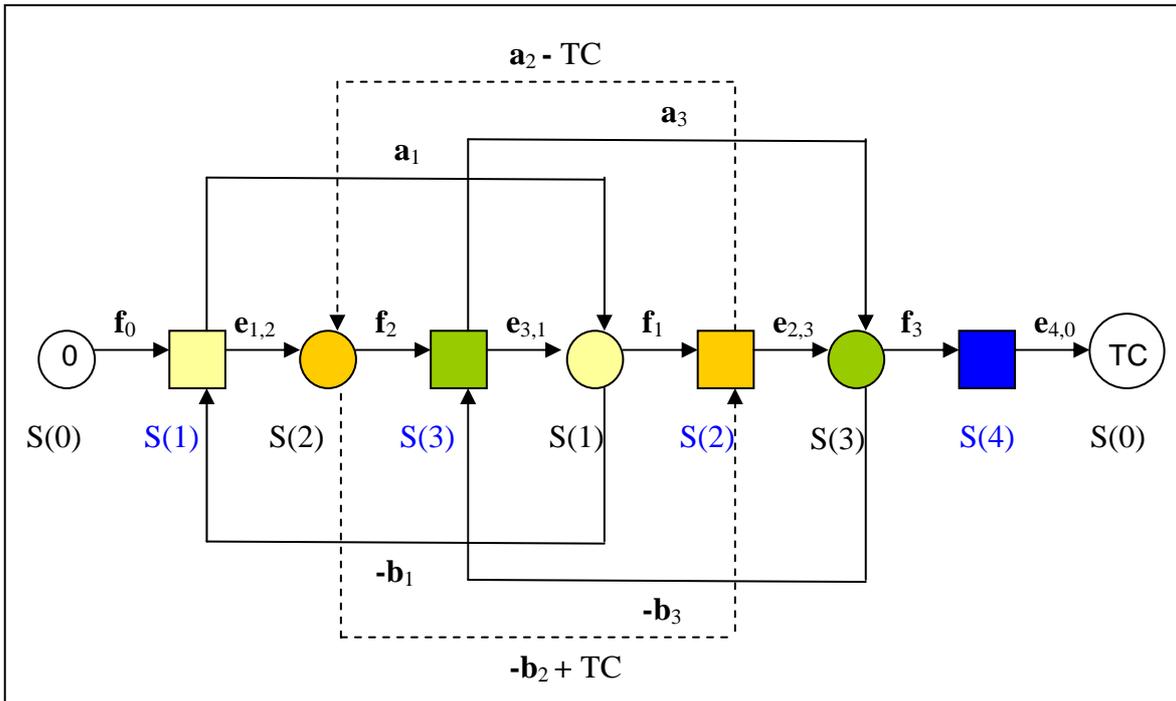


Figura 4.5. Representación del ciclo presente (relajación del problema) para la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,1,3 \rangle$.

Sustituyendo por los parámetros de tiempo del problema, se obtiene la figura 4.6:

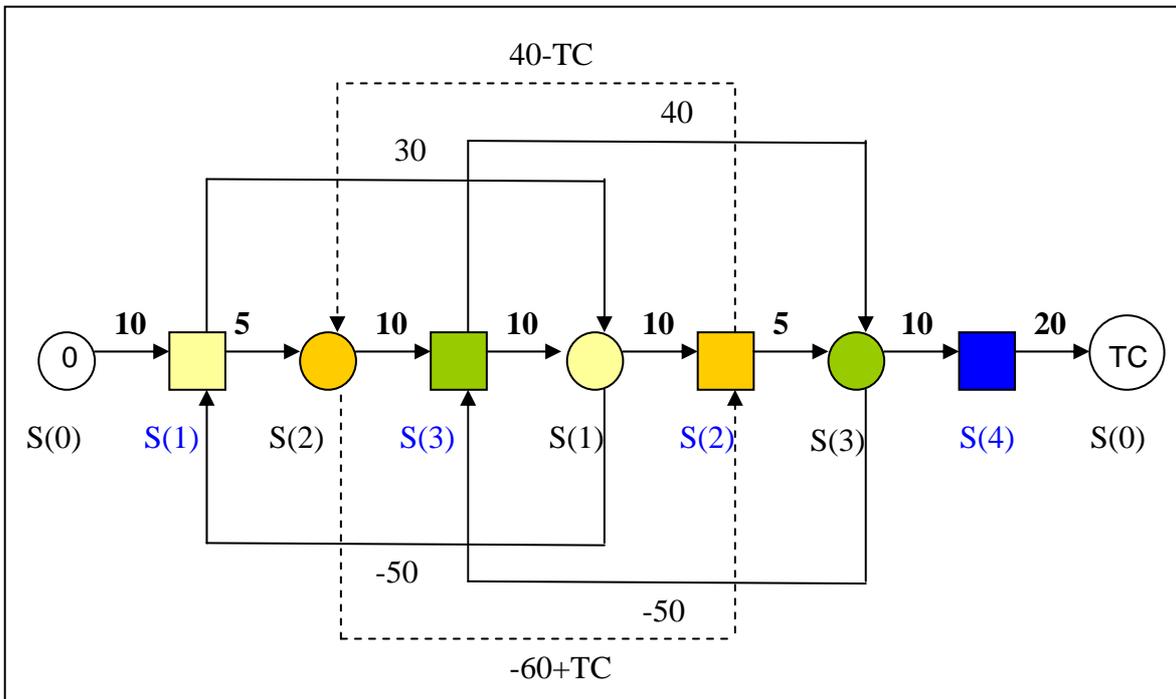


Figura 4.6. Representación del grafo secuencial para el vector $\mathbf{H} = \langle 0,2,1,3 \rangle$ del ejemplo.

Utilizando el método basado en el MCM del grafo reducido del ciclo presente, para los datos de la figura 4.6 implica que en la segunda iteración ya se pueda determinar el tiempo de ciclo TC asociado a la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,1,3 \rangle$. La primera iteración tiene una función básica de inicialización y permite determinar una cota inicial para el tiempo de ciclo, marcada por los tiempos necesarios de viajes de grúa.

Los valores asociados a los vértices, de salida ($m+2=5$) y de llegada ($m+1=4$), al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido creciente del tiempo* en la primera iteración son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	1	2	3	4	
t	0	10	15	25	35	40	50	60	80

Tabla 4.2. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,1,3 \rangle$ del ejemplo (iteración 1, sentido creciente).

Al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido decreciente del tiempo*, en la primera iteración, los valores asociados a los vértices son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	1	2	3	4	
t	0	10	15	25	35	40	50	60	80

Tabla 4.3. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,1,3 \rangle$ del ejemplo (iteración 1, sentido decreciente).

En la segunda iteración, al incluir las restricciones de tiempo mínimo de ventana en los baños y aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido creciente del tiempo*, los valores asociados a los vértices son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	1	2	3	4	
t	0	10	15	25	40	50	65	75	95

Tabla 4.4. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,1,3 \rangle$ del ejemplo (iteración 2, sentido creciente).

Al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido decreciente del tiempo*, en la segunda iteración, los valores asociados a los vértices son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	1	2	3	4	
t	0	10	15	25	40	50	65	75	95

Tabla 4.5. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,1,3 \rangle$ del ejemplo (iteración 2, sentido decreciente).

Como no hay cambios en el sentido decreciente de tiempos, tampoco los habrá en la tercera iteración, pues ya se han considerado las restricciones de tiempos mínimos y máximos de la ventana temporal. Esta solución es factible y tiene 95 como tiempo de ciclo.

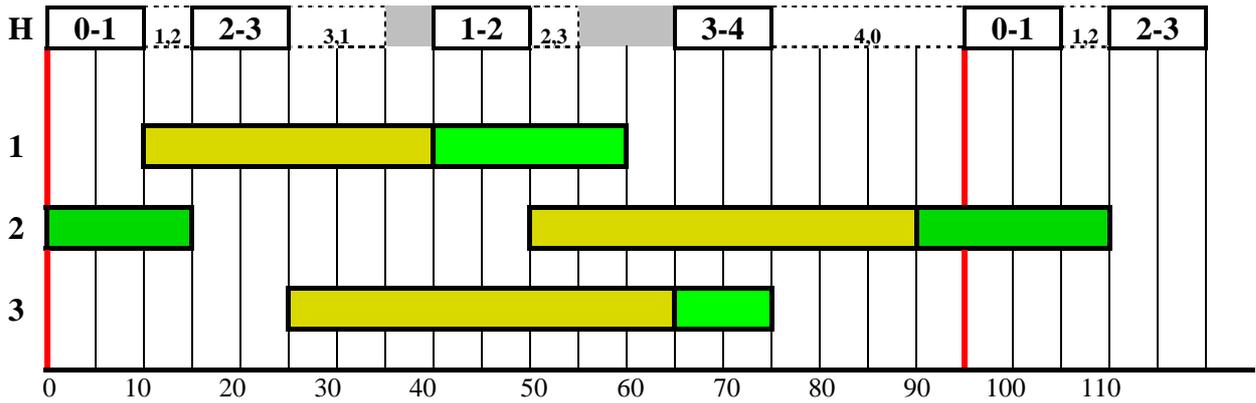


Figura 4.7. Diagrama de Gantt para movimientos de grúa H (línea doble, transporte con carga y discontinua, transporte sin carga) y la ocupación de los baños 1, 2 y 3 (amarillo, tiempo mínimo; verde, margen de la ventana temporal; rayado, tiempo de ocupación real de baño). No se violan restricciones.

4.4.4. Ejemplo de secuencia infactible

La representación de su grafo para evaluar la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,3,1 \rangle$, según el modelo del apartado 4.4.1 y utilizando el ejemplo del apartado 4.3.5, se corresponde con la figura 4.8. Se observa los arcos que conectan el ciclo presente con el ciclo pasado y el ciclo futuro, mientras en la figura 4.9 dichas relaciones se expresan entre vértices del ciclo presente, lo que supone depender del valor del último vértice TC.

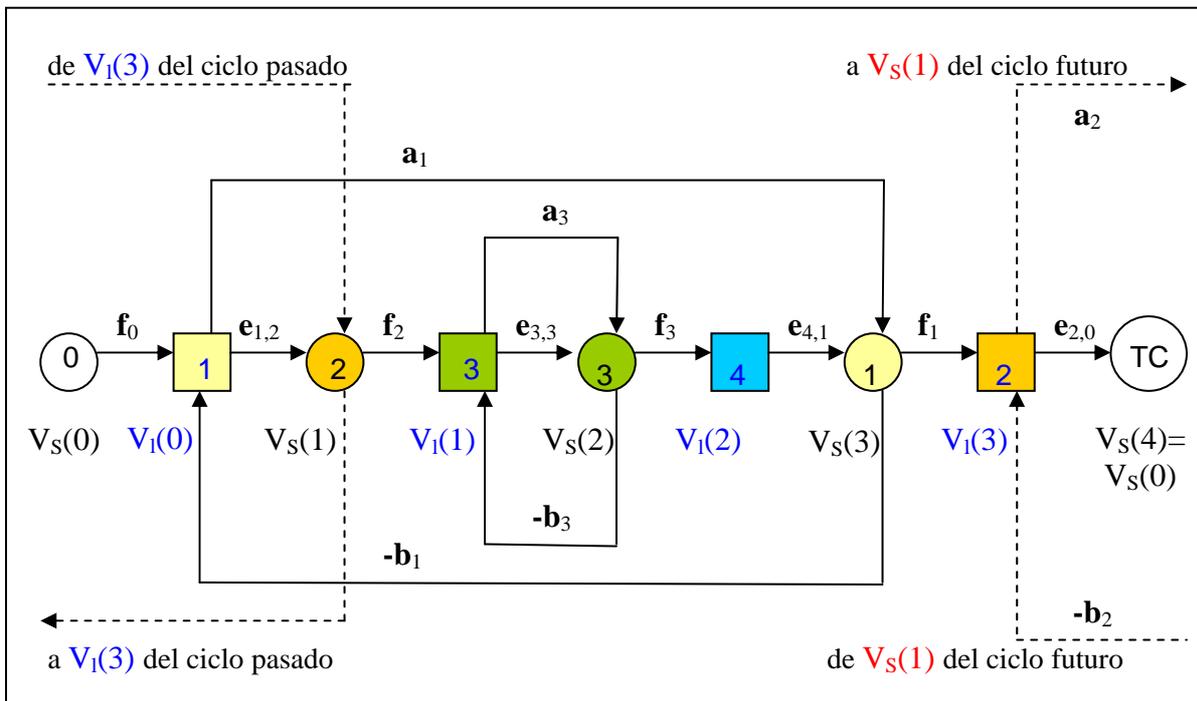


Figura 4.8. Representación del ciclo presente y sus arcos relacionados con los ciclos pasado y futuro para la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,3,1 \rangle$.

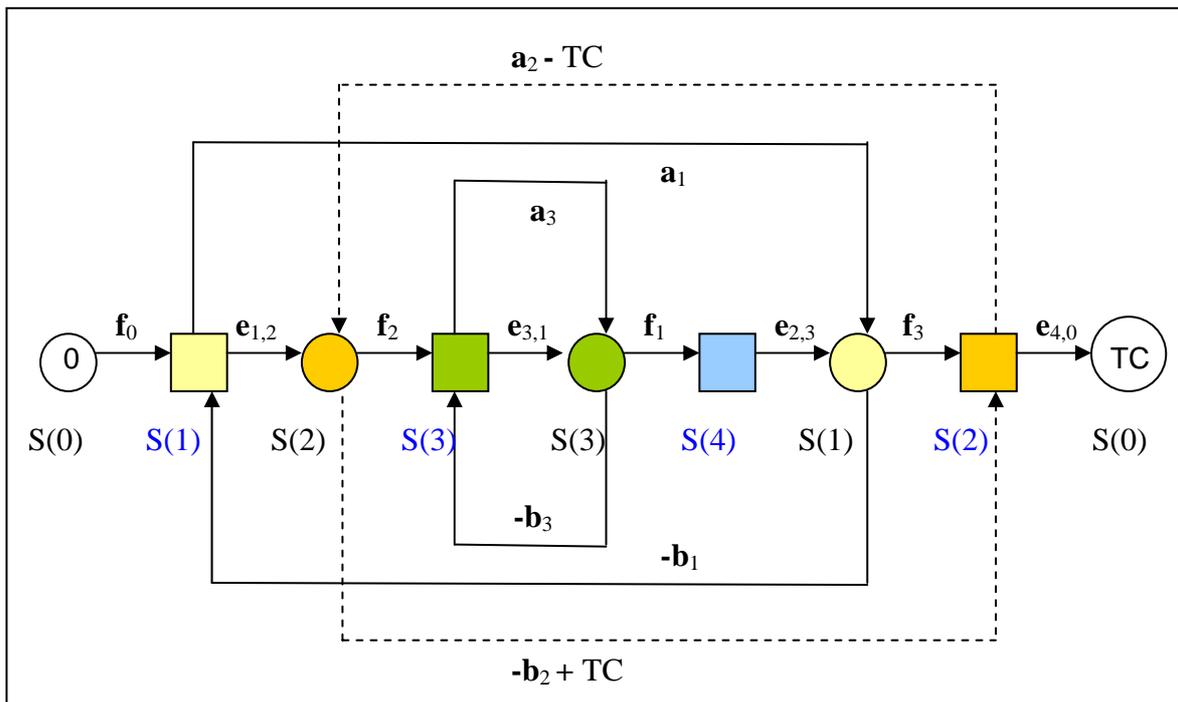


Figura 4.9. Representación del ciclo presente (relajación del problema) para la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,3,1 \rangle$.

Sustituyendo por los parámetros de tiempo del problema, se obtiene la figura 4.10.

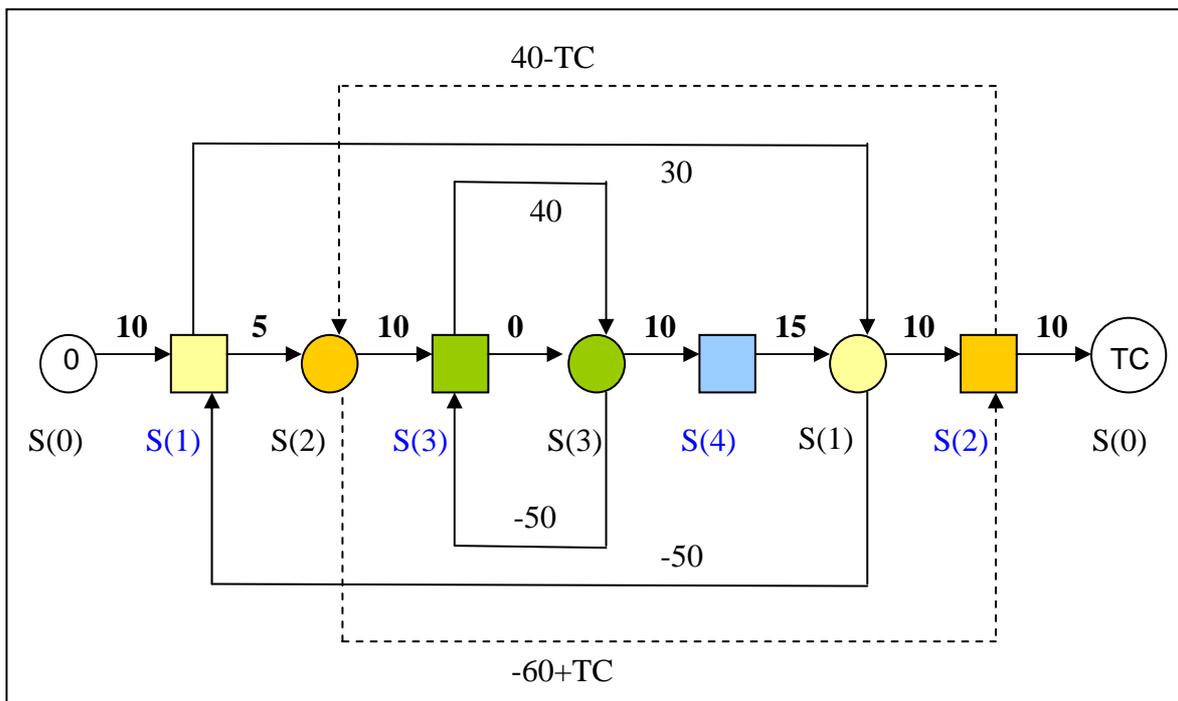


Figura 4.10. Representación del grafo secuencial para el vector $\mathbf{H} = \langle 0,2,3,1 \rangle$ del ejemplo.

Al aplicar el método MCM al grafo reducido del ciclo presente, para los datos de la figura 4.10 implica que en el procedimiento no converja en las sucesivas iteraciones y no se puedan determinar ningún tiempo de ciclo TC asociado a la secuencia $\mathbf{H} = \langle 0,2,3,1 \rangle$. Esto indica que la secuencia es infactible.

Los valores asociados a los vértices al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido creciente del tiempo* en la primera iteración son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	0	10	15	25	25	35	50	60	70

Tabla 4.6. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,3,1 \rangle$ del ejemplo (iteración 1, sentido creciente).

Al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido decreciente del tiempo*, en la primera iteración, se repiten los valores asociados a los vértices:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	0	10	15	25	25	35	50	60	70

Tabla 4.7. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,3,1 \rangle$ del ejemplo (iteración 1, sentido decreciente).

En la segunda iteración, al incluir las restricciones de tiempo mínimo de ventana en los baños y aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido creciente del tiempo*, los valores asociados a los vértices son:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	0	10	15	30	70	80	95	105	115

Tabla 4.8. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,3,1 \rangle$ del ejemplo (iteración 2, sentido creciente).

Al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido decreciente del tiempo*, en la segunda iteración, ya no se repiten los valores asociados a los vértices, por la ventana temporal del baño 1:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	35	45	20	30	70	80	95	105	115

Tabla 4.9. Valores de los vértices del grafo secuencial para $\mathbf{H}=\langle 0,2,3,1 \rangle$ del ejemplo (iteración 2, sentido decreciente).

Como hay cambios en el sentido decreciente de tiempos, se debe realizar una tercera iteración, en la cual al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido creciente del tiempo* se obtienen los valores asociados a los vértices de la tabla siguiente:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	35	45	50	60	100	110	125	135	145

Tabla 4.10. Valores de los vértices del grafo secuencial para $H=<0,2,3,1>$ del ejemplo (iteración 3, sentido creciente).

Al aplicar la acción *Analizar el grafo en sentido decreciente del tiempo*, en la segunda iteración, ya no se repiten los valores asociados a los vértices, por la ventana temporal del baño 1:

vértice	$V_S(0)$	$V_I(0)$	$V_S(1)$	$V_I(1)$	$V_S(2)$	$V_I(2)$	$V_S(3)$	$V_I(3)$	TC
	0	1	2	3	3	4	1	2	
t	65	75	50	60	100	110	125	135	145

Tabla 4.11. Valores de los vértices del grafo secuencial para $H=<0,2,3,1>$ del ejemplo (iteración 3, sentido decreciente).

Así, dado que cada vez que el valor del vértice de tiempo de ciclo varía, lo cual conlleva un incremento de 30, también lo hace el vértice. Por tanto, esta solución es infactible.

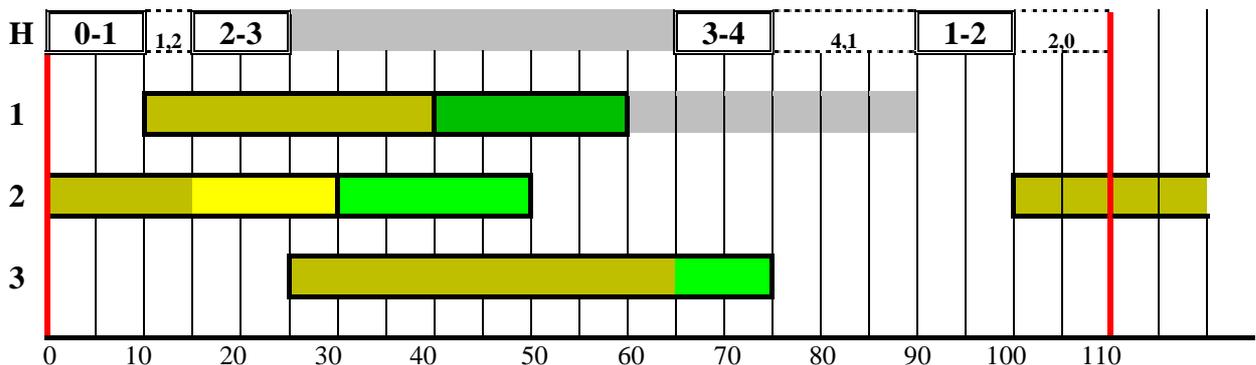


Figura 4.11. Diagrama de Gantt para movimientos de grúa H (línea doble, transporte con carga y discontinua, transporte sin carga) y la ocupación de los baños 1, 2 y 3 (amarillo, tiempo mínimo; verde, margen de la ventana temporal; rayado, tiempo de ocupación real de baño).

Se incumplen las restricciones de los baños 1 y 2.

4.5. Procedimientos de resolución arborescente (*branch and bound*)

Para una línea de producción con un número de baños m , y con los datos de partida referentes a la ventana temporal en cada baño y a los tiempos de transporte de la grúa, el objetivo pasa a ser determinar una secuencia de movimientos para la grúa que sea factible, y en dicho caso, hallar de entre todas aquellas factibles la que cumpla:

$$TC^*(H^*, T^*) = \text{Min} \{ TC(H, T) \mid \forall (H, T) \text{ factible} \} \quad (4.12)$$

A priori un ejemplar de problema con las características reseñadas plantea $m!$ posibles secuencias de secuencias, lo que implicaría resolver $m!$ programas lineales. Si se utiliza un procedimiento de *branch and bound* como el propuesto por diversos autores, como Shapiro y Nuttle (1988) y Armstrong, Lei y Gu (1994), que a continuación se plantea, cada uno de dichos programas se corresponderán con una de las hojas de la exploración arborescente.

4.5.1. Bases de un procedimiento *branch and bound*

Un procedimiento *branch and bound* consiste en una exploración adecuada del conjunto completo de permutaciones inicialmente posibles, aunque quizás algunas no factibles, de los movimientos de un ciclo de movimientos de una grúa.

- Dichas permutaciones se distribuyen en **bloques**, cada uno de los cuales está definido por ciertos movimientos concretos, que pueden o no ocupar unas determinadas posiciones.
- Para cada bloque, se determina una **cota inferior** del valor de TC de las permutaciones incluidas en el mismo. Dicha cota puede ajustarse más cuantas menos permutaciones contenga el bloque. Si sólo contiene una única permutación y la secuencia de movimientos H es factible, la cota coincide con el valor TC de la misma.
- Al tener cada bloque diferentes cotas posiblemente diferentes, la **exploración** de algunos bloques parece más prometedora que la de otros. Un bloque se explora dividiéndolo en subbloques y calculando a su vez la cota de los mismos.
- En caso de disponer de una **solución** del problema, ciertos bloques pueden eliminarse de cualquier exploración posterior si su cota es mayor o igual al valor de TC de la solución disponible.

4.5.2. Aspectos a concretar en un procedimiento *branch and bound*

El conjunto de bloques se estructura en forma de árbol, siguiendo la teoría de grafos. Los vértices del árbol son los bloques, siendo la raíz del árbol un bloque que contenga todas las $m!$ permutaciones. Se va a utilizar la palabra vértice, pues según la teoría de grafos expresa el concepto de bloque. Los arcos del árbol corresponden a relaciones de inclusión, en el sentido de la teoría de conjuntos.

El árbol se va construyendo en el transcurso del algoritmo: cuando un bloque se subdivide, el vértice "padre" queda substituido por tantos vértices "hijos" como sea necesario, que contienen todas sus permutaciones. Los vértices hijos tienen una cota nunca inferior a la del vértice padre.

En un instante durante la aplicación del algoritmo, sólo es preciso conservar los vértices pendientes, aquellos que todavía no se han ramificado o subdividido y cuya cota sea inferior al valor de TC de la mejor solución conocida.

Para definir un procedimiento *branch and bound*, es necesario establecer cuatro tipos de informaciones previas a su realización:

- La caracterización de cada uno de los vértices en el árbol de exploración.
- El proceso de separación de un vértice padre en sus vértices hijos.
- El procedimiento de acotación, que indica aptitud en la exploración de un vértice hijo.
- La estrategia de búsqueda de la solución en el árbol.

4.5.3. Estrategias de construcción a través del árbol

A continuación, se plantean dos tipos de caracterización de la exploración en el árbol.

Por un lado, se expone la exploración temporal, que sigue un esquema similar al de los procedimientos de ramificación en problemas de programación como el de flujo regular o *flow-shop*, propuestos casi simultáneamente por Lomnicki (1965) y Ignall y Schrage (1965). Para llevar a cabo dicha estrategia de construcción del árbol de soluciones, se utilizará el llamado ***branch and bound mediante tiempos***, pues va añadiendo elementos al vector **H** de movimientos de la grúa según el orden temporal en que deban realizarse. Por tanto, imita los procedimientos de *dispatching*, en los cuales se simula el orden de toma de decisiones.

Por otro lado, se expone la exploración física, que sigue el esquema de aprovechamiento de tiempos muertos para la realización de otras actividades, siguiendo la idea de la asignación de un grupo de máquinas a un operario (en este caso, operaciones de transporte de objetos y grúa, respectivamente). Dicha estrategia de construcción del árbol de soluciones va a ser llamada ***branch and bound mediante baños***, ya que va añadiendo elementos al vector **H** de movimientos de la grúa suponiendo que físicamente se amplía la línea de producción con un tanques más respecto al nivel inmediatamente anterior.

4.6. Branch and bound mediante tiempos

4.6.1. Caracterización de los vértices del árbol

El número de niveles de la arborescencia viene determinado por el número de tanques del proceso (m), contando con el nivel 0. Así, en el nivel 0, el vértice raíz contiene una cota de cualquier secuencia $\mathbf{H} = \langle h_0, h_1, \dots, h_m \rangle$, que supone el tiempo en considerar solamente los movimientos de desplazamiento de la grúa con carga (en un sentido) más los de desplazamiento sin carga (en sentido contrario). Dicho tiempo total supone que la grúa visita los tanques de manera ordenada según los procesos, y se espera a que pase el tiempo mínimo de la ventana temporal y es una solución inicial siempre posible:

$$TC^{\text{best}} = \sum_{k=0}^m f_k + \sum_{i=1}^m a_i + e_{m+1,0} \quad (4.13)$$

Salvo el vértice raíz del árbol, que considera las $m!$ permutaciones de las piezas, los vértices se etiquetarán según una permutación $\pi(\mathbf{I})$. Cada vértice queda definido por los movimientos asignados a las primeras posiciones de la secuencia \mathbf{H} y por su orden.

Sean:

- \mathbf{I} el conjunto de los índices de movimientos fijados, excluyendo el movimiento 0,
- r el número de elementos de \mathbf{I} ($r = |\mathbf{I}|$),
- $\pi(\mathbf{I})$ la permutación de los movimientos y
- \mathbf{U} el conjunto de movimientos aún no fijados.

El número de vértices, con el mismo \mathbf{I} pero con diferentes permutaciones, pueden ser hasta $r!$ Uno de dichos vértices contiene todas las permutaciones que comienzan por $\pi(\mathbf{I})$, cuyo número es $(m - r)!$

En definitiva, el número de vértices por cada nivel r , $[m!] / [(m - r)!]$, depende del conjunto de las operaciones asignadas hasta ese momento al vector \mathbf{H} . El vértice raíz del árbol es tal que $\mathbf{I} = \emptyset$, $r=0$ y $\pi(\mathbf{I})$ no tiene significado.

Un vértice de nivel r se expresa como $P_{[0][r]} = \langle h_{[0]}, h_{[1]}, \dots, h_{[r]} \rangle$, lo que corresponde a una permutación $\pi(\mathbf{I})$ tal que $\{h_{[0]}=h_0, h_j \mid j=1,2,\dots,m\}$.

Ejemplo

Para un problema con cuatro procesos ($m=4$) en el nivel 2 existen 12 vértices, de los cuales uno es $P_{[0][2]} = \langle h_0, h_2, h_1 \rangle$, que tiene implícitas el siguiente conjunto de soluciones o vértices descendientes: $\langle h_0, h_2, h_1, h_3 \rangle$, $\langle h_0, h_2, h_1, h_4 \rangle$.

4.6.2. Procedimiento de separación

Para ramificar un vértice $P_{[0][r]}$ no terminal, se definen $m - r$ vértices descendientes o hijos al situar sucesivamente uno de los movimientos del conjunto U detrás de la permutación $\pi(\mathbf{I})$, formando por tanto una nueva permutación con $r + 1$ movimientos. Una vez generados y acotados todos los vértices hijos, debe cerrarse el vértice padre.

En resumen, partiendo del vértice raíz ($P_{[0]} = \langle h_{[0]} \rangle$), un vértice de un nivel $r+1$ se obtiene al partir de $P_{[0][r]} = \langle h_{[0]}, h_{[1]}, \dots, h_{[r]} \rangle$, añadiendo un movimiento $h_j \in U$ tras los r movimientos de $P_{[0][r]}$.

Ejemplo

Para el problema con cuatro procesos ($m=4$), $P_{[0][2]} = \langle h_0, h_2, h_1 \rangle$ del nivel 2 tiene dos vértices hijos ($m-r$), $\langle h_0, h_2, h_1, h_3 \rangle$ y $\langle h_0, h_2, h_1, h_4 \rangle$, que son vértices finales.

4.6.3. Procedimiento de acotación

Dado un vértice v , se puede determinar una cota del valor de TC de las permutaciones que contiene, considerando solamente aquellos movimientos incluidos en dicho vértice y, si es necesario, un tiempo adicional para los movimientos aún no fijados.

Sean:

- I el conjunto de los índices de movimientos fijados, excluyendo el movimiento 0,
- $P_{[0][r]} = \langle h_{[0]}, h_{[1]}, \dots, h_{[r]} \rangle$ el vértice, con r movimientos, que está siendo acotado,
- $TC(P_{[0][r]})$ el tiempo de ciclo para realizar dicha permutación de movimientos, y por lo tanto, factible,
- $U = \{h_{r+1}, \dots, h_m\}$ el conjunto de movimientos no asignados a la permutación $P_{[0][r]}$,
- w_i el tiempo de espera o muerto de la grúa, hasta este momento, en un tanque i .

La cota inferior del tiempo de ciclo, incorporando los movimientos no asignados ($h_j \in U$) a $P_{[0][r]}$, e intentando ocupar los tiempos ociosos de la grúa es:

$$TC_{\text{inf}}(P_{[0][m]}) = TC(P_{[0][r]}) + \max \left\{ \left[\sum_{h_j \in U} (f_j + e_{j,j+1}) - \sum_{h_i \in I} (w_i) \right], 0 \right\} \quad (4.14)$$

Si el vértice es terminal ($r = m - 1$), la posición de todos los movimientos ya está definida y su cota corresponde al valor de TC de la única permutación que contiene. En la fórmula 4.14, el primer elemento de la comparación a maximizar es nulo.

- Si dicho valor es menor que el tiempo de ciclo de la mejor solución conocida, se guardan la permutación y el valor de tiempo de ciclo, como nueva mejor solución conocida.
- Si la cota del vértice es mayor o igual al valor de la mejor solución conocida, el vértice se cierra.

En todos los casos, se cierra o elimina un vértice terminal.

Ejemplo

Para el ejemplo anterior ($m=3$), si se quiere hallar la cota inferior del vértice de nivel 2, $P_{[0][2]} = \langle h_0, h_2, h_1 \rangle$, su tiempo de ciclo hasta entonces y los respectivos vectores con los instantes de inicio de los movimientos y los tiempos de espera de la grúa en las estaciones son:

$$TC(P_{[0][2]}) = 60, \quad T = \langle 0, 15, 40 \rangle, \quad W = \langle 0, 0, 5 \rangle$$

Aplicando la fórmula 4.13, se obtiene una cota inferior del conjunto de soluciones descendientes:

$$TCinf(P_{[0][2]}) = 60 + \max \{ (10+5) - 5, 0 \} = 70$$

4.6.4. Elección del vértice de exploración inmediata

La estrategia básica consiste, como ya se ha indicado, en conservar solamente los vértices pendientes con cota inferior al valor de la mejor solución conocida. Esto comporta poder eliminar algunos vértices pendientes de exploración cuando se halla una nueva mejor solución, aquellos que presentaban cota inferior superior al nuevo mejor tiempo de ciclo.

En cuanto a la elección del vértice a explorar o ramificar, en un momento dado, la propuesta natural del algoritmo, intuitivamente coherente, consiste en dar prioridad al vértice pendiente con menor cota, y en caso de empate, a aquél con mayor número de movimientos fijados, es decir, con mayor valor r . No obstante, cuando m adopta valores relativamente elevados (al tener valores de más de un dígito) esta estrategia puede conducir a conservar un número de vértices considerable. Entonces, para mantenerlo dentro de unos límites conviene, cuando el número supera un umbral determinado, utilizar la estrategia comentada permutando los criterios: se elige el vértice con mayor número de movimientos asignados, y en caso de empate, se da prioridad al vértice de menor cota.

En este trabajo, se han estudiado tres opciones de exploración para elegir un vértice:

1. Vértice con menor cota inferior $TCinf(P_{[0][r]})$, y en caso de empate, mayor nivel del árbol r .
2. Vértice con mayor nivel en el árbol r , y en caso de empate, menor $TCinf(P_{[0][j]})$.
3. Vértice con mayor nivel en árbol r , y en caso de empate, el que supone una posición más alejada de la estación de carga, lo que maximiza la presencia de objetos simultáneamente en la línea.

4.6.5. Algoritmo *branch and bound* mediante tiempos

A continuación, se indica el algoritmo que contiene los principios desarrollados en este apartado 4.6.

ALGORITMO *BRANCH AND BOUND* MEDIANTE TIEMPOS

Leer datos

Programar T para vector H de cota superior (H,T,TC)

Guardar como óptimo provisional (Hbest=H, Tbest=T, TCbest=TC)

Inicializar lista de vértices del procedimiento *branch and bound*

Determinar tipo de exploración

MIENTRAS Vértices abiertos

 Seleccionar nuevo vértice a explorar

 Generar sucesores y evaluarlos

 Determinar posición del próximo movimiento a explorar

 Purgar la lista si crece demasiado

 Generar sucesores de la posición seleccionada

 PARA cada movimiento sin estar en H parcial (a explorar)

 Buscar posición en la lista de vértices

 Generar nueva secuencia con movimiento

 1. Copiar la información del padre

 2. Añadir información de exploración

 3. Evaluar el grafo construido

 4. SI no tiene $m-1$ movimientos

 Evaluar la parte de grafo construido

 Comprobar que sea factible

 SI es factible

 Rectificar TC para obtener TCinf

 Comprobar restricciones biciclo

 SI $TC > TC_{best}$

 Cerrar vértice

 finSI

 SINO (no es factible)

 Cerrar vértice

 finSI

 SINO

 Evaluar el grafo completo

 SI es factible

 SI $TC < TC_{best}$

 Hbest=H, Tbest=T, TCbest=TC

 Comprobar si se eliminan más vértices

 finSI

```

                SINO (no es factible)
                  Cerrar vértice
                finSI
            finSI

        Añadir información a la lista de vértices
    finPARA
    Cerrar vértice padre

    SI no continuar (comprobar condición de continuar)
        No Vértices abiertos
    finSI

finMIENTRAS
Guardar solución (Hbest, Tbest, TCbest)

```

4.6.6. Ejemplo de aplicación de un *branch and bound* mediante tiempos (BBt)

Tomando el ejemplo presentado en el apartado 4.3.5, si se utiliza el *branch and bound* mediante tiempos, al considerar el crecimiento progresivo del vector **T** a cada nivel del árbol, se obtiene el árbol de la figura 4.12. La estrategia utilizada será la primera expuesta en el apartado 4.6.4. Se nombran los vértices alfabéticamente según orden de aparición en el algoritmo. Los vértices explorados se pintan de amarillo, los óptimos provisionales o definitivo en azul, los vértices con secuencias infactibles en gris, y el óptimo se resalta en negrita.

Se parte del vértice *A*, vértice raíz $\mathbf{H}=\langle 0,1 \rangle$, con un $TC=60$ y también $TC_{inf}=60$. A continuación, se ramifica en los vértices *B*, *C* y *D*, los cuales tienen unas cotas de ciclo inferiores, una vez analizados los movimientos aún no fijados, de 60, 70 y 80 respectivamente.

A continuación, se ramifica el vértice *B* por tener la más prometedora de las tres cotas, dando como descendientes a los vértices *E* y *F*, éste último infactible. Se alcanza la secuencia óptima de partida, con $TC=170$. Seguidamente, se ramifica el vértice *C* por tener la más prometedora cota en aquel instante de los dos vértices abiertos (*B* y *C*), dando como descendientes a los vértices *G* y *H*, éste último infactible. En cambio, el vértice *G* supone una nueva secuencia óptima, con $TC=95$. Finalmente, sólo queda el vértice abierto *D*, que ramificado proporciona los vértices *I* y *J*, éste con la secuencia óptima del problema: $\mathbf{H}^*=\langle 0,3,2,1 \rangle$ con $TC^*=80$.

Se observa que para hallar el óptimo ha sido necesario pasar por los 10 vértices.

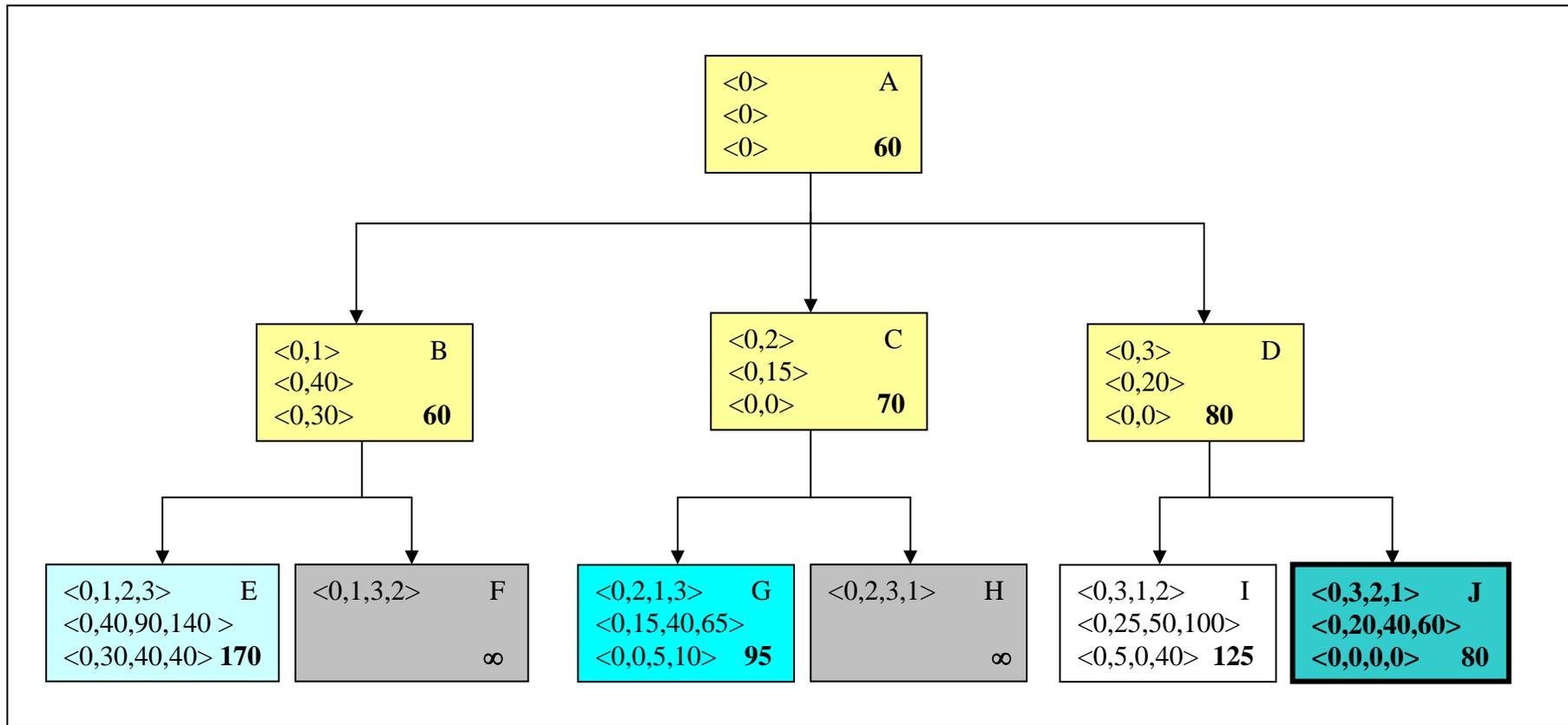


Figura 4.12. *Branch and bound* de tiempos para el ejemplo ilustrativo 4.1. En amarillo, vértices intermedios explorados; en gris, vértices con secuencias infactibles; en diferentes tonos de azul (cada vez más oscuros), secuencias con tiempo de ciclo óptimo provisional (en negrita, óptimo definitivo).

4.7. Branch and bound mediante baños

4.7.1. Caracterización de los vértices del árbol

El número de niveles de la arborescencia nuevamente coincide con el número de tanques del proceso (m). En este caso, el vértice raíz, que forma el nivel 1, está formado por la secuencia $H = \langle h_0, h_1 \rangle$. Dicho vector supone que la grúa sólo visita el primer tanque.

Sean nuevamente:

- I** el conjunto de los índices de movimientos fijados, excluyendo el movimiento 0,
- r** el número de elementos de **I** ($r = |I|$),
- $\pi(I)$** la permutación de los movimientos y
- U** el conjunto de movimientos aún no fijados.

Los vértices se etiquetan según una permutación $\pi(I)$, en que cada vértice queda definido por los movimientos asignados a las primeras $r+1$ posiciones de la secuencia **H** y por su orden.

El número de vértices, con el mismo **I** pero con diferentes permutaciones, son $r!$ Uno de dichos vértices contiene todas las permutaciones que mantienen el mismo orden de los componentes de $\pi(I)$, cuyo número es $r+1$.

Un vértice de nivel r se expresa como $P_{[0][r]} = \langle h_{[0]}, h_{[1]}, \dots, h_{[r]} \rangle$, lo que corresponde a una permutación $\pi(I)$ tal que $\{h_{[0]}=h_0, h_j \mid j=1,2,\dots,r\}$.

Ejemplo

Para un problema con cuatro procesos ($m=4$) en el nivel 2 existen dos vértices, de los cuales uno es $P_{[0][2]} = \langle h_0, h_2, h_1 \rangle$, que contiene el siguiente conjunto de soluciones o vértices descendientes: $\langle h_0, h_3, h_2, h_1 \rangle$, $\langle h_0, h_2, h_3, h_1 \rangle$, $\langle h_0, h_2, h_1, h_3 \rangle$.

4.7.2. Procedimiento de separación.

Para ramificar un vértice $P_{[0][r]}$ no terminal, se definen $r+1$ vértices descendientes o hijos al añadir intercaladamente en la permutación $\pi(I)$ el siguiente movimiento $r+1$, formando nuevas permutaciones con $r+1$ movimientos. Al igual que anteriormente, generados y acotados todos los vértices hijos, debe cerrarse el vértice padre.

En resumen, partiendo del vértice raíz ($P_{[0][1]} = \langle m_{[0]}=0, m_{[1]}=1 \rangle$), un vértice de un nivel $r+1$ se obtiene a partir de $P_{[0][r]} = \langle m_{[0]}, m_{[1]}, \dots, m_{[r]} \rangle$, insertando un movimiento h_{r+1} entre dos movimientos de $P_{[0][r]}$.

Ejemplo

Para el problema con cuatro procesos ($m=4$), $P_{[0][2]} = \langle h_0, h_2, h_1 \rangle$ del nivel 2 tiene tres vértices hijos ($r+1$): $\langle h_0, h_2, h_1, h_3 \rangle$, $\langle h_0, h_2, h_1, h_4 \rangle$, $\langle h_0, h_2, h_1, h_3 \rangle$.

4.7.3. Procedimiento de acotación

Se utiliza el mismo procedimiento de acotación que el planteado en el *branch and bound* mediante tiempos, apartado 4.6.3.

4.7.4. Elección del vértice de exploración inmediata

Nuevamente, se han estudiado tres opciones de exploración para elegir un vértice:

1. Aquél con menor cota inferior $TC_{inf}(P_{[0][r]})$, y en caso de empate, mayor nivel del árbol r .
2. Aquél con mayor nivel en el árbol r , y en caso de empate, menor $TC_{inf}(P_{[0][j]})$.
3. Aquél con mayor nivel en árbol r , y en caso de empate, el que supone una posición más alejada de la estación de carga, lo que maximiza la presencia de objetos simultáneamente en la línea.

4.7.5. Algoritmo de *branch and bound* mediante baños

Se indica seguidamente el algoritmo que enlaza los principios desarrollados en este apartado 4.7.

ALGORITMO *BRANCH AND BOUND* MEDIANTE BAÑOS

Leer datos

Programar T para vector H que conlleva la cota superior (H,T,TC)

Guardar como óptimo provisional (Hbest=H, Tbest=T, TCbest=TC)

Inicializar lista de vértices del procedimiento *branch and bound*

Determinar tipo de exploración

MIENTRAS Vértices abiertos

 Seleccionar nuevo vértice a explorar

 Generar sucesores y evaluarlos

 Determinar posición del próximo tanque a explorar

 Purgar la lista si crece demasiado

 Generar sucesores de la posición seleccionada

 PARA cada movimiento que no está en H parcial a explorar

 Buscar posición en la lista de vértices

Generar nueva secuencia con movimiento

1. Copiar la información del padre
2. Añadir información de exploración
3. Evaluar el grafo construido
4. SI no tiene m movimientos
 Evaluar la parte de grafo construido
 Comprobar que sea factible
 SI es factible
 Rectificar TC para obtener TCinf
 Comprobar restricciones biciclo
 SI $TC > TC_{best}$
 Cerrar vértice
 finSI
 SINO (no es factible)
 Cerrar vértice
 finSI
SINO
 Evaluar el grafo completo
 SI es factible
 SI $TC < TC_{best}$
 Hbest=H, Tbest=T, TCbest=TC
 Comprobar si se eliminan más vértices
 finSI
 SINO (no es factible)
 Cerrar vértice
 finSI
finSI

 Añadir información a la lista de vértices
finPARA

Cerrar vértice padre

SI no continuar
 No Vértices abiertos
finSI

finMIENTRAS
Guardar solución (Hbest, Tbest, TCbest)

Se trata básicamente de la misma estructura, sólo cambiando que en el *branch and bound* mediante tiempos se considera el grafo completo al alcanzar los $m-1$ movimientos, pues el último queda automáticamente determinado. En cambio, en el *branch and bound* mediante baños, el grafo no es completo hasta situar el último movimiento m , pues éste puede cualquier posición en el vector \mathbf{H} .

4.7.6. Ejemplo de aplicación de un *branch and bound* mediante baños (BBb)

Nuevamente con el ejemplo presentado en el apartado 4.3.5, si se utiliza el *branch and bound* mediante baños, y al considerar el aumento progresivo del número de tanques a cada nivel del árbol, se obtiene el árbol de la figura 4.13. La estrategia utilizada será la número 1 del apartado 4.7.4. Se nombran los vértices alfabéticamente según orden de aparición en el algoritmo. Los vértices explorados se pintan de amarillo, los vértices con secuencias infactibles en gris, los vértices abiertos en el momento de determinar el óptimo en naranja, y el óptimo se resalta en negrita.

Se parte del vértice A , vértice raíz $\mathbf{H}=\langle 0,1 \rangle$, con un $TC=60$ y también $TC_{inf}=60$. A continuación, el vértice A se ramifica en los vértices B y C , los cuales tienen unas cotas de ciclo inferiores, analizados los movimientos aún no fijados, de 75 y 115 respectivamente.

En vista del resultado, se ramifica el vértice B por tener la más prometedora de las cotas, dando como descendientes a los vértices D , E y F , el segundo de ellos infactible. En el vértice D se alcanza una secuencia con $TC=80$, que analizados los demás vértices abiertos resulta ser la secuencia óptima del problema: $\mathbf{H}^*=\langle 0,3,2,1 \rangle$ con $TC^*=80$.

En este caso, para hallar el óptimo sólo ha sido necesario evaluar 6 de los 10 vértices.

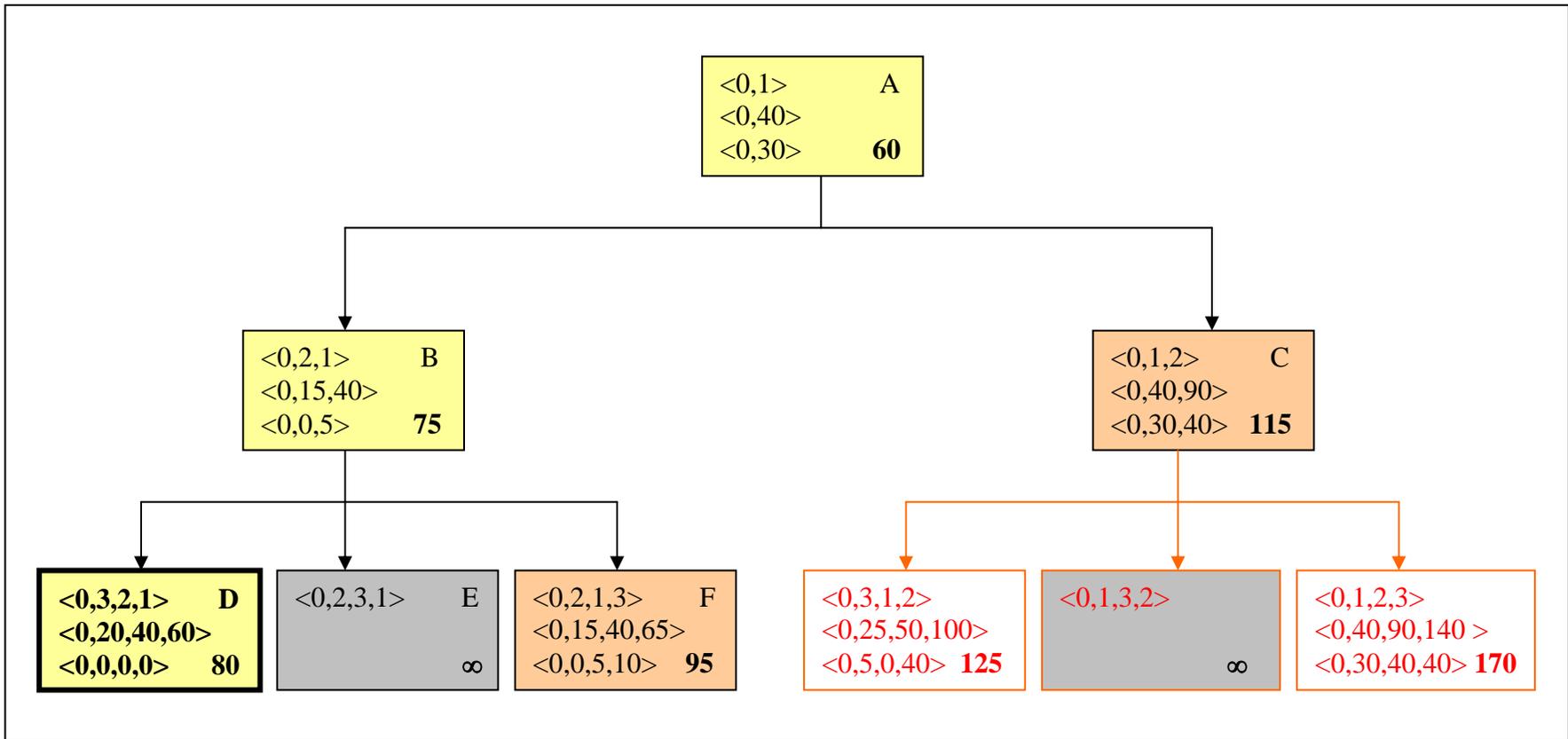


Figura 4.13. *Branch and bound* de tanques para el ejemplo ilustrativo 4.1. En amarillo, vértices explorados; en gris, vértices con secuencias infactibles; en naranja, secuencias exploradas y descartadas al hallar el tiempo de ciclo óptimo de 80 (escrito en rojo, parte del grafo no explorado).

4.8. Comparación entre ambos procedimientos de exploración

En la tabla siguiente, tabla 4.12, se ofrece de manera esquemática las características propias de cada uno de los métodos arborescentes propuestos en los anteriores apartados: el *branch and bound* mediante tiempos (BBt) y el *branch and bound* mediante baños (BBb).

	BBt (tiempos)	BBb (baños)
Nivel de raíz	0	0
Elemento de la raíz	$\langle h_0 \rangle$	$\langle h_0, h_1 \rangle$
Niveles (activos) del árbol	m-1	m-1
Hijos de un vértice de nivel k	m-k	k+1
Número de vértices de nivel k	$\binom{m}{k} k! = \frac{m!}{(m-k)!}$	$(k+1)!$

Tabla 4.12. Comparación de las principales características entre la resolución utilizando *branch and bound* mediante tiempos y *branch and bound* mediante baños.

5. RESOLUCIÓN BASADA EN EL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO

5.1. Introducción al uso del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

Este capítulo contiene la principal aportación de este trabajo de investigación. Se utiliza como herramienta de resolución del problema una representación en forma de grafo de la variante tratada en el capítulo 4, que será conocido como grafo de Tiempo de Ciclo Acotado. En dicha estructura, se pueden observar un conjunto de propiedades (tales como la obtención de cotas y la resolución de sistemas lineales) que permiten hallar con mayor agilidad la solución óptima a un ejemplar de problema.

En la primera parte, se expone un algoritmo tipo que se seguiría en caso de usar un grafo del tipo presentado en el capítulo anterior (por ejemplo, secuencial). No obstante, dadas las restricciones en este tipo de problemas, evaluar una posible secuencia cíclica de movimientos puede llevar a descubrir que sea infactible si se quieren respetar las normas. Por lo tanto, cuanto menor sea el esfuerzo destinado a comprobar este hecho, mayor rendimiento se podrá obtener, al dedicar más esfuerzo a otras secuencias factibles.

Así, se establece un esquema (el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado), que es función de la secuencia \mathbf{H} a evaluar y de la variable del tiempo de ciclo TC . El calificativo de “Tiempo de Ciclo Acotado” se utiliza ya que el sistema de ecuaciones planteado en el grafo queda en función de TC , y analizando algunos de sus circuitos, se puede obtener cotas inferiores y superiores para dicha variable. Si para un valor de TC dado, se logra calcular unos caminos extremos (es decir, calcular los valores de t_i $i=0,1,\dots,m$ con $t_0=0$), se cumple que:

- El valor de la variable TC es un tiempo de ciclo factible para dicha secuencia.
- Los valores t_i del vector \mathbf{T} son los instantes relativos de inicio de los movimientos asociados a TC .

Una secuencia dada \mathbf{H} , representada a través de un grafo, puede también ser infactible (ningún valor de TC conduce a unos valores del vector \mathbf{T} que comporten la ciclicidad esperada).

Al poder ser factible una secuencia \mathbf{H} para algunos de los valores de la variable TC , pero no para todos, dadas las restricciones impuestas, interesa el menor valor de TC entre aquéllos que comporten la factibilidad de un ciclo, lo que supone la máxima productividad. Sea el valor de TC propio asociado a la secuencia aquel valor menor de TC (y si una secuencia es infactible, su valor TC propio es ∞). Así pues, mediante el procedimiento basado en evaluar para diferentes secuencias un grafo de Tiempo de Ciclo Acotado interesa hallar la secuencia \mathbf{H}^* (con menor valor de TC propio, o sea, TC^*).

5.2. Determinación de variables mediante un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

5.2.1. Algoritmos estándares para resolver problemas de optimización combinatoria

En el capítulo anterior, se planteó un tipo de grafo, el grafo secuencial, y aplicó un algoritmo con el objetivo de obtener la mejor entre todas las secuencias de movimientos posibles. En cada grafo creado, no podía determinarse el carácter factible o infactible para una secuencia dada, hasta que dicho grafo asociado no se resolvía. Inmediatamente a continuación, y en caso de ser una secuencia factible, debía comprobarse si mejoraba la solución en curso.

La estructura de un algoritmo estándar puede aplicarse en gran número de problemas combinatorios. Si se adapta esta estructura al problema tratado, resuelto mediante grafos, el algoritmo contiene las siguientes acciones básicas (representadas en diagrama de flujos en la figura 5.1):

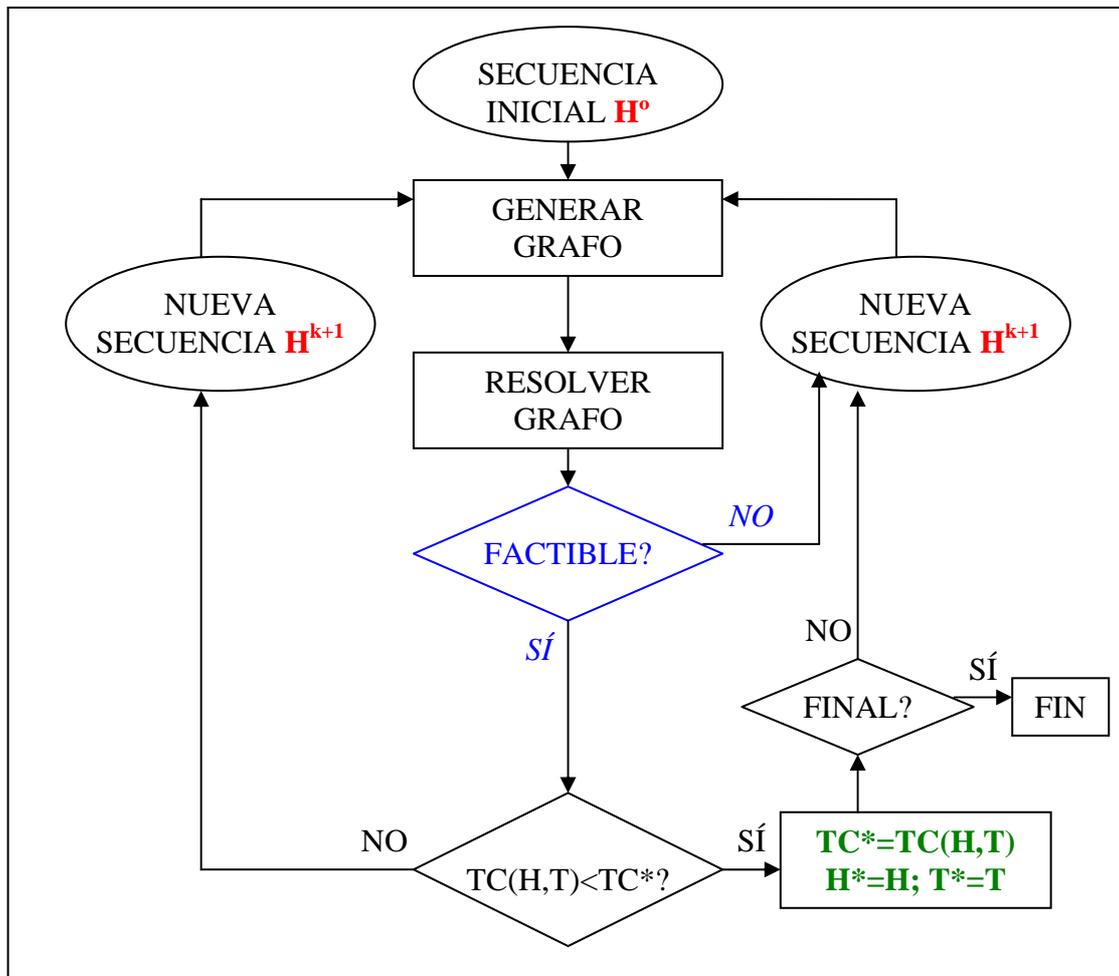


Figura 5.1. Diagrama de flujo en un algoritmo sin división entre análisis y evaluación.

- Dados unos datos (que incluyen una secuencia \mathbf{H}), se genera su grafo asociado (en este caso, el grafo secuencial).
- Este grafo se evalúa: se obtienen los valores de la variable $\mathbf{TC}(\mathbf{H},\mathbf{T})$ y del vector \mathbf{T} . En caso que la secuencia propuesta sea factible, o sea el grafo tenga una solución con un valor de TC finito, dicho valor $\mathbf{TC}(\mathbf{H},\mathbf{T})$ se compara con la mejor solución hasta ese momento (\mathbf{TC}^* , con un tiempo de ciclo mínimo).
- En caso que dicha secuencia proporcione un valor de $\mathbf{TC}(\mathbf{H},\mathbf{T})$ menor (por tanto, mejor), el tiempo de ciclo $\mathbf{TC}(\mathbf{H},\mathbf{T})$ en curso pasa a ser \mathbf{TC}^* .
- Y así, se puede seguir para el número de secuencias que sea necesario, imponiendo algún tipo de limitación como condición de final.

De las anteriores acciones, aquélla que consume mayor tiempo es la resolución del grafo asociado a una secuencia de movimientos. Este hecho conlleva, pues, que cuanto más ágil sea el método de resolución aplicado, también lo será más el algoritmo general propuesto.

5.2.2. Esquema del algoritmo para el uso del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

Dentro del esquema general de exploración del espacio de soluciones de un problema de este tipo, de carácter combinatorio, en esta ocasión se utiliza un método de tabulación (en cuatro vectores: *Gfrom*, *Gto*, *Gtime* y *Gcycle*) para describir el grafo asociado a una secuencia \mathbf{H} de una instancia de dimensión m . Los componentes de dichos vectores se plantean en la acción *Crear grafo de secuencia*, dentro de un bucle que analizaría diferentes secuencias posibles, hasta encontrar aquélla que minimice el tiempo de ciclo o finalizar por exceso de iteraciones.

En los próximos apartados se comentará cómo se desarrolla la acción *Resolver grafo de secuencia*, a partir de la información desplegada al crear los vectores y, más adelante, se analizará la exploración del vecindario como alternativa al procedimiento arborescente, en caso de un número elevado de etapas del proceso (m).

```

Inicialización de variables (H,T,TC, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime)

Lectura de datos de un ejemplar (m,A,B,E,F)

Secuencia inicial (H=H0)
iteracion=0
MIENTRAS (no_condición_final (H,T,TC,iteracion))

    Crear grafo de secuencia (m, H, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime)
    Resolver grafo secuencia (m, H, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime, T, TC)

    Si (TC ≤ TC*)
        TC*=TC; T*=T; H*=H

    Explorar vecindario (m, H, T, TC, iteracion)
    iteracion=iteracion+1

finMIENTRAS
    
```

Como se puede observar en el algoritmo, previamente al proceso iterativo, es necesario declarar las variables del programa y conocer los datos propios del ejemplar (dimensión del problema m , vectores de ventana temporal \mathbf{A} , \mathbf{B} , vector de transporte con carga \mathbf{F} , y matriz de transporte sin carga \mathbf{E}). Asimismo, se definen los cuatro vectores correspondientes a las informaciones sobre la estructura del grafo: origen y destino de los arcos y los valores dependiente e independiente de la variable a minimizar, el tiempo de ciclo.

La condición de final del algoritmo permite una mayor o menor exploración del campo de soluciones posibles, y puede estar limitada por un tiempo de ejecución o que se detenga cuando la solución ya no varíe después de un cierto número de iteraciones. Esta condición está estrechamente relacionada con la exploración del vecindario de soluciones realizada en el interior del bucle interactivo.

5.2.3. Particularidades en la resolución de un grafo asociado a una secuencia H

La presencia del límite superior para las ventanas temporales en cada estación o baño comporta un aspecto fundamental en el tipo de problemas tratados, el carácter de factibilidad, o su complementario el carácter de infactibilidad, para una secuencia propuesta. No se trata de un caso aislado, sino ocurre frecuentemente en muchas de las posibles secuencias en ciertos ejemplares.

Por lo tanto, durante el proceso de resolución de secuencias o subsecuencias a través de un grafo (desde que éste se plantea hasta que se obtienen los resultados) será interesante poder realizar separadamente dos actuaciones básicas: el análisis sobre la factibilidad de una secuencia y la caracterización de su solución (para una secuencia de movimientos dada).

Si se utilizaran herramientas como las ya presentadas hasta este momento, ambas deberían realizarse conjuntamente de manera obligatoria durante la resolución.

- Por un lado, planteado un grafo, el análisis de la factibilidad de una secuencia. El análisis de factibilidad debe permitir discriminar si la secuencia en proceso de evaluación incumple alguna restricción de grúa o de tanque (en algún baño) simultáneamente con otras restricciones, y como consecuencia, queda descartada como posible solución del problema.
- Por otro lado, la evaluación de la duración de un ciclo de movimientos fijado por una secuencia. Con la evaluación de la secuencia o subsecuencia, los movimientos se temporizan, es decir, se hallan los instantes de tiempo asociados al vector \mathbf{T} , para finalmente obtener el tiempo de ciclo TC.

Para lograr que un algoritmo, como el que se presentará en el apartado 5.2.4, cuente con estas dos subacciones por separado, es necesario plantear previamente cómo se construye un grafo de las características citadas (grafo con Tiempo de Ciclo Acotado), apartado 5.3.

Finalmente, existe otro aspecto a considerar en la resolución del problema. La herramienta utilizada para resolver los problemas planteados de este tipo, programas lineales, condiciona la velocidad de evaluación de secuencias.

Como respuesta a estas observaciones, detectadas en una primera parte de la experiencia computacional para determinar el valor de las variables asociadas a cada secuencia mediante técnicas como la programación lineal, surge una metodología alternativa que intenta reducir los tiempos de computación. Asimismo, esta metodología permite detectar con mayor prontitud algunas secuencias que no serán a la postre factibles.

El empleo de grafos y el estudio de las características de los arcos que los forman permiten, sin la aplicación de algoritmos para la búsqueda de caminos máximos en un grafo, de manera más eficiente:

- descartar aquellas secuencias que no sean factibles, o
- limitar a una estrecha franja los posibles valores de tiempo de ciclo para una secuencia de movimientos de grúa.

Este propósito se materializa en el procedimiento llamado Primera prueba, de infactibilidad, el cual no reconoce a todas las secuencias no factibles de un problema. Ahora bien, aquéllas reconocidas como infactibles por su composición inicial de secuencia de movimientos, son descartadas con prontitud y se permite destinar tiempo de cálculo a cálculos que realmente puedan aportar informaciones relevantes en la búsqueda del valor óptimo de tiempo de ciclo.

5.2.4. Esquema del algoritmo de resolución basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

En la Figura 5.2 la introducida Primera prueba, de infactibilidad, se corresponde con la evaluación FACTIBLE (1), una vez superado de manera automática el AJUSTE DE COTAS. La acción RESOLVER GRAFO comprueba definitivamente, basándose en los algoritmos ya conocidos de búsqueda de caminos máximos en un grafo, si la secuencia propuesta es factible, o sea, la evaluación FACTIBLE (2).

Hasta este punto, no se ha detallado con suficiente exactitud el contenido de la acción sobre *Resolver grafo de una secuencia* del esquema de algoritmo presentado en el apartado 5.2.3, el cual se detalla a continuación. Dicha acción del algoritmo se puede considerar subdividida en cuatro partes diferenciadas, que son las siguientes:

- Dada una **secuencia de movimientos** inicial, se construye el grafo asociado, tal como se describe en el apartado 5.3. Sobre dicho grafo, ya puede realizarse una primera exploración, lo cual en algunos casos permitirá descartar una secuencia inicialmente pendiente de evaluación.
- Para que una secuencia de movimientos supere la Primera prueba, de infactibilidad, o a priori, se lleva a cabo el **Ajuste de cotas**, analizando ciertas cotas obtenidas de la formación de circuitos en el grafo
- Esta parte del algoritmo supone la **Primera prueba, de infactibilidad, o Prueba a priori**. En caso que una secuencia ya no supere satisfactoriamente este análisis de infactibilidad, se puede asegurar que la secuencia es no factible y se descarta.
- En caso que se cumplan ciertas condiciones, debe **Resolverse el grafo** (que en este caso muestra el programa lineal equivalente).
- Si aún la secuencia a evaluar, después de la anterior fase de la resolución, no ha descartado su carácter factible o no, se realiza una **Segunda prueba, de factibilidad o Prueba a posteriori**, que indica si definitivamente la secuencia es factible o infactible.
- En caso que la secuencia analizada sea factible, se comprueba si la solución hallada es mejor que la disponible hasta dicho momento, con lo cual pasaría a ser la solución óptima provisional.

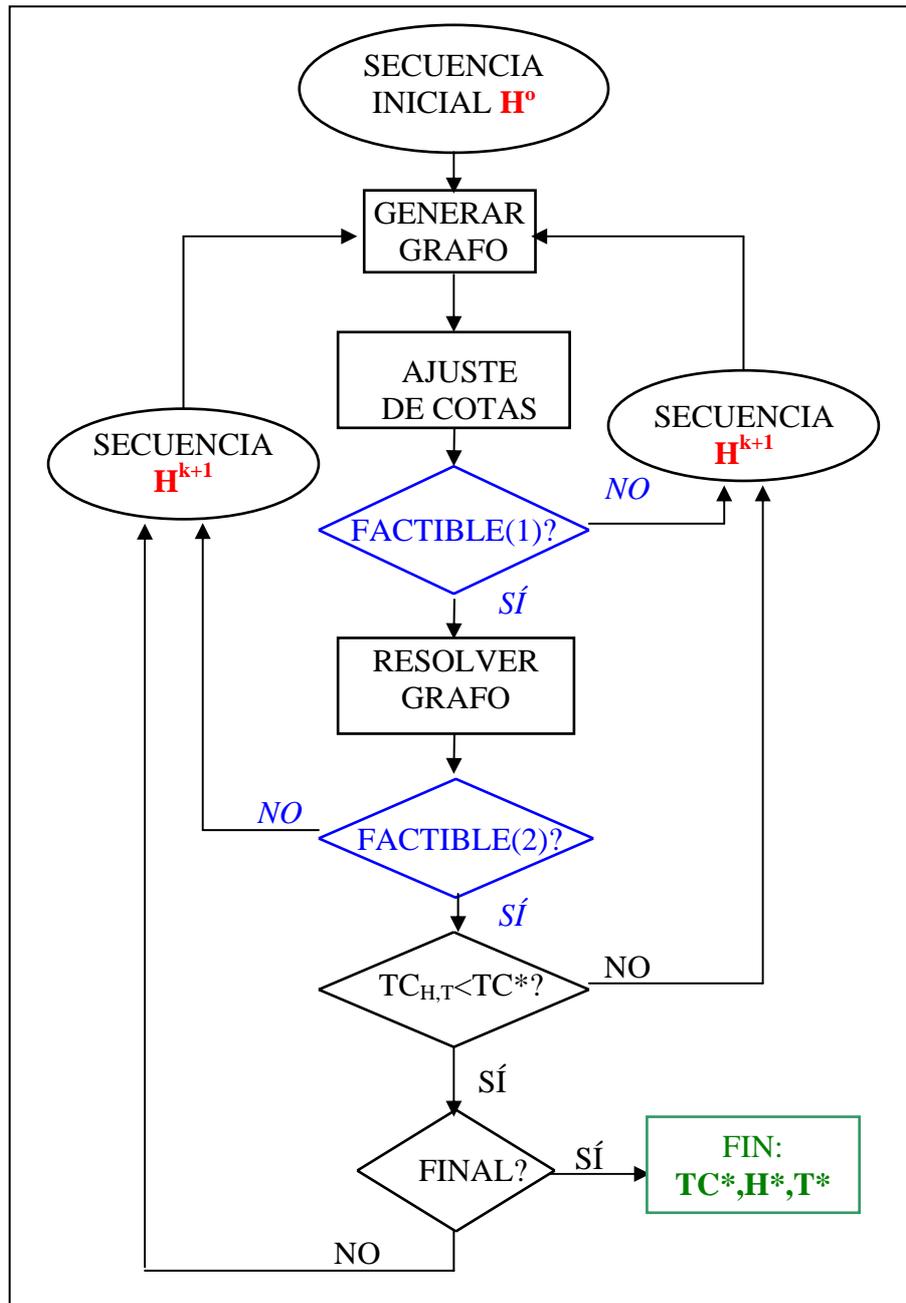


Figura 5.2. Diagrama de flujo de la resolución mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

5.3. Generación de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, asociado a una secuencia H

Las características fundamentales de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, asociado a una secuencia de movimientos H , que se describe seguidamente son las siguientes:

- Se trata de un grafo (con lo cual deben definirse sus arcos y sus vértices).
- La longitud de algunos de los arcos de dicho grafo depende de la variable a minimizar TC.
- Pueden hallarse cotas superiores e inferiores sobre el valor del tiempo de ciclo (TC) para la secuencia propuesta, previas a la determinación de caminos máximos entre un vértice de referencia 0 y cualquier otro vértices (1, ..., m).

5.3.1. Adaptación de los parámetros y datos para una secuencia H

De acuerdo con lo planteado por Leal, Bautista y Mateo (1998), a continuación se muestra cómo las ecuaciones planteadas para determinar la programación de una secuencia de movimientos completa pueden adoptar el esquema de ligaduras potenciales entre dos vértices, que será más adecuado para realizar los cálculos posteriores. Así, lo que en un principio podría parecer un instrumento más bien auxiliar, se convertirá en un elemento útil a la hora de clasificar y distribuir los datos del problema. El cambio consiste en dejar en el primer miembro una diferencia de instantes de tiempo (variables del problema) y que el primer miembro sea mayor o igual al segundo.

R1. Restricciones del tiempo de proceso de un objeto en un tanque

R1.1. Restricciones de operación monociclo

Partiendo de una ecuación del tipo $a_i \leq t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i$ (4.6), el primer paso supone considerar cada una de ambas restricciones por separado, lo que equivale a:

$$\begin{aligned} a_i &\leq t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) \\ t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) &\leq b_i \end{aligned}$$

Así pues, la transformación en la primera ecuación tipo supone intercambiar los miembros, dejando el tiempo f_{i-1} en el segundo, y en la segunda ecuación tipo, cambiar el signo, desplazando el tiempo f_{i-1} al segundo miembro:

$$t_i - t_{i-1} \geq a_i + f_{i-1} \tag{5.1}$$

$$t_{i-1} - t_i \geq -b_i - f_{i-1} \tag{5.2}$$

R1.2. Restricciones de operación biciclo

Nuevamente, para una ecuación del tipo $a_i \leq t_i - (t_{i-1} + TC + f_{i-1}) \leq b_i$ (4.7), se repiten los pasos anteriores, empezando por separar cada una de las dos restricciones:

$$\begin{aligned} a_i &\leq t_i - (t_{i-1} - TC + f_{i-1}) \\ t_i - (t_{i-1} - TC + f_{i-1}) &\leq b_i \end{aligned}$$

En este caso, en la transformación de la primera ecuación tipo se intercambian los miembros, dejando el tiempo f_{i-1} y el tiempo de ciclo TC en el segundo, y para la segunda ecuación tipo, se cambia el signo y se desplaza el tiempo f_{i-1} y el tiempo de ciclo TC al segundo miembro:

$$t_i - t_{i-1} \geq a_i + f_{i-1} - TC \quad (5.3)$$

$$t_{i-1} - t_i \geq -b_i - f_{i-1} + TC \quad (5.4)$$

R2. Restricciones de tiempo de viaje de la grúa

R2.1. Restricciones de relación entre movimientos internos de un ciclo:

Se trata de una ecuación del tipo $t_j \geq t_i + f_i + e_{i+1,j}$ (4.8), en la cual para lograr las premisas propuestas, se desplaza la variable t_i al primer miembro, dejando en los tiempos de movimiento en carga y en vacío en el segundo miembro:

$$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j} \quad (5.5)$$

R2.2. Restricción interciclos (entre los movimientos extremos de dos ciclos):

Se trata de una ecuación del tipo $t_0 + TC \geq t_{[m]} + f_{[m]} + e_{[m]+1,0}$ (4.9), donde el formato establecido se obtiene desplazando la variable $t_{[m]}$ al primer miembro y el tiempo de ciclo TC al segundo. Los tiempos de movimiento en carga y en vacío permanecen en el segundo miembro:

$$t_0 - t_{[m]} \geq f_{[m]} + e_{[m]+1,0} - TC \quad (5.6)$$

5.3.2. Tabulación de los cuatro vectores de datos

El método propuesto recibe el nombre de **tabulación** pues consiste en generar cuatro vectores, *Gfrom*, *Gto*, *Gtime* y *Gcycle*, con tantos componentes como restricciones se hayan definido, es decir, $3m+1$. Dichos vectores recibirán los siguientes nombres:

- *Gfrom*: vector del origen del arco asociado a una restricción.
- *Gto*: vector del destino del arco asociado a una restricción.
- *Gtime*: vector del valor del término independiente del arco asociado a una restricción.
- *Gcycle*: vector auxiliar de la posible relación entre diferentes ciclos planteada en una restricción.

Reagrupando los diferentes tipos de restricciones, y ordenándolas para que las de tiempo de proceso en los tanques se sitúen antes que las de tiempo de viaje de grúa, se obtiene la siguiente división de datos (tabla 5.1) en los cuatro vectores:

Tipo	Restricción	Número	Gfrom	Gto	Gtime	Gcycle
1 (R1.1)	$t_i - t_{i-1} \geq a_i + f_{i-1}$	p	$i-1$	i	$a_i + f_{i-1}$	0
2 (R1.1')	$t_{i-1} - t_i \geq -b_i - f_{i-1}$	p	i	$i-1$	$-b_i - f_{i-1}$	0
3 (R1.2)	$t_i - t_{i-1} \geq a_i + f_{i-1} - TC$	$m-p$	$i-1$	i	$a_i + f_{i-1}$	-1
4 (R1.2')	$t_{i-1} - t_i \geq -b_i - f_{i-1} + TC$	$m-p$	i	$i-1$	$-b_i - f_{i-1}$	1
5 (R2.1)	$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j}$	m	i	j	$f_i + e_{i+1,j}$	0
6 (R2.2)	$t_0 - t_{[m]} \geq f_{[m]} + e_{[m]+1,0} - TC$	1	[m]	0	$f_{[m]} + e_{[m]+1,0}$	-1

 Tabla 5.1. Tabulación de parámetros de las restricciones asociadas a una secuencia \mathbf{H} .

El número de restricciones p de los tipos 1 y 2 depende de la secuencia de movimientos de la grúa \mathbf{H} , cumpliéndose que $1 \leq p \leq m$. De manera complementaria, al sumar, por un lado, las restricciones de tipo 1 y de tipo 3, y por otro, de tipo 2 y de tipo 4, se debe alcanzar el número total de estaciones m .

Los $2m$ primeros componentes de los vectores de las tablas (filas según la tabla 5.1) requieren un cierto grado de habilidad, ya que dependen de la secuencia o vector de movimientos de la grúa \mathbf{H} a evaluar.

Para una ventana temporal cualquiera en el tanque i , $1 \leq i \leq m$, se generan dos restricciones c y c' genéricamente, siendo $c=2i-1$ y $c'=2i$, para las cuales deben realizarse las siguientes acciones:

- Se comprueba si existe un movimiento anterior en el ciclo, correspondiente a la extracción del objeto del tanque $i-1$:
- Si la respuesta es afirmativa, de las dos restricciones de baño una corresponde al tipo 1 y otra al tipo 2, con lo cual $Gcycle(c)=0$ y $Gcycle(c')=0$.
- Si la respuesta es negativa, se trata de dos restricciones de los tipos 3 y 4, respectivamente. $Gcycle(c)$, o en su caso $Gcycle(c')$, tomará el mismo signo que $Gtime(c)$, o $Gtime(c')$. Es decir:

$$Gtime(c) < 0 \Rightarrow Gcycle(c) = -1$$

$$Gtime(c) > 0 \Rightarrow Gcycle(c) = +1$$

Los $m+1$ últimos componentes de los vectores de las tablas (filas según la tabla 5.1) se pueden obtener de forma más simple. Para ello, es suficiente disponer de un vector \mathbf{F} , cuyos elementos sean los tiempos de desplazamiento de la grúa con carga, y de una matriz \mathbf{E} , cuyos elementos se refieren a los tiempos de desplazamiento de la grúa en vacío, sin carga.

El vector \mathbf{F} tiene dimensión $m+1$, donde el valor de la posición i de dicho vector indica el tiempo de desplazamiento de la grúa con carga entre los tanques i e $i+1$.

La matriz \mathbf{E} cuenta con $m+2$ filas por $m+1$ columnas. La primera fila indica los tiempos de desplazamiento sin carga entre la estación de carga y cualquiera de los m baños; las siguientes m filas indican lo propio entre dos tanques i, j cualesquiera (fila i , columna j); la

última fila $m+2$ almacena los tiempos de desplazamiento sin carga entre la estación de descarga y cualquiera de los m baños. En caso que coincidan en un mismo sitio las estaciones de carga y descarga, la fila $m+1$ será igual que la fila 0, y por lo tanto, no sería necesario incluir ésta última al coincidir exactamente ambos grupos de elementos.

El vector $Gcycle$ para dichas $m+1$ posiciones, en función de la presencia de TC en dichas restricciones, contiene m veces el valor 0 y, finalmente, la última con valor negativo -1 .

5.3.3. Equivalencia entre los cuatros vectores y las restricciones originales

Una vez se han almacenado los datos del modelo en el formato de cuatro vectores indicado en el apartado anterior, se pueden generar todas las restricciones del modelo, según las siguientes reglas:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } Gcycle(c) = 0 & \mathbf{t}_{Gto(c)} - \mathbf{t}_{Gfrom(c)} \geq Gtime(c) \\ \text{Si } Gcycle(c) = 1 & \mathbf{t}_{Gto(c)} - \mathbf{t}_{Gfrom(c)} \geq Gtime(c) + TC \\ \text{Si } Gcycle(c) = -1 & \mathbf{t}_{Gto(c)} - \mathbf{t}_{Gfrom(c)} \geq Gtime(c) - TC \end{array}$$

Para obtener todas y cada una de las restricciones, la variable contador c debe variar desde 1 hasta $3m+1$ (número total de restricciones).

5.3.4. Descripción de los elementos de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

Para describir unívocamente un grafo de este tipo, debe definirse el significado de sus tres elementos principales: \mathbf{V} , el conjunto de vértices; \mathbf{A} , el conjunto de arcos; y \mathbf{l} , los valores de las longitudes de los arcos. Representado el grafo que tenga a los tres en cuenta, se podrá determinar, si una secuencia es factible, hallando el camino máximo entre dos vértices (el vértice referencia y cualquier otro vértice).

- **Vértices (V):** Representan los tanques de los cuales la grúa recoge un objeto (**vértices de salida** en la anterior notación, o tanques de recogida).

Recordemos que existen $m+1$ vértices de salida, con las etiquetas del número de tanque i ($0 \leq i \leq m$). En el grafo los vértices están ordenados según la secuencia de operaciones que debe recibir el producto (en esta variante, al ser monofunción y monobaño, los vértices están perfectamente ordenados según el número de tanque).

- **Arcos (A):** El número de arcos de un grafo viene determinado por las limitaciones o necesidades temporales, $3m+1$ restricciones, por desplazamientos de la grúa o por permanencia de los objetos en los baños:
 - **Arcos de operación:** Los $2m$ arcos de este tipo, debidos a ventanas temporales de permanencia de los objetos en los tanques, pueden reflejar tiempos mínimos necesarios a_i o tiempos máximos limitativos b_i . Este grupo de arcos une vértices adyacentes en el orden gráfico establecido.

- **Arcos de movimiento:** Los $m+1$ arcos de este tipo, debidos a los tiempos consumidos por la grúa en desplazamientos, contienen dos partes de tiempo: de carga f_i , cuando la grúa se desplaza con algún objeto; y sin carga $e_{i,j}$, cuando los movimientos de sin desplazamiento de objetos:
- **Longitudes de los arcos(l):** Dichos valores se asocian a los tiempos que transcurren (por desplazamiento de la grúa o por permanencia de los objetos en los baños):
 - **De operación monociclo mínimos:** para cada restricción 4.6, $a_i \leq t_i - (t_{i-1} + f_{i-1})$, se define un arco del vértice **i-1** al vértice **i** con longitud $a_i + f_{i-1}$.
 - **De operación monociclo máximos:** para cada restricción 4.6, $t_i - (t_{i-1} + f_{i-1}) \leq b_i$, se define un arco del vértice **i** al vértice **i-1** con longitud $-b_i - f_{i-1}$.
 - **De operación bicicleta mínimos:** para cada restricción 4.7, $a_i \leq t_i - (t_{i-1} + TC + f_{i-1})$, se define un arco del vértice **i-1** al vértice **i** con longitud $a_i + f_{i-1} - TC$.
 - **De operación bicicleta máximos:** para cada restricción 4.7, $t_i - (t_{i-1} + TC + f_{i-1}) \leq b_i$, se define un arco vértice **i** al vértice **i-1** con longitud $-b_i - f_{i-1} + TC$.
 - **De movimiento:** para cada restricción 4.8, $t_j \geq t_i + f_i + e_{i+1,j}$, se define un arco entre los vértices **i** y **j** con longitud $f_i + e_{i+1,j}$.
 - **De movimiento adicional:** para la restricción 4.9, $t_0 + TC \geq t_{[m]} + f_{[m]} + e_{[m]+1,0}$, se define un arco del vértice **[m]** al vértice **0** con longitud $f_{[m]} + e_{[m]+1,0} - TC$.

5.3.5. Construcción del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado asociado a una secuencia

Sean los vértices del grafo los baños ordenados según la secuencia de operaciones que debe recibir el producto.

Sean las **restricciones de operación monociclo** (entre un tanque i y el tanque anterior $i-1$ y viceversa), según las ecuaciones (5.1) y (5.2):

$$\begin{aligned} t_i - t_{i-1} &\geq a_i + f_{i-1} \\ t_{i-1} - t_i &\geq -b_i - f_{i-1} \end{aligned}$$

Sean las **restricciones de operación bicicleta** (entre un tanque i y el tanque anterior $i-1$ y viceversa), según las ecuaciones (5.3) y (5.4):

$$\begin{aligned} t_i - t_{i-1} &\geq a_i + f_{i-1} - TC \\ t_{i-1} - t_i &\geq -b_i - f_{i-1} + TC \end{aligned}$$

Los arcos que deben representar estas restricciones solamente dependen de las ventanas temporales de los baños (a_i, b_i), del tiempo de movimiento de la grúa entre los tanques $i-1$ e i (f_{i-1}) y, si es necesario según la posición del tanque en la secuencia de operaciones de la

grúa, del tiempo de ciclo (TC). Así, se cierra un ciclo entre las estaciones $i-1$ e i , formando una cadena de arcos que unen la estación 0 con la estación m .

Para representar una secuencia \mathbf{H} en el grafo asociado, se indica la correlación entre movimientos consecutivos en una matriz cuadrada origen/destino \mathbf{V} , con dimensiones $(m+1)*(m+1)$, donde la posición $v(i,j)$ contiene el valor del arco que sale del vértice i y se dirige al vértice j . Dichos arcos responden a las ecuaciones (5.5) y (5.6). En caso que entre ambos vértices ningún arco esté definido, se guarda el valor ∞ . La información necesaria se extrae de las tablas G_{from} , G_{to} , G_{time} y G_{cycle} .

Sea un grafo genérico de m tanques, éste contiene los siguientes parámetros y variables:

\mathbf{a}_i : componente i -ésima del vector \mathbf{A} (por definición $\mathbf{a}_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$), de tiempos mínimos en las restricciones de ventana, necesario en los arcos de tanque, de avance.

\mathbf{b}_i : componente i -ésima del vector \mathbf{B} (por definición $\mathbf{b}_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$), de tiempos máximos en las restricciones de ventana, necesario en los arcos de tanque, de retroceso.

\mathbf{v}_{ij} : valor independiente de las restricciones de grúa, sean de avance o retroceso, cuyo valor es la suma de los tiempos de desplazamiento de ésta con y sin carga ($\mathbf{f}_i + \mathbf{e}_{i+1,j}$), entre los tanques de origen i y de destino j .

\mathbf{ka}_i : coeficiente binario ($\mathbf{ka}_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq m$) asociado a la variable del tiempo de ciclo TC, en los arcos de tanque, de avance, que vale 1 cuando se trata de una restricción de operación bicicleta.

\mathbf{kb}_i : coeficiente binario ($\mathbf{kb}_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq m$) asociado a la variable del tiempo de ciclo TC, en los arcos de tanque, de retroceso, que vale 1 cuando se trata de una restricción de operación bicicleta.

En la figura 5.3 se representan los $m+1$ vértices de un grafo genérico y algunos arcos representativos, que seguidamente serán comentados.

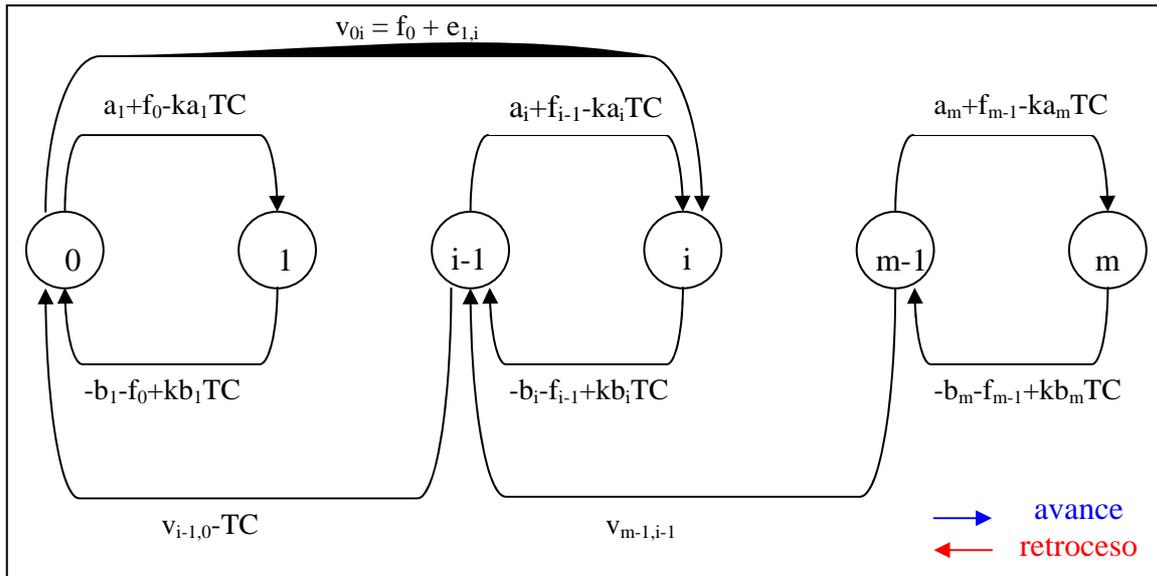


Figura 5.3. Estructura general de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

En el anterior grafo (figura 5.3), se observan cuatro tipos de arcos:

- **Arcos de tanque, de avance (arcos de tanque de avance):** son aquellos arcos que se dirigen de un vértice origen con cardinal menor al vértice destino, y que representan a restricciones de tiempo mínimo en los baños, sean monociclo o bicicleta.

Ejemplos: los arcos que unen los vértices (0,1), (i-1,i), o bien (m-1,m).

- **Arcos de tanque, de retroceso (arcos de tanque de retroceso):** son aquellos arcos que se dirigen de un vértice origen con cardinal mayor al vértice destino, y que representan a restricciones de tiempo máximo en los baños, sean monociclo o bicicleta.

Ejemplos: los arcos que unen los vértices (1,0), (i,i-1), o bien (m,m-1).

- **Arcos de grúa, de avance (arcos de grúa de avance):** son aquellos arcos que se dirigen de un vértice origen con cardinal menor al vértice destino, y que representan a restricciones de movimiento de la grúa, que son internos de ciclo.

Ejemplo: el arco que une los vértices (0,i).

- **Arcos de grúa, de retroceso (arcos de grúa de retroceso):** son aquellos arcos que se dirigen de un vértice origen con cardinal mayor al vértice destino, y que representan a restricciones de movimiento de la grúa, que pueden ser internos de ciclo o interciclos.

Ejemplos: los arcos que unen los vértices (m-1,i-1), y también (i-1,0).

Una vez la estructura de las restricciones del problema queda reflejada en el grafo obtenido, en el siguiente apartado 5.4 se describe las bases que permiten realizar la Primera prueba de infactibilidad y el cálculo de cotas de la duración del ciclo, previo a la aplicación de cualquier tipo de algoritmo.

5.4. Resolución de una secuencia H mediante un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado: Primera prueba, de infactibilidad

Dado que el objetivo al resolver mediante una estructura de grafo un conjunto de relaciones temporales de precedencia, a partir de una secuencia de operaciones de grúa H , será oportuno obtener el valor de los vértices asociados a inicios de etapas o movimientos. Para ello, se recurre a aquellos algoritmos que en un grafo fuertemente conexo, como el que se ha descrito, permiten determinar el valor de un camino máximo entre dos vértices. Este camino máximo finito entre dos vértices existe si ningún posible circuito toma valor positivo. Por lo tanto, para que una secuencia sea factible el grafo asociado a cualquier circuito, formado por un conjunto de arcos, debe tener valor no positivo.

5.4.1. Cálculo de cotas inferiores para el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia H

Una primera cota inferior se obtiene uniendo todos los arcos de avance o de retroceso de grúa, ya que determinan el tiempo mínimo que una grúa requiere para realizar sus movimientos de transporte de materiales y de viaje sin carga según la secuencia de movimientos H indicada.

Sea el conjunto de arcos de avance y de retroceso de grúa, formado por m arcos que siguen una ecuación del tipo 5.5 y el arco del último movimiento del ciclo que toma la forma de la ecuación del tipo 5.6.

Para cumplir la condición:

$$\sum_{k=0}^m t[k+1] - t[k] \leq 0 \quad (5.7)$$

se debe satisfacer la inecuación 5.8. La siguiente cota, llamada $L(0)$, supone una primera cota inferior sobre la variable del tiempo de ciclo, a minimizar:

$$L(0) \geq \sum_{k=0}^{m-1} (v_{[k],[k+1]} + f_{[m]} + e_{[m+1],0}) = \sum_{k=0}^{m-1} (f_{[k]} + e_{[k+1],[k+1]}) + f_{[m]} + e_{[m+1],0} \quad (5.8)$$

A continuación, se presenta la metodología para determinar, basándose en el grafo presentado en la figura 5.3, la presencia de otras posibles cotas inferiores sobre la misma variable, el tiempo de ciclo TC. En ocasiones, éstas últimas, al combinar restricciones que afectan a los baños y a la grúa pueden resultar más restrictivas. El objetivo del siguiente desarrollo es sistematizar el cálculo de dichas cotas inferiores para el tiempo de ciclo TC.

Sea un arco de grúa de retroceso, que une el vértice i con el vértice j :

$$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j} = v_{ij} \quad (5.9)$$

siendo v_{ij} el tiempo mínimo que debe transcurrir entre el inicio de los movimientos de desplazamiento de objetos en los baños i y j .

Se trata de un arco que une los vértices i y j tales que $j < i$, lo cual implica que la pieza trasladada desde el tanque j había entrado en la línea de producción en un ciclo anterior al de la pieza trasladada desde el tanque i . Esto supone que entre los vértices i y j existe algún arco de avance que contenga la variable TC.

Se puede encontrar un camino entre el vértice j y el vértice i pasando por los vértices intermedios $(j+1, \dots, i-1)$, formado por los arcos de tanque, de avance:

$$\begin{aligned} t_{j+1} - t_j &\geq a_{j+1} + f_j - ka_{j+1} \cdot TC \\ &\dots \\ t_i - t_{i-1} &\geq a_i + f_{i-1} - ka_i \cdot TC \end{aligned}$$

Se define w_{ji} como la suma de los términos independientes de las $i-j$ ecuaciones anteriores:

$$w_{ji} = \sum_{s=j+1}^i (a_s + f_{s-1} - ka_s \cdot TC) \quad (5.10)$$

Entonces, para encontrar una solución factible en el grafo se debe cumplir que:

$$w_{ji} + v_{ij} \leq 0 \quad (5.11)$$

En la figura 5.4 se observa el arco de grúa de retroceso, que une el vértice i con el vértice j , y los arcos de tanque de avance, que los unen en sentido contrario.

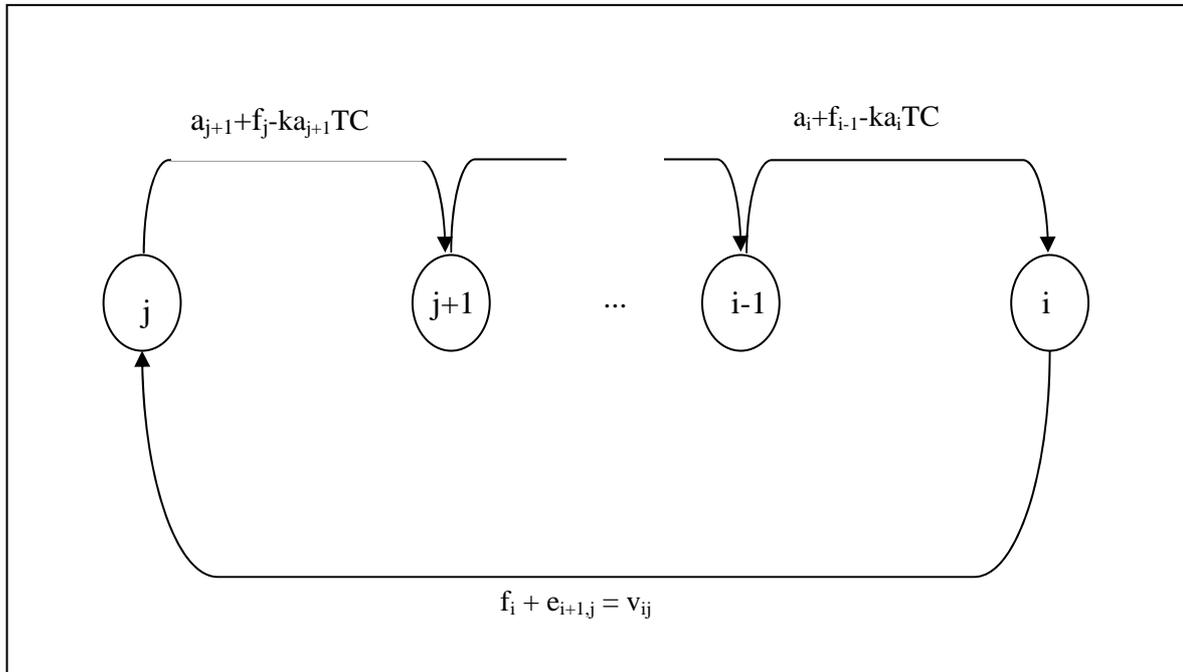


Figura 5.4. Determinación gráfica de cotas mediante un arco de grúa, de retroceso.

Sustituyendo los valores de v_{ij} y w_{ji} en la ecuación 5.11, se llega a la desigualdad:

$$\sum_{s=j+1}^i (a_s + f_{s-1} - ka_s \cdot TC) + v_{ij} = v_{ij} + \sum_{s=j+1}^i (a_s + f_{s-1}) - TC \sum_{s=j+1}^i (ka_s) \leq 0 \quad (5.12)$$

Agrupando los parámetros a_s y ka_s , se observa como ambos sumatorios toman, por definición de sus componentes, valores positivos:

$$v_{ij} + \sum_{s=j+1}^i (a_s + f_{s-1}) > 0 \quad (5.13)$$

$$\sum_{s=j+1}^i (ka_s) \geq 0 \quad (5.14)$$

Despejando la variable TC de la expresión anterior, se obtiene una expresión para la cota inferior $L(j)$, asociada al vértice destino del arco de grúa de retroceso:

$$L(j) = \frac{v_{ij} + \sum_{s=j+1}^i (a_s + f_{s-1})}{\sum_{s=j+1}^i (ka_s)} \leq TC \Leftrightarrow \sum_{s=j+1}^i (ka_s) > 0 \quad (5.15)$$

Siempre que el sumatorio de la ecuación 5.14 sea positivo (condición necesaria), existirá una cota inferior del tiempo de ciclo TC según la expresión 5.15, donde j es el vértice destino del arco de grúa de retroceso.

Entre todos los circuitos formados por un arco de grúa de retroceso más arcos de tanque de avance, el arco de grúa de retroceso que indica el último movimiento de la grúa en el ciclo constituye un caso particular. Dicho arco, con destino el vértice 0 , a diferencia de los otros, contiene obligatoriamente la variable TC que está siendo acotada. Por lo tanto, ya no es necesaria la condición de no nulidad del sumatorio de coeficientes asociados a TC.

Así, la expresión anterior (5.15) toma en este caso la siguiente forma:

$$L(m+1) = \frac{v_{i0} + \sum_{s=1}^i (a_s + f_{s-1})}{1 + \sum_{s=1}^i (ka_s)} \leq TC \quad (5.16)$$

Esta última ecuación 5.16 garantiza que siempre se puede encontrar una cota inferior de la variable TC, como mínimo, dado que el denominador tendrá un valor siempre positivo, de como mínimo la unidad.

En resumen, como conclusión de las anteriores observaciones, se puede determinar una cota inferior del tiempo de ciclo TC tomando el máximo de todas las expresiones 5.8, 5.15 y 5.16:

$$LB_H = \max \{ L(0), L(j), L(m+1) \} \quad (5.17)$$

$\forall L(j)$ tal que \exists circuito de arcos “tanque de avance + grúa de retroceso”
con destino en el vértice j

5.4.2. Cálculo de cotas superiores para el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia H

En este caso, se plantea el objetivo del siguiente desarrollo como el cálculo de cotas superiores para el tiempo de ciclo TC, siguiendo un esquema parecido a la obtención de cotas inferiores para la variable TC. No obstante, siempre existe una cota superior $U(0)$ que se obtiene al suponer la secuencia de movimientos trivial, de trasladar los objetos uno a uno desde la estación de carga 0 hasta la estación de descarga $m+1$ (fórmula 3.79). $U(0)$ es una cota superior del tiempo de ciclo para cualquier secuencia de movimientos factible, sin importar qué secuencia asociadas a un grafo vaya a evaluarse.

Sea un arco de grúa de avance, que une el vértice i con el vértice j :

$$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j} = v_{ij} \quad (5.18)$$

siendo nuevamente v_{ij} el tiempo mínimo que debe transcurrir entre el inicio de los movimientos de desplazamiento de objetos en los baños i y j .

Se trata de un arco que une dos vértices i y j tales que $i < j$, lo cual implica que la pieza trasladada desde el tanque j puede haber entrado en la línea de producción en un mismo ciclo o en uno anterior al de la pieza trasladada desde el tanque i . Esto implica que entre los vértices i y j puede existir algún arco de avance que contenga la variable TC.

Se puede encontrar un camino entre el vértice j y el vértice i pasando por los vértices intermedios ($j-1, \dots, i+1$), formado por los arcos de tanque de retroceso:

$$\begin{aligned} t_{j-1} - t_j &\geq -b_j - f_{j-1} + kb_j \cdot TC \\ \dots \\ t_i - t_{i+1} &\geq -b_{i+1} - f_i + kb_{i+1} \cdot TC \end{aligned}$$

Se define w_{ji} como la suma de los términos independientes de las $i-j$ ecuaciones anteriores:

$$w_{ji} = \sum_{s=j}^{i-1} (-b_s - f_{s-1} + kb_s \cdot TC) \quad (5.19)$$

Al igual que en la ocasión anterior, se debe cumplir (como se observa en la figura 5.5):

$$w_{ji} + v_{ij} \leq 0 \quad (5.20)$$

Sustituyendo los valores de v_{ij} y w_{ji} en la ecuación 5.20, se llega a la desigualdad:

$$\sum_{s=j}^{i-1} (-b_s - f_{s-1} + kb_s \cdot TC) + v_{ij} = v_{ij} - \sum_{s=j}^{i-1} (b_s + f_{s-1}) + TC \sum_{s=j}^{i-1} (kb_s) \leq 0 \quad (5.21)$$

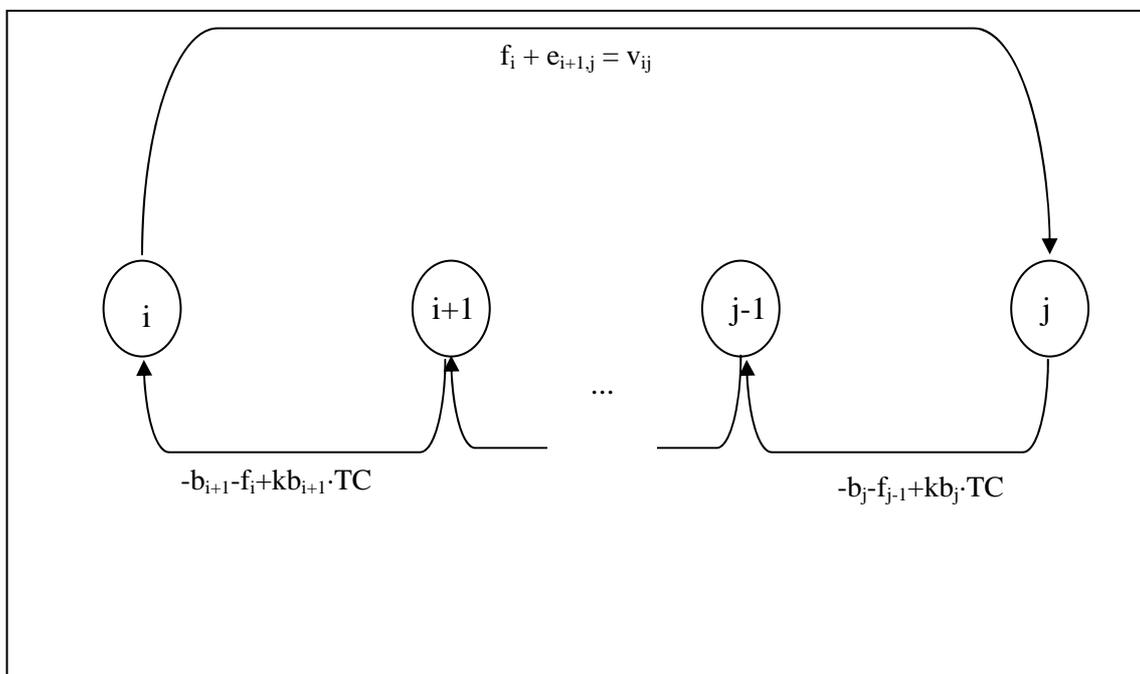


Figura 5.5. Determinación gráfica de cotas mediante un arco de grúa, de avance.

En este caso, agrupando los parámetros b_s y kb_s , se observa como sólo el segundo sumatorio toma, por definición de sus componentes, valores no negativos:

$$\sum_{s=j}^{i-1} (kb_s) \geq 0 \quad (5.22)$$

Despejando la variable TC de la expresión anterior se obtiene una expresión para la cota superior $U(j)$, asociada al vértice destino del arco de grúa de avance:

$$U(j) = \frac{-v_{ij} + \sum_{s=j}^{i-1} (b_s + f_{s-1})}{\sum_{s=j}^{i-1} (kb_s)} \geq TC \Leftrightarrow \sum_{s=j}^{i-1} (kb_s) > 0 \quad (5.23)$$

El numerador de la expresión anterior (5.23) contiene una diferencia de valores, que según sean las secuencias evaluadas mediante el grafo puede resultar positiva, nula o negativa. El denominador, al estar formado por la suma de términos binarios, sólo puede ser nulo o negativo.

Casuística:

1. Si la suma de todos los coeficientes kb_s (denominador) es nula \Rightarrow El vértice j no proporciona ninguna $U(j)$, cota superior sobre el tiempo de ciclo de la secuencia propuesta, según la operación de transporte que se inicia sobre el tanque j .
2. Si la suma de todos los coeficientes kb_s (denominador) es positiva y el numerador es positivo $\Rightarrow U(j) > 0 \Rightarrow U(j) \geq TC$ (cota superior sobre el tiempo de ciclo de la secuencia propuesta, según la operación de transporte iniciada sobre el tanque j).
3. La expresión no tiene sentido, ni se puede cumplir, si la suma de todos los coeficientes kb_s (denominador) es positiva y el numerador es negativo, $U(j) \leq 0$.

De lo anterior, se deduce si se cumplen las condiciones sobre los parámetros del sistema, que permitan lograr la segunda situación, se pueden hallar cotas superiores para el tiempo de ciclo TC.

Entre todos aquellos circuitos formados por un arco de grúa de avance más arcos de tanque de retroceso que permiten hallar valores $U(j)$ posibles, la cota superior del tiempo de ciclo asociado a una secuencia se calcula como la más restrictiva entre la cota superior trivial y las halladas mediante las expresiones 5.23:

$$UB_H = \min \{ U(0), U(j) \} \quad (5.24)$$

$\forall U(j)$ tal que \exists circuito de arcos “tanque de retroceso + grúa de avance” con destino en el vértice j

5.4.3. Análisis conjunto de cotas inferiores y superiores sobre el tiempo de ciclo, asociado a una secuencia \mathbf{H}

Si se toman conjuntamente los valores de LB_H y UB_H , cotas sobre el posible tiempo de ciclo asociado a una secuencia \mathbf{H} de movimientos de la grúa, que se obtienen mediante las expresiones 5.17 y 5.24, pueden producirse las situaciones descritas en la propiedad 1.

Propiedad 1:

Si $LB_H < UB_H \Rightarrow$ La secuencia \mathbf{H} de movimientos de grúa puede tratarse de una secuencia factible, con tiempo de ciclo TC ($LB_H \leq TC_H \leq UB_H$) o resultar una secuencia infactible ($TC=\infty$).

Si $LB_H = UB_H \Rightarrow$ La secuencia \mathbf{H} de movimientos de grúa puede tener tiempo de ciclo TC ($LB_H = TC_H = UB_H$), secuencia factible, o resultar una secuencia infactible ($TC=\infty$).

Si $UB_H < LB_H \Rightarrow$ La secuencia \mathbf{H} de movimientos de grúa es infactible ($TC=\infty$).

Las dos primeras de las tres situaciones planteadas en la Propiedad 1 no permiten asegurar que la secuencia \mathbf{H} en proceso de evaluación sea finalmente factible o infactible, dado que el análisis no se realiza sobre todos los circuitos, y además, dichos circuitos suponen una relajación del conjunto de ecuaciones para una secuencia.

Por lo tanto, se aplica la Propiedad 1 en una primera fase, donde algunas secuencias de movimientos de la grúa ya son descartadas al no superar la llamada Primera prueba, de infactibilidad. Además, en caso que una secuencia aún mantenga la posibilidad de ser factible, se dispone de información sobre su posible tiempo de ciclo, muy válida para una resolución competitiva mediante grafos, como se verá en el siguiente apartado.

En definitiva, el análisis conjunto de ambas cotas (inferior y superior) para el tiempo de ciclo de una secuencia \mathbf{H} solamente sirve para decidir entre la evaluación del grafo asociado, mediante el cálculo de un camino máximo entre dos de sus vértices, o dar por finalizada la evaluación de la secuencia \mathbf{H} en curso.

5.4.4. Ejemplo ilustrativo 5.1

Tomemos nuevamente el problema de tratamiento de piezas en una línea de producción, presentado en el apartado 4.3.5, añadiendo al proceso una cuarta fase. Cada pieza procesada debe permanecer en la estación donde se realice una operación durante un tiempo, medido en segundos, comprendido entre los valores mínimo y máximo que se muestran en la siguiente tabla.

Operación	Lavado	Baño de sales	Secado	Recubrimiento
Tiempo mínimo	30	40	40	20
Tiempo máximo	50	60	50	60

Tabla 5.2. Datos del ejemplo 5.1.

Los demás datos se mantienen todos iguales. Una única grúa transportadora realiza el movimiento de piezas entre estaciones, además del transporte desde la estación de carga a la primera estación y desde la última a la de descarga. El tiempo requerido por la grúa para recoger una pieza en una estación y depositarla en la estación destino es de 10 segundos. En vacío, la grúa se desplaza a una velocidad media de 1 m/s. Todas las estaciones, incluso las de carga y descarga, se encuentran alineadas y equidistan 5 metros.

5.4.5. Ejemplo de cálculo de cotas del tiempo de ciclo para una secuencia H

A continuación, se muestra un ejemplo sobre cómo se aplica la Primera prueba, de infactibilidad, para el caso que se quiera evaluar la secuencia de operaciones de la grúa $H = \langle 0, 2, 3, 1, 4 \rangle$ utilizando los datos del Ejemplo 5.1, presentado en el anterior punto.

Si se plantea el grafo que describe esta secuencia, se obtiene la figura 5.6.

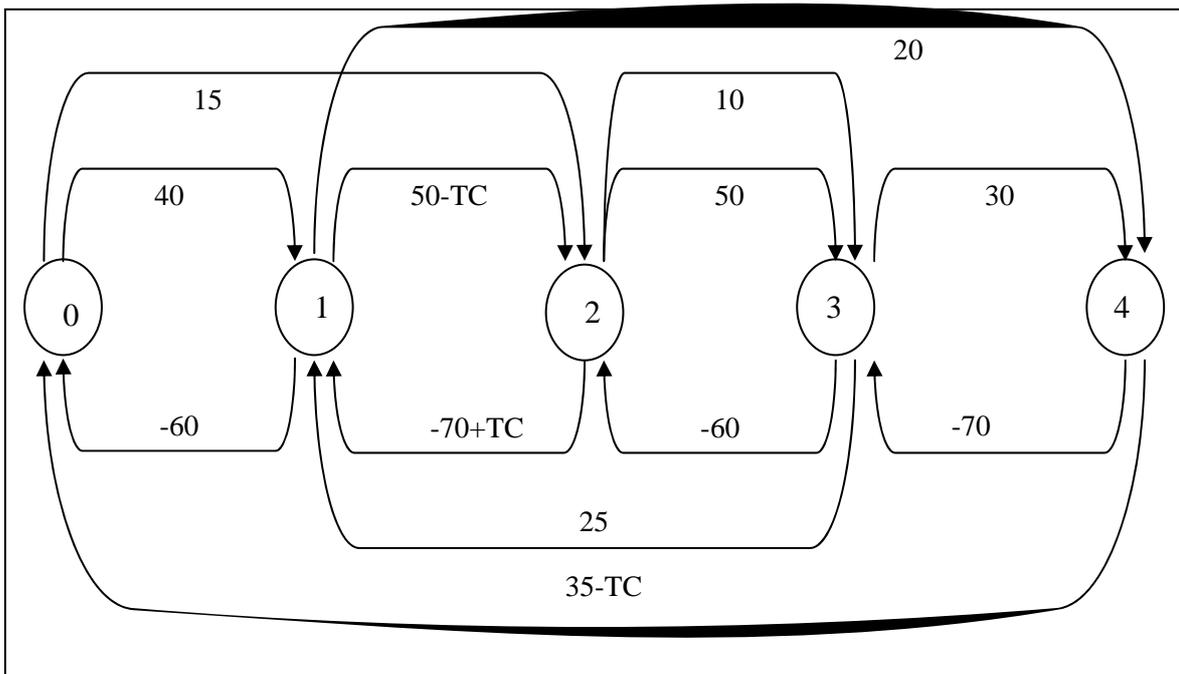


Figura 5.6. Grafo de la secuencia $H = \langle 0, 2, 3, 1, 4 \rangle$ para el ejemplo 5.1.

Una primera cota inferior del tiempo de ciclo TC para el vector \mathbf{H} , causada por el tiempo necesario a emplear en movimientos de la grúa, y como resultado de aplicar la fórmula 5.8, es:

$$L(0) = 15+10+25+20+35 = 105$$

Para hallar otras cotas inferiores, la fórmula 5.15 se puede aplicar al arco de grúa de retroceso que une el vértice 3 con el vértice 1, con lo cual se obtiene:

$$L(1) = \frac{25+(50+50)}{1} = 125$$

De manera similar, aplicando la fórmula 5.16 al arco de grúa de retroceso que une el vértice 4 con el vértice 0, otra cota inferior que se puede calcular es:

$$L(5) = \frac{35+(40+50+50+30)}{2} = 102,5$$

La cota superior inicial para cualquier secuencia de movimientos propuesta, en caso de un solo objeto en la línea, se sitúa en $U(0) = 205$.

Aplicando ahora la fórmula 5.23 al arco de grúa de avance que une el vértice 0 con el vértice 2, se obtiene como otra cota superior más ajustada:

$$U(2) = \frac{15-(70+60)}{-1} = 115$$

Haciendo también lo propio con la misma fórmula 5.23 sobre el arco de grúa de avance que une el vértice 1 con el vértice 4, la nueva cota superior no es más restrictiva:

$$U(4) = \frac{20-(70+60+70)}{-1} = 180$$

El arco de grúa de avance que une el vértice 2 con el vértice 3 no supone ninguna cota.

Así, las cotas inferior y superior sobre el tiempo de ciclo en caso que la secuencia \mathbf{H} propuesta fuera factible, calculadas respectivamente según las fórmulas 5.17 y 5.24, son:

$$LB_{\mathbf{H}} = 125 ; UB_{\mathbf{H}} = 115$$

Dado que para esta secuencia $\mathbf{H}=\langle 0,2,3,1,4 \rangle$, se cumple que $UB_{\mathbf{H}} > LB_{\mathbf{H}}$, no habrá ningún valor del tiempo de ciclo que conduzca a una solución posible; por tanto, esta secuencia es no factible al intentar cumplir las restricciones.

En este caso, ya no es necesario iniciar el proceso alguno de evaluación de los caminos extremos entre el vértice 0 y los demás vértices del grafo asociado a la secuencia \mathbf{H} .

5.5. Resolución de una secuencia **H** evaluando un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado: Segunda prueba, de factibilidad

5.5.1. Características de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

En caso que una secuencia haya superado la Primera prueba, de infactibilidad, se plantea la resolución definitiva del grafo asociado a dicha secuencia, que cuenta con los $m+1$ vértices ya descritos (correspondientes a los elementos del vector **T**) y en cuyos arcos aparece la variable del tiempo de ciclo **TC**, que se pretende minimizar.

Para determinar el valor óptimo del tiempo de ciclo **TC** según el grafo planteado, es necesario disponer de los datos referentes a los arcos en una matriz Origen/Destino **V**. Esta matriz toma un aspecto bastante peculiar, dadas las condiciones específicas del problema. Éstas conllevan las siguientes características en el grafo:

- Los vértices orígenes y destinos se corresponden con las filas y las columnas, respectivamente.
- En este tipo de grafo, es posible la presencia de arcos dobles (correspondientes a un arco de tanque y a un arco de grúa) entre dos vértices. Este aspecto debe considerarse para poder evaluar correctamente el grafo.
- Algunos valores de la matriz no son estáticos, ya que dependen del valor del tiempo de ciclo **TC**, lo cual puede comportar que se deban asignar diferentes valores a esta variable, hasta encontrar aquél que cumpla todas las restricciones simultáneamente.
- Según sea la secuencia de movimientos de la grúa, reflejada en el vector **H**, el valor de un arco entre dos vértices puede tomar un valor finito o infinito.
- Según los valores de tiempo de ciclo **TC** asignados, el camino máximo entre dos vértices puede tomar un valor finito, o sea converger al aplicar un procedimiento de resolución iterativo, o divergir, mostrando al variar progresivamente.
- La matriz, cuyos valores pueden ser positivos o negativos, no presenta ningún tipo de simetría.

La determinación del tiempo de ciclo **TC** en el grafo propuesto supone el cálculo del camino extremo (en este caso, máximo) en un grafo de $m+1$ vértices, entre los vértices **0** y cada uno de los m vértices restantes. Para dicho cálculo, cuyos valores corresponden con los del vector **T**, se dispone de diversos algoritmos de uso general (Dijkstra, Ford, Bellman-Kalaba, etc.), útiles para hallar la solución a las variables del grafo planteado.

El procedimiento de resolución para una secuencia **H**, utilizando el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado, consta de los siguientes pasos:

1. Asignación de un valor a la variable **TC**: TC_H .

Este valor, comprendido entre las dos cotas obtenidas mediante la Primera prueba, de infactibilidad, viene condicionado por las particularidades del grafo (véase el apartado 5.4).

2. Construcción de la matriz \mathbf{V} , a partir de la estructura de 4 vectores (G_{from} , G_{to} , G_{time} , G_{cycle}).

La matriz \mathbf{V} se utiliza para el cálculo del camino extremo entre una pareja de vértices 0 y cualquiera de los restantes m vértices. A la hora de construirla, debe considerarse la posible duplicidad de arcos entre dos mismos vértices, comparar los valores y asignar únicamente uno de ellos a la matriz.

3. Búsqueda del camino máximo entre el vértice 0 y cualquiera de los restantes m vértices del grafo (variante de los procedimientos de Ford).
 - Por la configuración del problema, para hallar el camino entre vértices, es importante observar que el vértice origen conocido (estación 0) y el último de los vértices (estación m) están como mínimo relacionados pasando obligatoriamente por el resto.
 - En cada iteración se vuelven a etiquetar los vértices del grafo, lo que implica que ninguna etiqueta se puede considerar permanente hasta finalizar el procedimiento.
 - En cada iteración, se recalculan los valores de las etiquetas para cada vértice, a partir de sus arcos incidentes y las etiquetas asociadas a los vértices de origen de éstos.
 - El procedimiento finaliza cuando en una iteración en curso no cambia el valor de ninguna etiqueta o bien cuando se ha realizado un número de iteraciones suficiente para demostrar el efecto de una restricción sobre el vector \mathbf{T} de tiempos (en este caso, $m+1$ iteraciones).
4. Análisis de resultados en la búsqueda de caminos máximos (paso anterior, paso 3).
 - Si en dos iteraciones consecutivas los resultados son iguales, se trata de un valor TC_H válido. Si la cota superior UB_H considera además el tiempo de ciclo óptimo hasta ese momento, guardar el valor TC_H , y el vector \mathbf{T} asociado a H , como nuevo óptimo.
 - Si en dos iteraciones consecutivas los resultados son diferentes (varían en ΔT), se actualiza el valor TC_H sumando dicho valor ΔT .
 - Si el nuevo valor TC_H supera la cota superior UB_H ;
 - a) si esta cota no considera al mejor tiempo de ciclo hasta ese momento, la secuencia es descartada por infactible;
 - b) si la cota lo considera, la secuencia es descartada como secuencia óptima a pesar que pueda ser factible.

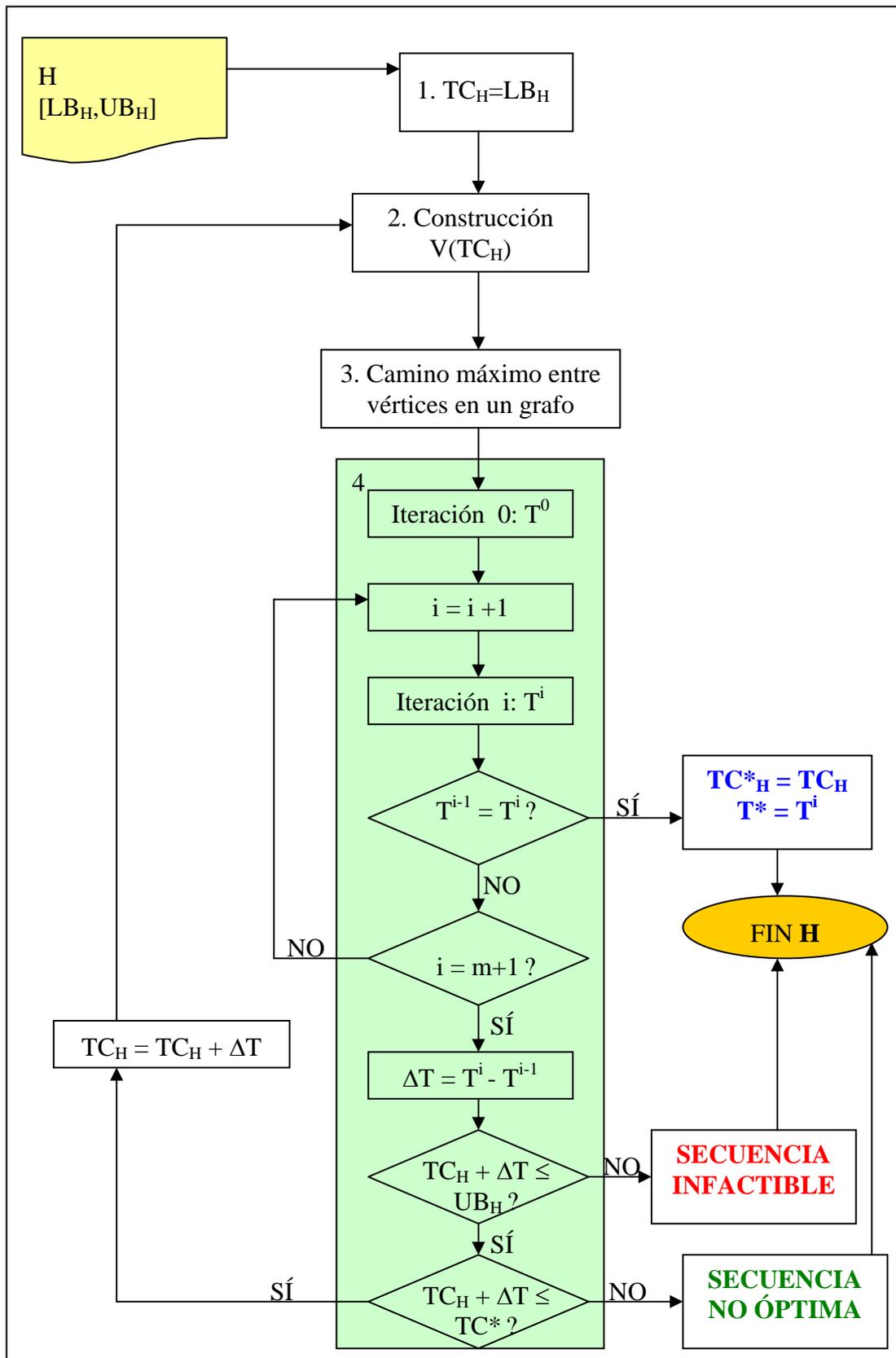


Figura 5.7. Algoritmo de aplicación de la Segunda Prueba, de factibilidad, sobre una secuencia H , evaluada mediante un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

5.5.2. Estudio de la relación entre el rango de exploración y el tiempo de ciclo de una secuencia

Dada una instancia de problema, una cota superior de cualquier secuencia se obtiene como la suma de los tiempos de desplazamiento de la grúa con carga entre baños más los tiempos de tratamiento mínimos permitidos en los baños, lo que equivale a que un solo objeto se encuentre en la línea.

Dada una secuencia H de movimientos de la grúa, si se asigna a TC_H valores comprendidos entre 0 y una dicha cota superior insuperable, la evaluación de los caminos máximos entre el vértice 0 y los demás vértices en el grafo puede comportar para una secuencia propuesta tres casos posibles:

Caso 1 (figura 5.8). Cuando no existe ningún valor de TC_H positivo que comporte un valor finito para los m caminos máximos en el grafo. La secuencia es infactible.

Caso 2 (figura 5.9). Cuando se observan claramente, según el valor de la variable TC_H , tres tramos con diferente comportamiento: el primero, desde que la variable TC_H vale desde 0 hasta $Kmin_H-1$, cuando los valores de los caminos máximos en el grafo tienden a infinito; el segundo, desde que la variable TC_H vale $Kmin_H$ hasta que vale $Kmax_H$, los valores de los caminos son finitos y crecen proporcionalmente a la variable TC_H ; y el último, cuyos valores de caminos máximos en el grafo vuelven a valer infinito si el valor de TC_H es igual o superior a $Kmax_H+1$.

Existen dos posibles variantes, en las cuales siempre la cota inferior de TC_H , LB_H , es igual al límite inferior del rango de factibilidad: que la cota superior de TC_H hallada en la Primera prueba, de infactibilidad, UB_H , coincida con el límite superior de factibilidad $Kmax_H$ (caso 2) o que sea superior (caso 2').

Caso 3 (figura 5.10). Cuando se observan nuevamente, según el valor de la variable TC_H , los mismos tres tramos del caso 2: el primero, desde que la variable TC_H vale desde 0 hasta $Kmin_H-1$, con valores de los caminos máximos en el grafo que tienden a infinito; el segundo, desde que la variable TC_H vale $Kmin_H$ hasta valer $Kmax_H$, los valores de los caminos son finitos y crecen proporcionalmente a la variable TC ; y el último, cuyos valores de caminos máximos en el grafo vuelven a valer infinito si el valor de TC_H es superior a $Kmax_H$.

En este caso, para las dos posibles variantes la cota inferior de TC_H , LB_H , siempre es menor que el límite inferior del rango de factibilidad. En la primera variante, la cota superior de TC_H hallada en la Primera prueba, de infactibilidad, UB_H , coincide con el límite superior de factibilidad $Kmax_H$ (caso 3), mientras que en la segunda, UB_H es superior a $Kmax_H$ (caso 3').

	Rango exploración	Rango factibilidad	TC^*_H
Caso 1	$[LB_H, UB_H]$	\emptyset	∞
Caso 2	$[LB_H, UB_H]$ $LB_H = K_{min_H}$ $UB_H = K_{max_H}$	$[LB_H = K_{min_H}, UB_H = K_{max_H}]$	$LB_H = K_{min_H}$
Caso 2'	$[LB_H, UB_H]$ $LB_H = K_{min_H}$ $UB_H > K_{max_H}$	$[LB_H = K_{min_H}, K_{max_H}]$	$LB_H = K_{min_H}$
Caso 3	$[LB_H, UB_H]$ $LB_H < K_{min_H}$ $UB_H = K_{max_H}$	$[K_{min_H}, UB_H = K_{max_H}]$	K_{min_H}
Caso 3'	$[LB_H, UB_H]$ $LB_H < K_{min_H}$ $UB_H > K_{max_H}$	$[K_{min_H}, K_{max_H}]$	K_{min_H}

Tabla 5.3. Relación entre el rango de exploración determinado por la Primera prueba, de infactibilidad, el rango de valores para los cuales una secuencia es factible y el tiempo de ciclo TC^*_H para dicha secuencia.

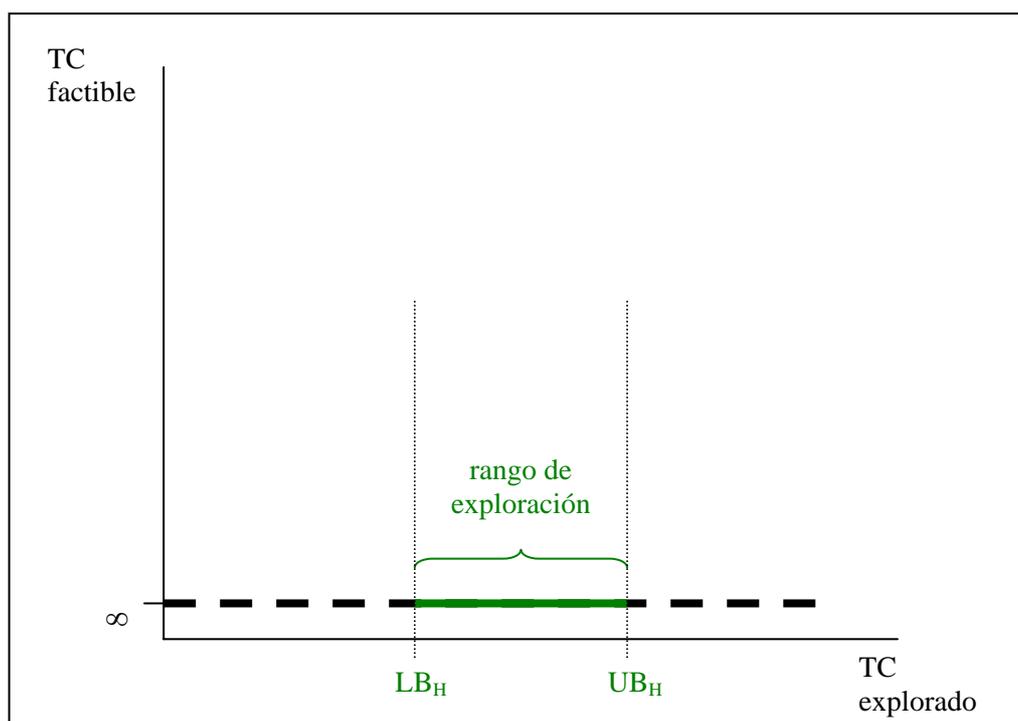


Figura 5.8. Exploración en el caso 1 según las cotas de la Primera prueba, de infactibilidad.

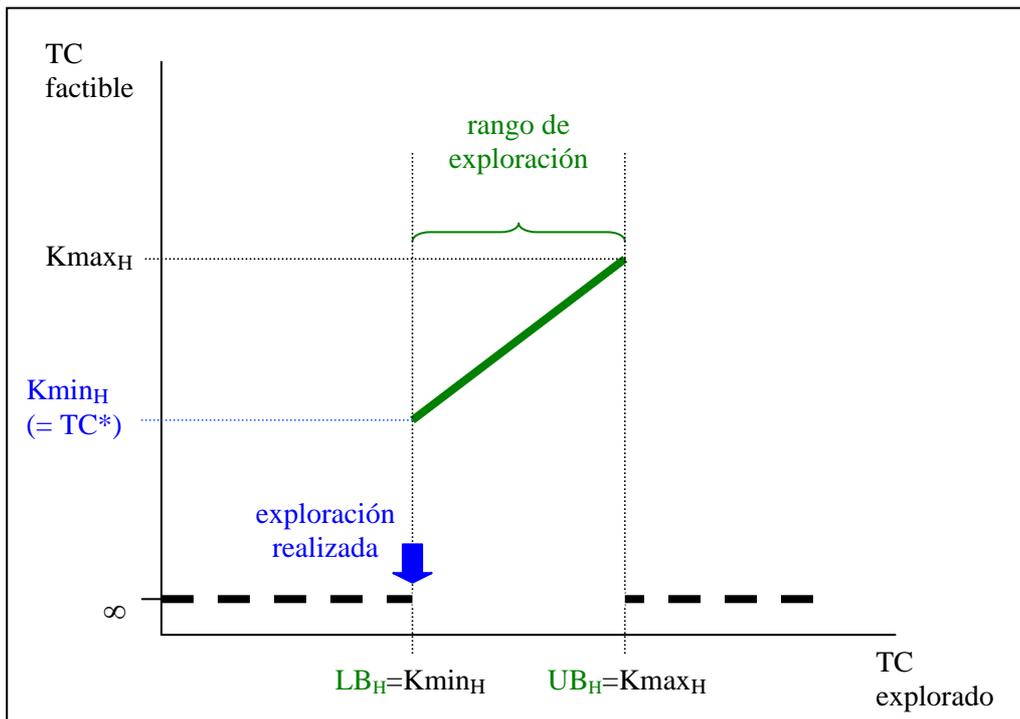


Figura 5.9. Exploración en el caso 2 según las cotas de la Primera prueba, de infactibilidad.

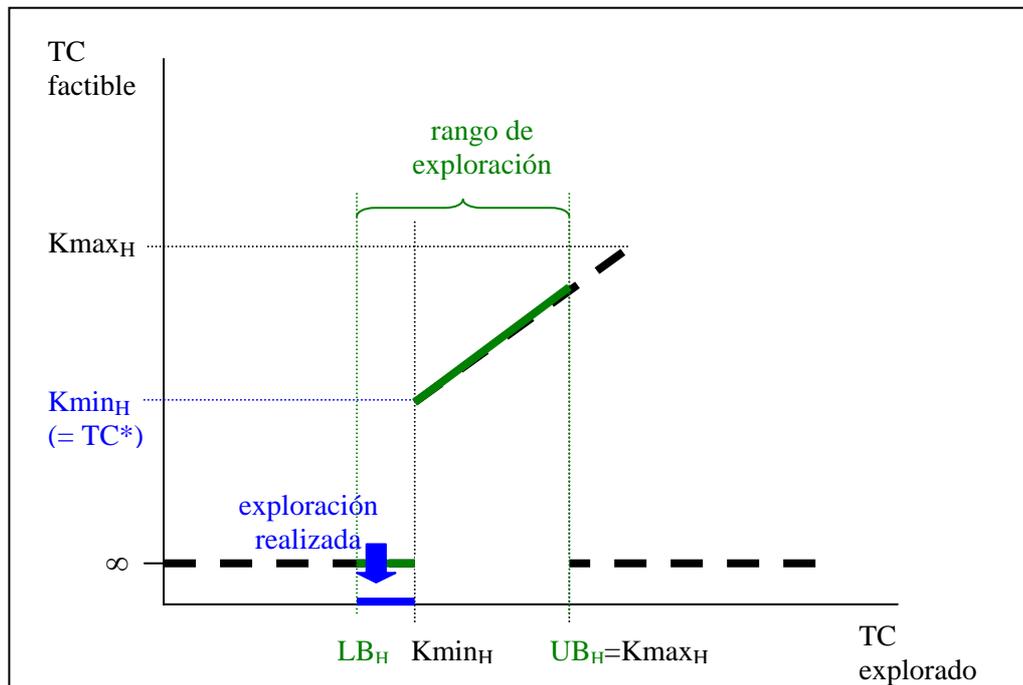


Figura 5.10. Exploración en el caso 3 según las cotas de la Primera prueba, de infactibilidad.

En los casos 2 y 3, la solución buscada es el valor K_{min_H} (valor finito mínimo de TC_H para que la secuencia pueda ser factible). No obstante, en el caso 3, se dispone de una cota inferior, menor que dicho valor K_{min_H} , lo que comporta tener que pasar de este valor del tiempo de ciclo que supone que la secuencia sea infactible hasta el valor K_{min_H} .

Si se dispone de una cota inferior y de una cota superior, LB_H y UB_H respectivamente, únicamente será necesario recorrer los posibles valores de TC_H comprendidos entre ambos puntos, para determinar si la secuencia es factible o no, pudiendo evitar la evaluación de cualquier valor situado más allá de los extremos del tramo generado por las cotas, a su izquierda y derecha de. En la práctica, se debe explorar en principio desde el valor LB_H hasta el valor UB_H y parar en el momento en que exista un camino finito entre el vértice 0 y los demás vértices, si bien algunas características del grafo planteadas a continuación pueden acelerar la resolución mediante el grafo.

5.6. Propiedades topológicas de un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado aplicables en la determinación del tiempo de ciclo óptimo

5.6.1. Problema de minimización del tiempo de ciclo

Sea el problema de optimización, visto en el apartado 4.3, definido como:

$$[\text{MIN}] TC \quad (5.25)$$

s.a.

$$t_{G_{to(j)}} - t_{G_{from(j)}} \geq G_{time(j)} + G_{cycle(j)} \cdot TC \quad j=1, \dots, 3m+1 \quad (5.26)$$

$$t_i \geq 0 \quad i=0, \dots, m \quad (5.27)$$

$$TC \geq 0 \quad (5.28)$$

$$G_{from}, G_{to} \in \{0, 1, \dots, m\};$$

$$G_{time} \in Z \text{ (positivo o negativo);}$$

$$G_{cycle} \in \{-1, 0, 1\}$$

En el anterior grupo de $3m+1$ restricciones pueden distinguirse dos conjuntos diferenciados por el correspondiente valor de G_{cycle} : en caso que $G_{cycle} = 0$, entonces el término independiente b_j no depende de TC ; en caso contrario, b_j depende linealmente de TC . En general, podemos escribir que:

$$b_j(TC) = b_{G_{from(j), G_{to(j)}}}(TC) = G_{time(j)} + G_{cycle(j)} \cdot TC \quad (5.29)$$

5.6.2. Grafo G asociado al problema anterior

Las $3m+1$ restricciones del problema sugieren la búsqueda del camino máximo en un grafo G con las siguientes características:

- A cada variable del problema t_i ($i=0, \dots, m$), excepto la variable de tiempo de ciclo TC , se le asocia un vértice $v(i)$.
- Entre los vértices $v(t_{G_{from}})$ y $v(t_{G_{to}})$, se asocia un arco $e[v(t_{G_{from}}), v(t_{G_{to}})]$ con valor $b_j(TC)$. En la búsqueda de caminos máximos, este arco conduce nuevamente a la restricción:

$$t_{G_{to}} \geq t_{G_{from}} + b_j(TC) \quad (5.30)$$

5.6.3. Propiedades del grafo G

Como propiedades del grafo **G**, puede establecerse que:

- P1.** El grafo **G** tiene $m+1$ vértices: $v(0), v(1), \dots, v(m)$.
- P2.** Los vértices $v(0)$ y $v(m)$ del grafo **G** tienen dos arcos incidentes: un arco de tanque y un arco de grúa, según el apartado 5.3.5.
- P3.** Los demás vértices, $[v(1), \dots, v(m-1)]$, del grafo **G** tienen tres arcos incidentes: dos arcos de tanque y un arco de grúa, según el apartado 5.3.5.
- P4.** El grafo **G** tiene $3m+1$ arcos, que reflejan las $3m+1$ restricciones del problema.
- P5.** En función del valor asignado a la variable TC, el grafo **G** puede tener caminos extremos, o sea máximos, acotados o no tenerlos.

Definición 1

Un grafo **G** es coherente con $TC=C$, y lo representaremos como **Coh**[$TC=C$], si para toda pareja de vértices $[v(i), v(j)]$ existe un camino máximo.

En estas condiciones, existen algoritmos, como el algoritmo de Ford, que permiten calcular el camino extremo entre parejas de vértices en el grafo **G**, o bien detectar que el grafo no es coherente.

La coherencia en el problema planteado es equivalente para una estructura de grafo orientado, como es el grafo **G**, a que **todos** los circuitos de dicho grafo tengan valor no positivo.

Proposición 1

En el grafo **G** existen $3^{m-1} \cdot 2^2$ subgrafos **G₁**, formados por un conjunto de arcos que incidan en cada uno de los $m+1$ vértices del grafo.

Demostración

Trivial a partir de las propiedades P2 y P3.

Para determinar el intervalo de los valores de la variable TC que conduzcan a un grafo coherente **Coh**[**TC**], pueden calcularse unas cotas inferior y superior de dicha variable, a partir del citado grafo, que limiten la búsqueda del valor de TC mínimo que comporta un grafo coherente. Dichas cotas consideran restricciones de grúa y restricciones de tanque a la vez, dado que el problema planteado intenta coordinar los movimientos de la grúa sobre las ventanas temporales de los baños.

Proposición 2

Una cota inferior de TC se puede calcular mediante una selección de arcos del grafo **G**, que forman un circuito, de los cuales como mínimo uno de ellos tiene la longitud función de TC.

Demostración

Sea el último arco de grúa de un ciclo $e[v(i),v(0)]$ con valor $b_{i,0}(TC)$.

Existe siempre uno o más arcos de tanque $e[v(0),v(1)], \dots, e[v(i-1),v(i)]$ hasta cerrar un circuito en el grafo G orientado. Sumando todos sus valores al del arco inicial, y obligando a que dicho circuito tenga valor no positivo, se obtiene una expresión del tipo de 5.12, que conduce a una cota inferior.

Proposición 3

Una cota superior de TC se puede calcular mediante una selección de arcos del grafo G , que forman un circuito, de los cuales como mínimo uno de ellos tiene la longitud función de TC.

Demostración

Sea un arco de grúa $e[v(i),v(j)]$ con $j>i+1$ y valor $b_{i,j}$. Si existe una serie de arcos de tanque $e[v(j),v(j-1)], \dots, e[v(i+1),v(i)]$ hasta cerrar un circuito en el grafo G orientado, tal que uno de ellos dependa de la variable TC. Sumando los valores de todos esos arcos y forzando al circuito a tener valor no positivo, se obtiene una expresión del tipo de 5.21.

5.6.4. Del grafo G a un esquema matricial

Definición 2

Sea un vector X formado por componentes asociados a los vértices del grafo G . Sea una transformación Φ_T de un vector X en otro vector Y (de idénticas características a X) tales que $X, Y \in \mathcal{R}^{m+1}$, consistente en aplicar:

$$y_i = \text{MAX}_{k(i)} \{ b_{j,i}^{k(i)} + x_j^{k(i)} \} \quad i=0, \dots, m \quad (5.31)$$

con $b_{j,i}^{k(i)}$ número entero (positivo o negativo, que puede depender de TC), $b_{j,i}^{k(i)}(TC)$;
 $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$;
 $k(i) \in \{1, 2\}$ si $i=0, m$; $k(i) \in \{1, 2, 3\}$ si $i=1, 2, \dots, m-1$.

Para cada componente i del vector Y , el parámetro $k(i)$ puede tomar como mínimo 2 valores y como máximo 3 valores (en concreto, para sus componentes primero y último, 2 valores, y en el resto, 3 valores).

Proposición 4

A todo grafo G puede asociarse una transformación Φ_T .

En nuestro caso, el grafo G recibe el nombre de Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, dado que pueden hallarse cotas sobre el valor de TC, proposiciones 2 y 3 anteriores, que facilitan la convergencia del procedimiento de determinación de caminos máximos en él.

Proposición 5

La transformación Φ_l divide el espacio \mathfrak{R}^{m+1} en zonas según las restricciones activas en cada vértice i . El número máximo de zonas es $3^{m-1} \cdot 2^2$, en este caso. A cada zona l corresponde una transformación reducida $\Phi_{l,i}$, a la cual puede asociarse también un subgrafo \mathbf{G}_l . A cada vértice de dicho subgrafo incide un arco y sólo uno.

Demostración

Según la proposición 4, existe un grafo \mathbf{G} asociado a la transformación Φ_l . Para cada vértice i del grafo, existirá un valor $k(i)$ tal que $y_i = b_{j,i}^{k(i)} + x_j^{k(i)}$. Dicha expresión refleja la restricción activa en el vértice i .

Además, según las propiedades P2 y P3 del grafo \mathbf{G} , existirá siempre una restricción activa para cada vértice, por lo menos. En la frontera entre dos zonas, existen dos restricciones activas en un cierto vértice i .

La transformación reducida $\Phi_{l,i}$ incluye una selección de $m+1$ valores $k(0), k(1), \dots, k(m)$. De manera equivalente, en el subgrafo \mathbf{G}_l , existen $m+1$ arcos que inciden en los vértices $0, 1, \dots, m$, respectivamente.

Proposición 6

En un subgrafo \mathbf{G}_l existe como mínimo un circuito, aunque alguno de los arcos del subgrafo puede no formar parte de un circuito.

Demostración

Sea un vértice j cualquiera del subgrafo \mathbf{G}_l . Según la proposición 5, sólo incide un arco $e[\mathbf{v}(i), \mathbf{v}(j)]$ en dicho vértice. El vértice origen de dicho arco se corresponde con el vértice i . Tómese ahora el vértice i como vértice destino.

Dado que el número de vértices de dicho subgrafo \mathbf{G}_l es finito, después de realizar la anterior operación durante k iteraciones, el vértice origen en la iteración $k+1$ -ésima coincidirá con alguno de los k vértices origen ya visitados.

Sea el conjunto de vértices origen, en orden inverso al visitado, que finalice en la iteración en que se visitó por primera vez al vértice repetido. Entonces, se dispone de un circuito recorrido en sentido contrario a la orientación de sus arcos.

Si el vértice repetido es el primero, el circuito pasa por todos los vértices. Si no lo es, entonces queda una parte de arcos del grafo fuera del circuito. Si quedaran vértices por visitar, esto implica que o bien se forma otro circuito o bien se visitará nuevamente algún vértice del circuito ya formado.

Definición 3

Si $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{m+1}$ se encuentra en el interior de una zona l , esta transformación reducida $\Phi_{l,i}$ es equivalente a una transformación lineal del tipo:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad (5.32)$$

donde cada una de las filas corresponde a la restricción activa incidente para cada vértice.

La matriz \mathbf{A} tiene las siguientes características:

- es una matriz cuadrada de dimensión $m+1$;
- los valores $a_{i,j}=1$ indican que el arco entre los vértices j e i actúa como una restricción activa; por consiguiente, los demás valores de una fila i tienen valor $a_{i,j}=0$;
- es una matriz estocástica, pues en cada fila todos los valores son nulos, excepto uno y sólo uno que vale 1:

$$\sum_{j=0}^m a_{i,j} = 1 \quad i=0, \dots, m \quad (5.33)$$

El vector \mathbf{B} está formado por los valores $b_{j,i}^{k(i)}$ de las restricciones activas, algunos de cuyos componentes dependen linealmente del valor de la variable TC.

5.6.5. Puntos dobles en la aplicación $\Phi_{l,l}$

Definición 4

La transformación $\Phi_{l,l}$ tiene un punto doble \mathbf{X}^0 , por lo menos, si se cumple que:

$$\mathbf{X}^0 = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}^0) \quad (5.34)$$

En nuestro caso, los puntos dobles forman parte de la solución buscada, ya que indican que tras recorrer los $m+1$ vértices del subgrafo \mathbf{G}_l los valores se repetirán cíclicamente tras un período de tiempo TC. No obstante, la existencia de puntos dobles depende de los valores $b_{j,i}^{k(i)}$, o de manera equivalente en el grafo \mathbf{G} , la inexistencia de circuitos de valor positivo, $\sum b_{j,i}^{k(i)} \leq 0$, en subgrafos \mathbf{G}_l . Por lo tanto, la existencia de puntos dobles depende del valor asignado a la variable TC.

Si existe el punto doble \mathbf{X}^0 , en forma matricial:

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^0 \quad (5.35)$$

lo cual es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales tal que:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (5.36)$$

donde

$\mathbf{I}-\mathbf{A}$ es una matriz cuyos valores no nulos dependen de las restricciones activas del grafo \mathbf{G}_l , de las cuales todas o algunas determinan un circuito en dicho grafo;
 el vector \mathbf{B} depende del valor de la variable TC, como ya se ha descrito anteriormente;
 y el vector \mathbf{X} equivale al vector \mathbf{T} de tiempos en el problema original.

Para que se cumpla la expresión 5.36, el subgrafo tiene que ser coherente $\mathbf{Coh}[\mathbf{TC}=\mathbf{C}]$.

Lema 1

Si existe un punto doble \mathbf{X}^0 de la transformación $\Phi_{l,l}$, existen también infinitos puntos dobles, cuyos componentes están todos desplazados una misma distancia k respecto al punto doble \mathbf{X}^0 .

Es decir, si \mathbf{X}^0 es punto doble, también lo es cualquier vector tal que:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Demostración

Sea el vector unidad $\mathbf{1}$. Dado que la matriz \mathbf{A} es estocástica:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (5.38)$$

Aplicando el vector \mathbf{X}^1 , que ha sido definido en 5.37, en la expresión 5.32 y restándola de la expresión 5.34, se obtiene:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot k \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}' \cdot k \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

La expresión (5.39) se verifica dado que:

$$\sum_{j=0}^m a'_{i,j} = 0 \quad i=0, \dots, m \quad (5.40)$$

En el fondo, es una consecuencia del teorema de Rouché-Frobenius, que indica que la solución general de un sistema de ecuaciones completo es igual a una solución particular (fijando $x^0_0=0$) más la solución general de un sistema homogéneo (en este caso, el vector unidad $\mathbf{1}$).

La convención utilizada en el problema de tomar como referente el instante de recogida del objeto de la estación de carga (baño 0), comporta que en caso de existir punto doble, se determine el punto doble \mathbf{X}^0 tal que $x^0_0=0$ (en el problema original, $t_0=0$).

Según el Lema 1, en caso que exista el punto doble \mathbf{X}^0 existen infinitas soluciones. El sistema de ecuaciones lineales de 5.32 es compatible indeterminado, lo que según el teorema de Roché-Frobenius implica que:

$$\text{rango}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{I} - \mathbf{A} | \mathbf{B}) \quad (5.41)$$

$$\text{rango}(\mathbf{I} - \mathbf{A} | \mathbf{B}) \leq m \quad (5.42)$$

Este resultado es coherente con la topología del grafo \mathbf{G}_1 , que refleja la transformación $\Phi_{l,l}$, donde existe como mínimo un circuito. La presencia de este circuito evita que el rango de la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sea $m+1$, y supone que la matriz \mathbf{A} tenga un determinante nulo.

Lema 2

Los valores propios de la matriz \mathbf{A} son o bien raíces enteras de 1 o bien 0.

Demostración

Cada circuito se corresponde a un valor propio 1 (el grado de multiplicidad del valor propio 1 es igual al número de circuitos en el grafo).

Cada vértice que no pertenece a un circuito se corresponde a un valor propio 0 (el grado de multiplicidad del valor propio 0 es igual al número de vértices “descolgados” en ramas, es decir, que no pertenecen a ningún circuito).

La ecuación característica de la matriz \mathbf{A} es:

$$(1-\lambda^a) (1-\lambda^b) \dots (1-\lambda^g) \lambda^h = 0 \tag{5.43}$$

donde a es el número de arcos del primer circuito considerado, b lo es del segundo circuito, g lo es del último y h es el número de vértices descolgados en ramas.

Ejemplo 1

Sea el grafo de la figura 5.11, con 5 vértices, de los cuales tres forman un circuito.

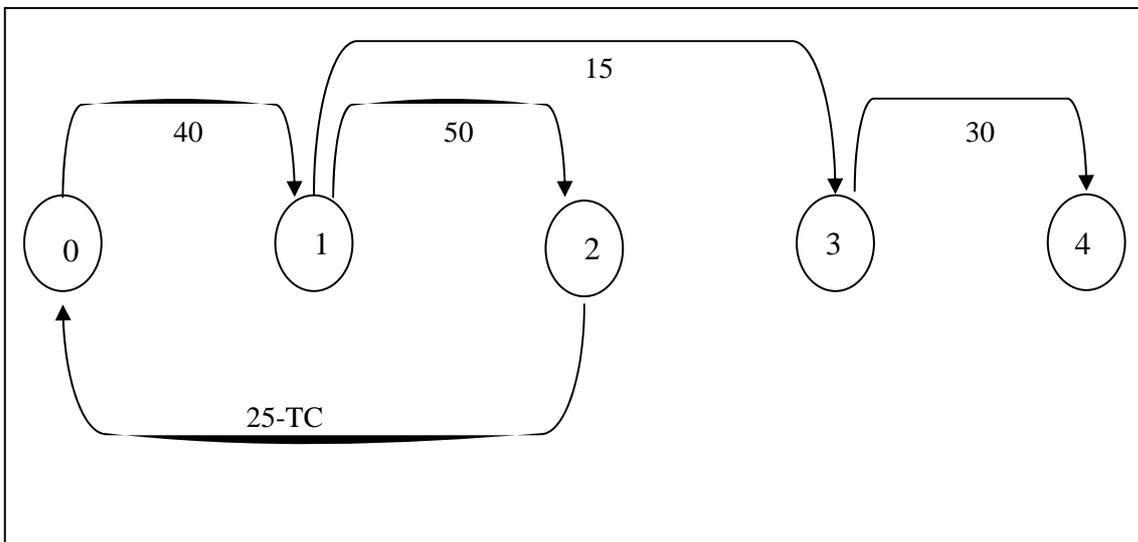


Figura 5.11. Ejemplo del grafo \mathbf{G}_1 asociado a una transformación $\Phi_{l,l}$.

Entonces, según la ecuación 5.35, la matriz \mathbf{A} es: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

siendo su ecuación característica: $(1-\lambda^3) \lambda^2 = 0$

Cada rama de vértices descolgados introduce una columna de valores nulos. Esto facilita que en el desarrollo se vayan generando columnas de ceros en los otros vértices de la rama, uno a uno.

Teorema 1

Si existe un punto doble \mathbf{X}^o de $\Phi_{l,l}$, todos los circuitos en el grafo \mathbf{G}_1 tienen valor nulo.

Demostración

Sea el un circuito en el grafo G_1 , formado por a vértices.
 Aplicando la transformación $\Phi_{l,l}$, sobre el primer vértice:

$$x_1 = b_1 + x_a \tag{5.44}$$

Repitiéndolo para cada vértice del circuito:

$$x_i = b_i + x_{i-1} \quad i=2,\dots,a \tag{5.45}$$

Sumando la ecuación 5.44 a las $a-1$ ecuaciones de la forma 5.45, se obtiene:

$$0 = \sum_{i=1}^a b_i \tag{5.46}$$

Corolario

Si todos los circuitos del grafo G_1 tienen valor nulo, existen puntos dobles de $\Phi_{l,l}$.

Basta explicar cómo se calcula uno de los puntos dobles. Para cada componente conexa, se hace lo que sigue. En el grafo G_1 cada circuito determina una componente conexa, formada por los vértices del circuito más aquéllos en ramas conexas, anteriormente llamados descolgados.

A un vértice cualquiera i se le asigna el valor $x_i^o=0$. A los siguientes vértices j del anterior i , se les asigna el valor:

$$x_j^o = b_{i,j} + x_i^o \tag{5.47}$$

Así, se repite sucesivamente hasta evaluar todos los vértices de la componente conexa. Entonces, el vector X^o es punto doble de $\Phi_{l,l}$.

Por tanto, los valores de la variable TC que conducen a grafos coherentes son aquellos que anulan alguno o algunos de los circuitos. Aquellos valores determinados en la búsqueda de cotas son candidatos privilegiados.

5.6.6. Determinación de puntos dobles en la aplicación $\Phi_{l,l}$

Sean X^0, X^1 tales que $X^1 \neq X^0$, y además cumplen la expresión 5.32, $X = B + A \cdot X$. Entonces:

$$(X^0 - X^1) = A \cdot (X^0 - X^1) \tag{5.48}$$

$X^0 - X^1$ está asociado a los valores propios 1 de la matriz A .

Si el valor propio 1 es simple, existe un solo circuito: $(X^0 - X^1) = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si el valor propio 1 es doble, existen dos circuitos; por ejemplo, $(\mathbf{X}^0 - \mathbf{X}^1) = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $\Phi_{l,l}$ tiene punto doble \mathbf{X}^0 , según la definición 4, $\mathbf{X}^0 = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}^0)$. Entonces, conviene estudiar lo que sucede si $\mathbf{X}^1 \neq \mathbf{X}^0 + k \cdot \mathbf{1} \quad \forall k$, suponiendo el caso de un solo circuito, $\mathbf{Y}^1 = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}^1)$ con $\mathbf{Y}^1 \neq \mathbf{X}^1$.

Proposición 7

Si \mathbf{X}^1 no es punto doble de $\Phi_{l,l}$, entonces:

$$\Phi_{l,l}^{p+q}(\mathbf{X}^1) = \Phi_{l,l}^p(\mathbf{X}^1) \quad \text{para } p \text{ suficientemente grande} \quad (5.49)$$

donde q es múltiplo del número de vértices del circuito, y en caso de varios circuitos, múltiplo del mínimo común múltiplo de los respectivos números de vértices.

Proposición 8

En las condiciones anteriores, con \mathbf{X}^1 definido como en la Proposición 7:

$$\mathbf{X}^2 = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \phi_{l,l}^{p+j}(\mathbf{X}^1) \quad (5.50)$$

es tal que $\mathbf{X}^2 = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}^2)$.

Demostración

Dada una matriz \mathbf{A} de la forma expresada en 5.32. El vector \mathbf{X}_N , después de aplicar la transformación N iteraciones, se obtiene como:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} + \dots + \mathbf{A}^{N-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^N \mathbf{X}_0 \quad (5.51)$$

$$\mathbf{X}_N = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \dots + \mathbf{A}^{N-1}) \mathbf{B} + \mathbf{A}^N \mathbf{X}_0 \quad (5.52)$$

También puede expresarse como:

$$\mathbf{X}_N = \left[N \mathbf{A}^* + \sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1 - \lambda_i^N}{1 - \lambda_i} \mathbf{H}_i + \sum_{k=0}^p \mathbf{K}_k \right] \mathbf{B} + \left[\mathbf{A}^* + \sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \lambda_i^N \mathbf{H}_i \right] \mathbf{X}_0 \quad \text{para } N \geq p \quad (5.53)$$

dado que, según es conocido, la matriz \mathbf{A}^N puede expresarse como:

$$\mathbf{A}^N = \mathbf{A}^* + \sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \lambda_i^N \mathbf{H}_i + \mathbf{K}_N \quad N=0,1,2, \dots \quad (5.54)$$

donde λ_i son los valores propios de \mathbf{A} diferentes de 1 y de 0; \mathbf{K}_N corresponde a los valores propios 0; $\mathbf{K}_N=0$ para $N \geq$ grado de multiplicidad del valor propio 0.

Por un lado, según el Teorema 1, por la presencia del punto doble, se cumple:

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Por otro lado, la aplicación de la matriz \mathbf{A} sobre una matriz \mathbf{K}_i supone:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i+1} \quad (5.56)$$

Definiendo \mathbf{K} como suma de las matrices \mathbf{K}_i , esto nos conduce a la expresión:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 \quad (5.57)$$

Dadas las características de los valores propios, el vector \mathbf{X}^2 puede definirse, a partir de 5.53, como:

$$\mathbf{X}^2 = \left(\sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1}{1-\lambda_i} \mathbf{H}_i + \mathbf{K} \right) \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{X}^1 \quad (5.58)$$

Entonces:

$$\mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \left(\sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1}{1-\lambda_i} \mathbf{H}_i + \mathbf{K} \right) \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{X}^1 \quad (5.59)$$

que, utilizando la expresión 5.54 para desarrollar el producto de matrices $\mathbf{I} \cdot \mathbf{B}$, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^2 &= \left(\sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1}{1-\lambda_i} \mathbf{H}_i + \mathbf{K}_0 \right) \mathbf{B} + \left[\sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1-\lambda_i^N}{1-\lambda_i} \mathbf{H}_i + \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 \right] \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{X}^1 = \\ &= \left(\sum_{\substack{|\lambda_i|=1 \\ \lambda_i \neq 1}} \frac{1}{1-\lambda_i} \mathbf{H}_i + \mathbf{K} \right) \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^2 \end{aligned}$$

Queda demostrado. Por lo tanto, p es suficientemente grande cuando iguala al grado de multiplicidad de los valores propios 0.

Ejemplo 2

Sea el grafo \mathbf{G}_1 siguiente, en la figura 5.12:

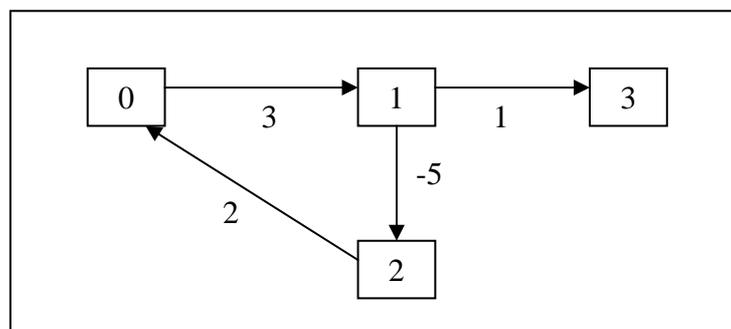


Figura 5.12. Ejemplo 2 de grafo \mathbf{G}_1 asociado a una transformación $\Phi_{t,t}$.

Entonces la aplicación de la transformación $\Phi_{l,l}$ sobre un vector inicial cualquiera \mathbf{X}^1 es:

i	\mathbf{X}^1	$\Phi_{l,l}^1$	$\Phi_{l,l}^2$	$\Phi_{l,l}^3$	$\Phi_{l,l}^4$
0	0	6	-1	0	6
1	2	3	9	2	3
2	4	-3	-2	4	-3
3	6	3	4	10	3

Tabla 5.4. Aplicación de la transformación $\Phi_{l,l}$ hasta obtener el mismo resultado en dos iteraciones.

$\Phi_{l,l}^4 = \Phi_{l,l}^1$. En este caso, pues, el vector \mathbf{X}^2 buscado es: $\mathbf{X}^2 = [5/3, 14/3, -1/3, 17/3]^T$

Observación 1. Si C es el conjunto de vértices de un circuito de valor 0, entonces:

$$\sum_{i \in C} x_i = \sum_{i \in C} y_i \quad \text{con } Y = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}) \quad (5.60)$$

Observación 2. Si C es el conjunto de vértices de un circuito de valor s , entonces:

$$\sum_{i \in C} x_i + s = \sum_{i \in C} y_i \quad \text{con } Y = \Phi_{l,l}(\mathbf{X}) \quad (5.61)$$

Observación 3. Para estabilizar los cálculos durante la recurrencia, bastaría normalizar el vector \mathbf{Y} de la forma:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \frac{s}{p} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

donde p es el número de vértices de un circuito.

Observación 4. Si en el circuito la longitud de un arco es de la forma $b-TC$, para reducir el valor del circuito a 0, teniendo el resto de arcos longitudes independientes de TC o compensadas por parejas, basta aumentar el valor de TC en s unidades.

Nota. En general, un grafo G_1 tiene un arco cuya longitud es de la forma $b-TC$. Si existe alguno con longitud $b+TC$, otro tiene asociada la forma $b-TC$. Así, el número de arcos cuya longitud es función de TC es impar $2k+1$, $k \geq 0$ ($k+1$ de la forma $b-TC$; k de la forma $b+TC$).

Sea \mathbf{X}_0 y $\mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_N$, $N=0,1,2, \dots$, con una o varias componentes convexas. Como se demuestra mediante los principios de la programación dinámica (Companys, 2000):

$$\mathbf{X}_N \rightarrow N \mathbf{g} + \mathbf{O}_N + \mathbf{W} \quad (5.63)$$

donde O_N es un término oscilante $O_{N+q}=O_N$, cuya media puede hacerse 0 para “llevar el centro” a W :

$$\sum_{i=1}^q O_N = 0 \tag{5.64}$$

y $\mathbf{g} = \mathbf{A}^* \mathbf{B}$. Si hay una sola componente conexa, $\mathbf{g} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{1}$.

Es útil tomar como vector de inicialización de componentes nulos $\mathbf{X}_0=0$.

Observación 5. En nuestro caso, siguiendo el esquema de la programación dinámica (Companys, 2000), interesa $\mathbf{g}=0$ y nuestro punto doble es \mathbf{W} :

$$\mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{g} + \mathbf{W} \tag{5.65}$$

5.6.7. Oscilación de período p entorno puntos dobles de la aplicación $\Phi_{l,l}$

Nuestra principal dificultad reside en la oscilación de período p . O sea, nos planteamos cómo puede amortiguarse. Para empezar, es conveniente realizar un par de consideraciones:

1. Un algoritmo con sustitución inmediata de los componentes del nuevo vector por el anterior es más rápido cuando hay convergencia.
2. Un alisado exponencial (con movimiento según la cuerda) reduce el radio de giro entorno al punto doble.

Algoritmo A1 (aplicable cuando el valor de todos los circuitos es 0)

Se elige un orden para recorrer los vértices. Por ejemplo, $ord(k)$.

$y_j = 0$	$i = 0, \dots, m$
HACER	
$x_j = y_j$	$j = 0, \dots, m$
TRANSFORMACIÓN $\Phi_{l,l}$	
PARA CADA k (según el orden: $k = 0, \dots, m$)	
$i = ord(k)$	
$y_i = b_{j,i}^{(0)} + z_j^{(0)}$	
donde $z_j^{(0)} = x_j$ si $ord^{-1}(j) > ord^{-1}(i)$	
$z_j^{(0)} = y_j$ si $ord^{-1}(j) < ord^{-1}(i)$	
finPARA	
PARA CADA i ($i = 0, \dots, m^1$)	
$y_i = (1-\alpha) x_i + \alpha y_i$	
MIENTRAS $\exists j$ tal que $ x_j - y_j < \varepsilon$, $j = 0, \dots, m$	
$x_j = y_j$ $j = 0, \dots, m$	

¹ Se utiliza un valor $\alpha=0,5$.

Teorema 2

Si el valor de todos los circuitos es cero, entonces el algoritmo **A1** termina en un número finito de pasos, en función de ϵ , y proporciona un vector \mathbf{X} cuya distancia al punto doble está acotada por:

$$| \mathbf{X} - (\mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) | < \epsilon [1, 1, \dots, 1]^T \quad (5.66)$$

Si no todos los circuitos tienen valor nulo, hay que actuar componente convexa a componente convexa. Para cada componente convexa, se puede aplicar el algoritmo **A2**.

Algoritmo A2

Se elige un orden para recorrer los vértices, $ord(k)$.

$y_j = 0$	$i = 0, \dots, m$
HACER	
$x_j = y_j$	$j = 0, \dots, m$
TRANSFORMACIÓN $\Phi_{t,l}$	
PARA CADA k ($k = 0, \dots, m$)	
$i = ord(k)$	
$y_i = b_{j,i}^{(0)} + z_j^{(0)}$	
donde $z_j^{(0)} = x_j$ si $ord^{-1}(j) > ord^{-1}(i)$	
$z_j^{(0)} = y_j$ si $ord^{-1}(j) < ord^{-1}(i)$	
finPARA	
<hr/>	
$g = y_0$	
$y_i = y_i - g$	$i = 0, \dots, m$
$y_i = (1-\alpha) x_i + \alpha y_i$	$i = 0, \dots, m$
MIENTRAS $\exists j$ tal que $ x_j - y_j < \epsilon, j = 0, \dots, m$	
$x_j = y_j$	$j = 0, \dots, m$

Como consecuencia de lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3

Si el grafo G_1 tiene una sola componente convexa, o de manera equivalente clase, el algoritmo **A2** termina en un número finito de pasos, en función de ϵ .

Corolario

Si $|g| > \epsilon$, entonces el circuito no tiene valor nulo.

Observación 1. En caso de varios circuitos, lo que puede crear dificultades son diferentes valores de g ; en cambio, no lo crean valores de s distintos, ya que todos los valores g son iguales cuando $s=0$.

Observación 2. Si se conoce de antemano el número de vértices del circuito, se puede construir algoritmos más rápidos que el algoritmo **A2**.

Como el valor TC influye significativamente en un solo arco, la la corrección más eficaz sobre el valor de TC no es g , sino $s=p \cdot g$.

5.6.8. Núcleo conceptual de la aplicación Φ_I y su reducida $\Phi_{I,I}$

La transformación Φ_I es la forma **progresiva** de la ecuación de recurrencia utilizada en la programación dinámica determinista y discreta, en el espacio de los estados. Corresponde al problema enunciado como “determinación de un camino máximo de N arcos en el grafo \mathbf{G} , cuyo vértice final sea el vértice i ”.

Por ello, todo lo que sabemos sobre cómo “determinar un camino máximo de N arcos en el grafo \mathbf{G} , cuyo vértice inicial sea el vértice i ” es aplicable (se trata de problemas inversibles).

En particular, se puede iterar en el espacio de las políticas. Ello permite interpretar las soluciones posibles del problema primal, en el planteo mediante problemas lineales, las cuales en el problema dual corresponden a políticas.

Si considerado como proceso polietápico de decisión con ecuación de recurrencia progresiva Φ_I , una política² conduce a un valor $g > 0$ el circuito que determina tiene valor $p \cdot g = s > 0$, lo que indica el interés en modificar, en general aumentar TC, si puede corregirse.

Si al intentar corregir el valor de un circuito $s > 0$, la longitud de éste es independiente de TC, \mathbf{G} no es coherente para ningún valor de TC: la secuencia de movimientos es incompatible. Es posible detectarlo el acotar la variable TC.

Si para la política óptima $g < 0$, también hay que corregir el valor de TC, en general disminuirlo. Esto puede modificar el circuito óptimo u otro, que pase a ser óptimo al aumentar su valor g . Por eso, es prudente empezar por la cota inferior LB_{TC} e ir aumentando el valor de TC.

En cualquier caso, la ecuación funcional en el formato propio de la programación dinámica (Companys, 2000):

$$\mathbf{g} + \mathbf{W} = \Phi_I(\mathbf{W}) \tag{5.67}$$

cumpliendo \mathbf{g} ciertas condiciones, y que en caso de circuito único, $\mathbf{g} = g \cdot \mathbf{1}$.

Por tanto, pueden utilizarse algoritmos con fases como **A2**, seguida cada una de ellas de su respectiva fase de corrección de TC.

² Se consideran las políticas con un solo circuito, dado que la iteración en el espacio de las políticas tiende a ello. En caso de varios circuitos, la corrección debe basarse en el mayor valor $p \cdot g > 0$.

Para determinar un circuito, a partir de una política, puede hacerse, a partir de un vértice cualquiera, retrocediendo en el sentido de la relación. Además, se determinarán las componentes conexas.

5.7. Aplicación práctica de la Segunda prueba, de factibilidad, sobre un grafo de Tiempo de Ciclo Acotado

En este apartado, se ofrecen tres ejemplos de secuencias de movimientos de la grúa basadas en el ejemplo 5.1, presentado en el apartado 5.4.4, que ilustran la aplicación práctica de la Segunda prueba, de factibilidad.

Cada uno de los tres ejemplos se corresponde respectivamente con uno de los casos esquematizados en el apartado 5.5.2, con lo cual se ofrece una visión de cómo el algoritmo presentado en el apartado 5.5.1 actúa frente a:

- una secuencia no factible, finalmente;
- una secuencia factible, cuya cota inferior es igual a su tiempo de ciclo mínimo;
- una secuencia factible, pero cuya cota inferior es menor que su tiempo de ciclo mínimo.

5.7.1. Ejemplo de secuencia no factible (caso 1)

Supóngase que, para el ejemplo presentado en el apartado 5.4.4, se pretende evaluar la secuencia de operaciones de la grúa $H=\langle 0,2,1,3,4 \rangle$.

Si se plantea el grafo que describe esta secuencia, se obtiene la figura 5.13:

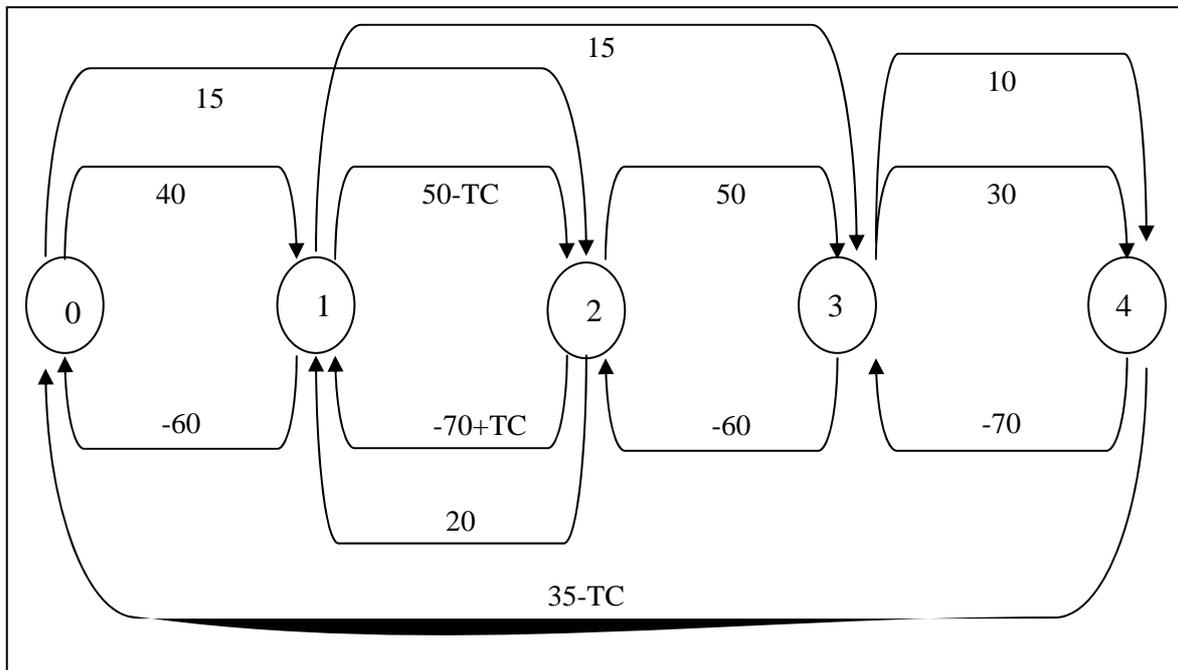


Figura 5.13. Grafo de la secuencia $H=\langle 0,2,1,3,4 \rangle$ para el ejemplo 5.1.

1. Cálculo de cotas

Una primera **cota inferior del tiempo de ciclo** por tiempo necesario en movimientos de la grúa, fórmula 5.8, es:

$$L(0) = 15+20+15+10+35 = 95$$

Las otras **cotas inferiores** se hallan aplicando la fórmula 5.15 a los arcos de grúa de retroceso que unen:

$$\text{el vértice 2 con el vértice 1: } L(1) = \frac{20+50}{1} = 70$$

$$\text{el vértice 4 con el vértice 0: } L(5) = \frac{35+(40+50+50+30)}{2} = 102,5$$

Por otro lado, las **cotas superiores del tiempo de ciclo** son las siguientes, aplicando la fórmula 5.23 a los arcos de grúa de avance que unen:

$$\text{el vértice 0 con el vértice 2: } U(2) = \frac{15-(60+70)}{-1} = 115$$

$$\text{el vértice 1 con el vértice 3: } U(3) = \frac{15-(70+60)}{-1} = 115$$

El arco de grúa de avance entre los vértices 3 y 4 no aporta ningún tipo de cota.

Así, las **cotas inferior y superior** del tiempo de ciclo para la secuencia H, calculadas según 5.17 y 5.24 son:

$$LB_H = 102,5 ; UB_H = 115$$

Como $LB_H < UB_H$, no es necesario explorar ningún valor de TC_H comprendido entre 0 y 102,5 ni por encima de 115.

2. Construcción de la matriz V

Para este vector de la secuencia de movimientos de grúa **H**, la matriz **V** toma la siguiente forma, en función de la variable TC:

	0	1	2	3	4
0		40	15		
1	-60		50-TC	15	
2		-70+TC 20		50	
3			-60		30 10
4	35-TC			-70	

Tabla 5.5. Matriz $V(TC)$ para la secuencia $H=<0,2,1,3,4>$.

3. Evaluación 1: $TC_H=103$

El valor K_{min_H} de esta secuencia H , valor de la cota inferior a partir de la cual es posible hallar un valor de TC_H que conduzca a una secuencia factible, es 102,5. Se explorará desde $TC_H=103$ (redondeando al entero superior), pues todos los valores de tiempo son enteros.

Para $TC_H=103$, la matriz de la tabla 5.5 se convierte en la matriz de la tabla 5.6.

	0	1	2	3	4
0		40	15		
1	-60		-53	15	
2		33		50	
3			-60		30
4	-68			-70	

Tabla 5.6. Matriz $V(103)$ para la secuencia $H=<0,2,1,3,4>$.

Antes de aplicar el algoritmo presentado en el apartado 5.5.1, se plantean las ecuaciones recurrentes necesarias para la determinación de los caminos máximos entre vértices en el grafo anterior o mediante la matriz $V(103)$:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & t_0 \geq t_1 - 60 & & t_0 \geq t_4 - 68 \\
 (1) \quad & t_1 \geq t_0 + 40 & & t_1 \geq t_2 + 33 \\
 (2) \quad & t_2 \geq t_0 + 15 & & t_2 \geq t_1 - 53 & & t_2 \geq t_3 - 60 \\
 (3) \quad & t_3 \geq t_1 + 15 & & t_3 \geq t_2 + 50 & & t_3 \geq t_4 - 70 \\
 (4) \quad & t_4 \geq t_3 + 30 & & & &
 \end{aligned}$$

En el procedimiento iterativo de obtención de los caminos máximos en el grafo entre el vértice 0 referencia y todos los demás, requiere las siguientes iteraciones:

	T^0	$T^{0'}$	T^1	$T^{1'}$
0	0	0	27	0
1	40	40	67	40
2	15	15	42	15
3	65	65	92	65
4	95	95	122	95

Tabla 5.7. Aplicación del algoritmo de Ford a la matriz $V(103)$ para $H=<0,2,1,3,4>$.

Para esta secuencia H propuesta, el tiempo de ciclo $TC_H=103$ conduce fácilmente a que el procedimiento converja: ya en la segunda iteración, al corregir los valores inicialmente obtenidos (T^1) restando 27 unidades, se obtiene idéntico vector ($T^{1'}$) a la iteración anterior ($T^{0'}$). Dado que no se cumplen todas las restricciones a la vez, en cada iteración los valores de las variables irían aumentando 27 unidades. Así, se establece en dicha cantidad la suma del tiempo de ciclo sobre el valor en evaluación vigente.

Así pues, el nuevo valor del tiempo de ciclo a evaluar sobre las restricciones del problema sería $TC_H=130$. No obstante, dado que este valor ya se encuentra por encima de la cota superior ($TC_H > UB_H$), esto implica que la secuencia H evaluada es definitivamente **no factible**.

5.7.2. Ejemplo de secuencia factible con $K_{min_H} = LB_H$ (caso 2)

Supóngase para el ejemplo presentado en el apartado 5.4.4 que se pretende ahora evaluar la secuencia de operaciones de la grúa $H=<0,3,1,4,2>$.

Si se plantea el grafo que describe la anterior secuencia, se obtiene la figura 5.14:

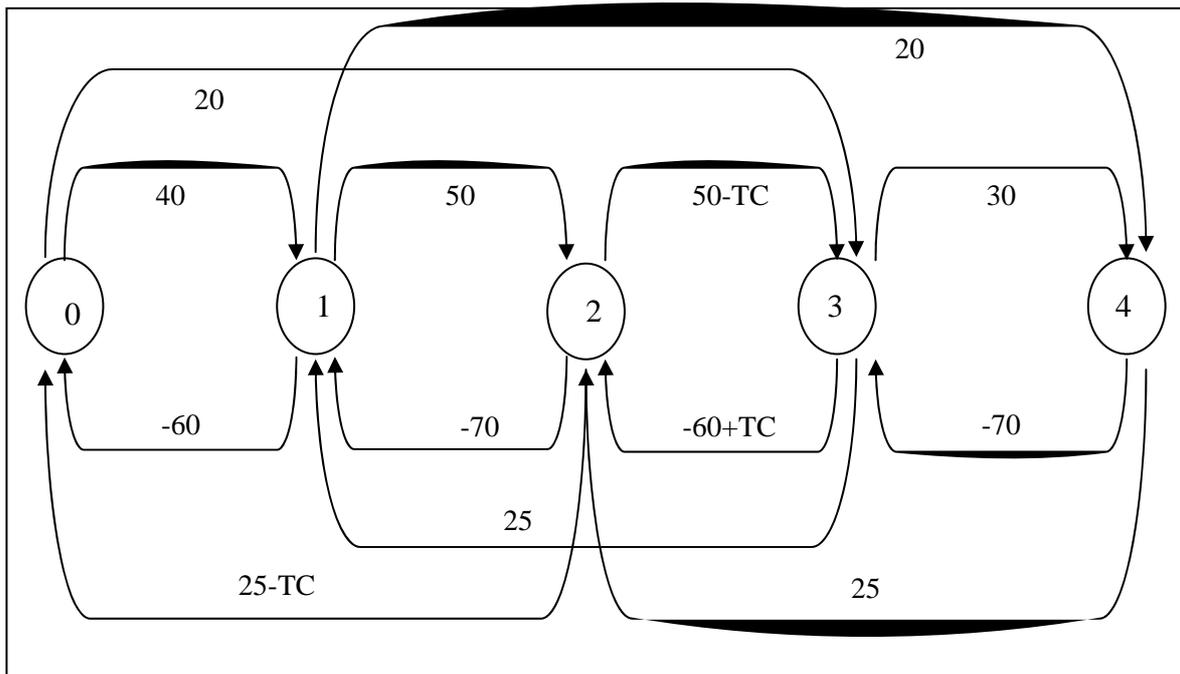


Figura 5.14. Grafo de la secuencia $H=<0,3,1,4,2>$ para el ejemplo 5.1.

1. Cálculo de cotas

Una primera **cota inferior del tiempo de ciclo** debido al consumo de tiempo necesario en movimientos de la grúa, fórmula 5.8, es:

$$L(0) = 20+25+20+25+25 = 115$$

Las otras **cotas inferiores del tiempo de ciclo** se hallan aplicando la fórmula 5.15 a los arcos de grúa de retroceso que unen:

$$\text{el vértice 3 con el vértice 1: } L(1) = \frac{25+(50+50)}{1} = 125$$

$$\text{el vértice 4 con el vértice 2: } L(2) = \frac{25+(50+30)}{1} = 105$$

$$\text{el vértice 2 con el vértice 0: } L(5) = \frac{25+(40+50)}{1} = 115$$

Las **cotas superiores del tiempo de ciclo** se obtienen aplicando ahora la fórmula 5.23 a los arcos de grúa de avance que unen:

$$\text{el vértice 0 con el vértice 3: } U(2) = \frac{20-(60+70+60)}{-1} = 170$$

$$\text{el vértice 1 con el vértice 4: } U(4) = \frac{20-(70+60+70)}{-1} = 180$$

Así, las **cotas inferior y superior del tiempo de ciclo**, calculadas según 5.17 y 5.24, son:

$$LB_H = 125, UB_H = 170$$

Como $LB_H < UB_H$, no es necesario explorar ningún valor de TC_H comprendido entre 0 y 125 ni lo será por encima de 170.

2. Construcción de la matriz V

Para el vector de la secuencia de movimientos de grúa H , la matriz V toma la siguiente forma, en función de la variable TC :

	0	1	2	3	4
0		40		20	
1	-60		50		20
2	25-TC	-70		50-TC	
3		25	-60+TC		30
4			25	-70	

Tabla 5.8. Matriz $V(TC)$ para la secuencia $H=<0,3,1,4,2>$.

3. Evaluación 1: $TC_H=125$

El valor LB_H de 125 para esta secuencia H , cota inferior a partir de la cual es posible hallar un valor de TC_H que conduzca a una secuencia factible, será el primero en ser sustituido en la tabla anterior.

Para un valor $TC_H=125$, la matriz de la tabla 5.8 pasa a ser la matriz de la tabla 5.9.

	0	1	2	3	4
0		40		20	
1	-60		50		20
2	-100	-70		-75	
3		25	65		30
4			25	-70	

Tabla 5.9. Matriz $V(125)$ para la secuencia $H=<0,3,1,4,2>$.

Las ecuaciones recurrentes para aplicar el algoritmo del apartado 5.5.1 que permita determinar los caminos máximos entre vértices en el grafo anterior o mediante la matriz $V(125)$ son:

- (0) $t_0 \geq t_1 - 60$ $t_0 \geq t_2 - 100$
- (1) $t_1 \geq t_0 + 40$ $t_1 \geq t_2 - 70$ $t_1 \geq t_3 + 25$
- (2) $t_2 \geq t_1 + 50$ $t_2 \geq t_3 - 65$ $t_2 \geq t_4 + 25$
- (3) $t_3 \geq t_0 + 20$ $t_3 \geq t_2 - 75$ $t_3 \geq t_4 - 70$
- (4) $t_4 \geq t_1 + 20$ $t_4 \geq t_3 + 30$

En el procedimiento iterativo que conduce a los caminos máximos en el grafo entre el vértice 0 de referencia y los demás, son necesarias las siguientes iteraciones:

	T^0	$T^{0'}$	T^1	$T^{1'}$	T^2	$T^{2'}$
0	0	0	25	0	0	0
1	75	75	75	50	50	50
2	125	125	125	100	100	100
3	50	50	50	25	25	25
4	95	95	95	70	70	70

Tabla 5.10. Aplicación del algoritmo de Ford a la matriz $V(125)$ para $H=<0,3,1,4,2>$.

Para esta secuencia propuesta, un tiempo de ciclo TC_H de 125, que coincide con la cota inferior LB_H , ya cumple todas las restricciones. Al final de la segunda iteración, finaliza el procedimiento dado que los cinco valores obtenidos ($T^{2'}$) son exactamente iguales a los de la iteración anterior ($T^{1'}$).

La secuencia propuesta $H=<0,3,1,4,2>$ es **factible** y su **tiempo de ciclo** mínimo es de **125**.

5.7.3. Ejemplo de secuencia factible con $K_{min_H} > LB_H$ (caso 3)

Para el ejemplo presentado en el apartado 5.4.4 y tratado ampliamente, se pretende evaluar a continuación la secuencia de operaciones de la grúa $H=<0,4,1,2,3>$.

Si se plantea el grafo que describe esta secuencia, se obtiene la figura 5.15:

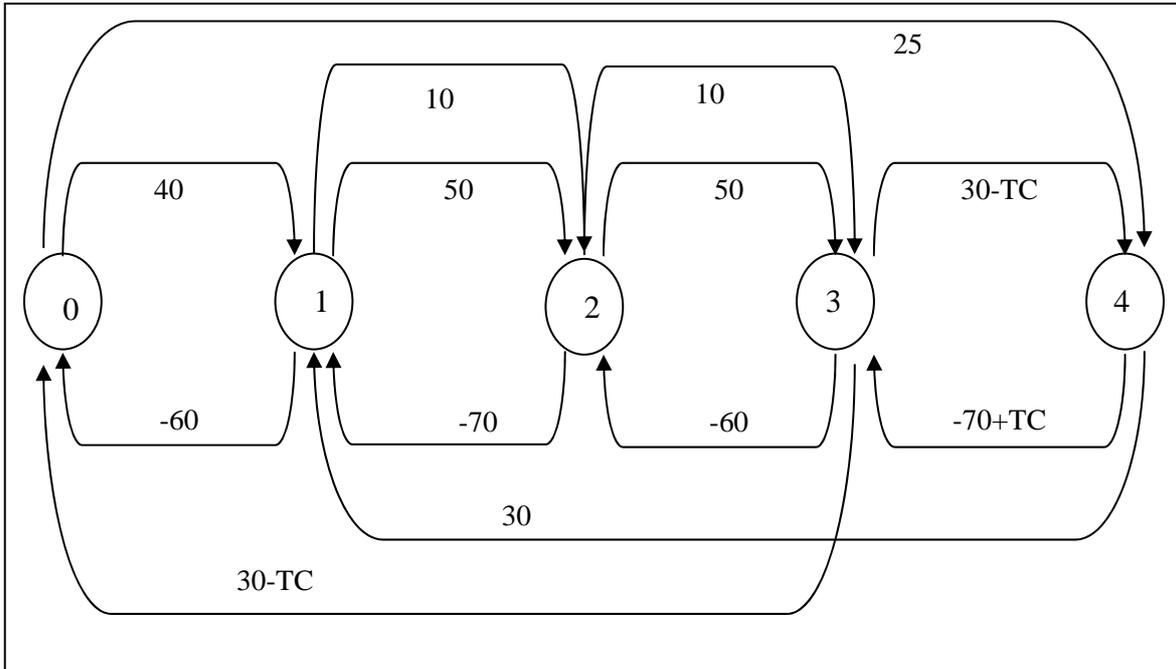


Figura 5.15. Grafo de la secuencia $H=<0,4,1,2,3>$ para el ejemplo 5.1.

1. Cálculo de cotas

Una **primera cota inferior del tiempo de ciclo** al considerar tiempo necesario en movimientos de la grúa, como resultado de aplicar la fórmula 5.8, es:

$$L(0) = 25+30+10+10+30 = 105$$

Se hallan otras **cotas inferiores del tiempo de ciclo**, aplicando las fórmulas 5.15 y 5.16, a los arcos de grúa de retroceso que unen:

el vértice 4 con el vértice 1: $L(1) = \frac{30+(50+50+30)}{1} = 160$

el vértice 3 con el vértice 0: $L(5) = \frac{30+(40+50+50)}{1} = 170$

Para **cotas superiores del tiempo de ciclo**, aplicando ahora de manera similar la fórmula 5.23, al arco de grúa de avance que une el vértice 0 con el vértice 4:

$$U(4) = \frac{25 - (70 + 60 + 70 + 60)}{-1} = 235$$

Los arcos de grúa de avance entre los vértices 1 y 2, así como entre 2 y 3, respectivamente, no aportan ningún tipo de cota.

Así, las **cotas inferior y superior del tiempo de ciclo**, calculadas según las fórmulas 5.17 y 5.24 son:

$$LB_H = 170 ; UB_H = 235$$

Como $LB_H < UB_H$, no es necesario explorar el comportamiento del vector de tiempos para ningún valor de TC_H menor que 170 ni mayor que 235.

2. Construcción de la matriz V

Para el vector de secuencia de movimientos de grúa $H = \langle 0, 4, 1, 2, 3 \rangle$, la matriz **V** en función de la variable TC_H toma la siguiente forma (tabla 5.11):

	0	1	2	3	4
0		40			25
1	-60		50 10		
2		-70		50 10	
3	30-TC		-60		30-TC
4		30		-70+TC	

Tabla 5.11. Matriz **V**(TC) para la secuencia $H = \langle 0, 4, 1, 2, 3 \rangle$.

La cota inferior del tiempo de ciclo, a partir de la cual se puede hallar un valor de TC_H que comporte que esta secuencia **H** sea factible, llamado valor LB_H , es 170.

3. Evaluación 1: $TC_H = 170$

Para $TC_H = 170$, la matriz de la tabla 5.11 se convierte en la matriz de la tabla 5.12.

	0	1	2	3	4
0		40			25
1	-60		50		
2		-70		50	
3	-140		-60		-140
4		30		100	

Tabla 5.12. Matriz **V**(170) para la secuencia $H = \langle 0, 4, 1, 2, 3 \rangle$.

Las ecuaciones recurrentes para aplicar el algoritmo del apartado 5.5.1 que permita determinar los caminos máximos entre vértices en el grafo anterior o mediante la matriz **V**(170) son:

$$\begin{array}{lll}
 (0) & t_0 \geq t_1 - 60 & t_0 \geq t_3 - 140 \\
 (1) & t_1 \geq t_0 + 40 & t_1 \geq t_2 - 70 & t_1 \geq t_4 + 30 \\
 (2) & t_2 \geq t_1 + 50 & t_2 \geq t_3 - 60 \\
 (3) & t_3 \geq t_2 - 50 & t_3 \geq t_4 + 100 \\
 (4) & t_4 \geq t_0 + 25 & t_4 \geq t_3 - 140
 \end{array}$$

El procedimiento iterativo para el cálculo de los caminos máximos en el grafo entre el vértice 0 de referencia y los demás empieza con las siguientes iteraciones:

	T^0	$T^{0'}$	T^1	$T^{1'}$	T^2	$T^{2'}$	T^3	$T^{3'}$	
0	0	0	60	0	0	0	15	0	...
1	100	100	100	40	55	55	55	40	...
2	150	150	150	90	105	105	105	90	...
3	200	200	200	140	155	155	155	140	...
4	60	60	85	25	25	25	40	25	...

Tabla 5.13. Aplicación del algoritmo de Ford a la matriz $V(170)$ para $H=\langle 0,4,1,2,3 \rangle$.

Para esta secuencia propuesta, $H=\langle 0,4,1,2,3 \rangle$, la variable del tiempo de ciclo TC con un valor de 170 no cumple todas las restricciones dado que en cada iteración del procedimiento algunos de los valores de las variables del vector T aumentan. Así, se van sucediendo alternativamente vectores como T^2 i T^3 hasta completar las $m+1$ iteraciones.

En este caso, dado que se alterna un incremento de 0 y 15 unidades, se tomaría en principio como variación del valor de TC_H la media de ambos incrementos (dado que en la secuencia de los movimientos de la grúa están implicadas piezas pertenecientes a dos ciclos). Por lo tanto, el incremento de la variable TC_H del tiempo de ciclo se establecería en 7,5 (redondeado a 8), y progresivamente hasta sumar 15 al valor inicial de TC_H .

No obstante, lo planteado en el apartado anterior 5.6 permite sumar directamente 15 al valor inicial de TC_H . El nuevo valor para el tiempo de ciclo será $TC_H=185$, que al ser menor que la cota superior UB_H debe evaluarse para la secuencia, porque aún puede ser factible.

4. Evaluación 2: $TC_H=185$

Para $TC_H=185$, la matriz V ahora se convierte en la matriz de la tabla 5.14.

	0	1	2	3	4
0		40			25
1	-60		50		
2		-70		50	
3	-155		-60		155
4		30		115	

Tabla 5.14. Matriz $V(185)$ para la secuencia $H=<0,4,1,2,3>$.

Las ecuaciones recurrentes para aplicar el algoritmo mediante la matriz $V(185)$ son:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & t_0 \geq t_1 - 60 & t_0 \geq t_3 - 155 \\
 (1) \quad & t_1 \geq t_0 + 40 & t_1 \geq t_2 - 70 & t_1 \geq t_4 + 30 \\
 (2) \quad & t_2 \geq t_1 + 50 & t_2 \geq t_3 - 60 \\
 (3) \quad & t_3 \geq t_2 - 50 & t_3 \geq t_4 + 115 \\
 (4) \quad & t_4 \geq t_0 + 25 & t_4 \geq t_3 - 155
 \end{aligned}$$

El cálculo de los caminos máximos en el grafo finalmente converge y sólo requiere la inicialización del vector y una primera iteración, como se puede observar en la siguiente tabla.

	T^0	$T^{0'}$	T^1	$T^{1'}$
0	0	0	0	0
1	55	55	55	55
2	105	105	105	105
3	155	155	155	155
4	25	25	25	25

Tabla 5.15. Aplicación del algoritmo de Ford a la matriz $V(185)$ para $H=<0,4,1,2,3>$.

Un valor de 185 en la variable de tiempo de ciclo TC_H implica que el vector T^0 se vea repetido en T^1 . En consecuencia, dado que el algoritmo converge, **el tiempo de ciclo mínimo** para la secuencia $H=<0,4,1,2,3>$ es de $TC_H=185$.

5.8. Esquema del *branch and bound* mediante tanques con grafos con Tiempo de Ciclo Acotado

5.8.1. Descripción de la acción principal y las acciones secundarias

Seguidamente, se describe la parte principal del procedimiento de *branch and bound* (mediante baños, con exploración en profundidad), explicado en el anterior capítulo, una vez adaptado al uso del grafo TCA (con Tiempo de Ciclo Acotado) para evaluar secuencias y subsecuencias.

Mientras que en la acción *Hallar cotas* se realiza la Primera prueba, de infactibilidad (apartado 5.4), en caso de superarla, o sea factible=1, se pasa a la Segunda prueba, de factibilidad (apartado 5.5), con la acción *Resolver grafo TCA*.

ACCIÓN Evaluar un grafo TCA construido

ACCIÓN Hallar cotas

SI cota superior < cota inferior

 TC(H) = 0

 factible = 0

SINO

ACCIÓN Resolver grafo TCA

FIN SI

SI dimensión(H) < m (grafo aún no completo, falta algún movimiento)

 SI factible = 1

 Rectificar TC(H) para obtener la cota de descendientes

 SINO (factible = 0)

 Indicar vértice como 'cerrado'

 FIN SI

SINO (grafo completo, se incluyen todos los movimientos)

 SI factible = 1

 SI TC(H) < TC*(H*)

 TC*(H*) = TC(H) ; H* = H ; T* = T

 Cerrar vértices abiertos con TC(H) > TC*(H*)

 FIN SI

 SINO (factible = 0)

 Indicar vértice como 'cerrado'

 FIN SI

 Cerrar vértice (por ser terminal)

FIN SI

5.8.2. Obtención de cotas en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

La acción *Hallar cotas* presenta una estructura basada en dos subacciones fundamentales:

- por un lado, la descripción de los arcos en un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA) mediante los cuatro vectores presentados en el apartado 5.3.2;
- por el otro, el estudio combinado de las cotas inferior y superior para una determinada secuencia o subsecuencia H .

En esta última parte, el estudio de cotas que indiquen la posible infactibilidad de la secuencia considerada se lleva a cabo en tres etapas o niveles:

- **Nivel 1:** partiendo de las cotas inferior y superior del vértice explorado, se calcula la cota inferior $L(0)$ para el tiempo que la grúa requiere en un ciclo para completar todos sus movimientos, según la fórmula 5.8, y se asegura que la cota superior no supera a la mejor solución de TC hallada hasta ese momento.
- **Nivel 2:** se calcula la posible cota inferior $L(m+1)$, siempre existente, según la fórmula 5.16.
- **Nivel 3:** se calculan las posibles cotas inferior $L(j)$ o superior $U(j)$, introducidas al incorporar el movimiento j al vector \mathbf{H} , referido a la extracción del producto del baño j , según las fórmulas 5.15 y 5.23.

ACCIÓN Hallar cotas

Crear vectores (G_{from} , G_{to} , G_{time} , G_{cycle}), que describen restricciones según \mathbf{H}

Estudiar posibles cotas de TC generadas en el grafo (a 3 niveles):

1. Cotas inferior y superior de partida

$C_{Inf}(H) = C_{Inf}$ (vértice explorado)

$C_{Sup}(H) = C_{Sup}$ (vértice del árbol explorado)

Calcular tiempo necesario de movimientos de grúa, $L(0)$

SI $L(0) > C_{Inf}(H)$

$C_{Inf}(H) = L(0)$

FINSI

SI $TC^* < C_{Sup}(H)$

$C_{Sup}(H) = TC^* - 1$

FINSI

2. *Si aún Cota Inferior (H) < Cota Superior (H)*
 Calcular $L(m+1)$, $C_{Inf}(H)$ utilizando el arco de grúa de retroceso a tanque 0
 SI $C_{Inf}(H) < L(m+1)$
 $C_{Inf}(H) = L(m+1)$
 FIN SI

 3. *Si aún Cota Inferior (H) < Cota Superior (H), refinar cotas inferior y superior*
 Buscar movimiento (j) incorporado en el vértice del árbol
 SI se genera un nuevo 'arco de grúa de avance' en el grafo
 Considerar circuito con arcos de tanque de retroceso
 SI $C_{Sup}(H) < UB(j)$
 $C_{Sup}(H) = UB(j)$
 FIN SI
 SINO (se genera un nuevo 'arco de grúa de retroceso' en el grafo)
 Considerar circuito con arcos de tanque de avance
 SI $C_{Inf}(H) < LB(j)$
 $C_{Inf}(H) = LB(j)$
 FIN SI
 FIN SI
-

La acción *Resolver grafo TCA* tiene como objetivo llevar a cabo la Segunda prueba, de factibilidad, para lo cual plantea los datos de los arcos del grafo en una matriz V y posteriormente, aplica un procedimiento tipo en caminos extremos de grafos, como es el algoritmo de Ford. En las sucesivas iteraciones, si se detecta una variación periódica TCd de los valores asociados al vector T de tiempos, se suma dicha cantidad al tiempo de ciclo tentativo TC , que se estaba aplicando al grafo.

ACCIÓN Resolver grafo TCA

Inicializar matriz de datos V

$TC = C_{Inf}(H)$

MIENTRAS $TC \leq C_{Sup}(H)$

Introducir restricciones de tanque

Introducir restricciones de grúa

(comprobar solapes con restricciones de tanque)

Hallar camino máximo en el grafo (entre vértice 0 y demás), para TC

continuar = 1

MIENTRAS continuar Y valor finito

Iteración del algoritmo Ford (cambios en valores= TCd)

Si no hay cambios

$TC(H) = TC$

continuar = 0 (hay convergencia)

SALIR MIENTRAS

```

SINO (si hay cambios)
    continuar = continuar + 1
    Si continuar crece demasiado
        valor no finito (hay divergencia)
        SALIR MIENTRAS
    FINSI
    FINSI
FINMIENTRAS

Si valor finito (si ha habido convergencia en TC)
    SALIR MIENTRAS
SINO (Si no ha habido convergencia, sumar TCd)
    TC = TC + TCd
    FINSI
FINMIENTRAS

Si valor no finito
    factible = 0
SINO (TC(H) > 0 Y TC(H) < TC*)
    factible = 1
    FINSI

```

5.9. Ejemplo completo: *branch and bound* mediante baños con grafos de Tiempo de Ciclo Acotado

En este apartado, se describen las etapas que sigue el procedimiento de *branch and bound* presentado ya en el capítulo 4 (*branch and bound* mediante baños, con exploración en profundidad), pero esta vez utilizando el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado como evaluador de secuencias y subsecuencias. Esto implica realizar la Primera prueba, de infactibilidad, formalizada en el apartado 5.4 y, en caso de superarla, pasar a la Segunda prueba, de factibilidad, estructurada en el apartado 5.5.

En la figura 5.16 se representa la parte del árbol que en realidad se explora, la cual se complementa con la figura 5.16b, donde se ofrece la misma información para aquellos vértices del árbol no explorados.

La **etapa 1** consiste en inicializar el árbol mediante la subsecuencia $\langle 0,1 \rangle$, con unas cotas para el tiempo de ciclo de todos sus descendientes situadas en 60 y 205.

La **etapa 2** ramifica el vértice anteriormente creado en dos descendientes:

- $\langle 0,2,1 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[70,115]$, cuyo valor 70 es válido, pero al añadir los tiempos de transporte pendientes de operaciones aún no incluidas en la secuencia se incrementa hasta 85 (en rojo);
- $\langle 0,1,2 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[115,205]$, cuya cota inferior 115 es coherente.

La **etapa 3** toma el vértice más prometedor $\langle 0,2,1 \rangle$ y lo ramifica en tres descendientes:

- $\langle 0,3,2,1 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[80,85]$, cuyo valor 80 es coherente, y que al añadir el tiempo pendiente de la operación de transporte del baño 4 alcanza 95 (en rojo);
- $\langle 0,2,3,1 \rangle$, subsecuencia infactible dado que el tiempo de ciclo está acotado por $[125,115]$ y un descendiente de la cual ha servido de ejemplo en el apartado 5.4.5;
- $\langle 0,2,1,3 \rangle$, con el tiempo de ciclo acotado por $[85,115]$, presenta un valor 95 como coherente.

La **etapa 4** arranca de uno de los dos vértices más prometedores, $\langle 0,3,2,1 \rangle$, con tiempo de ciclo mínimo de 95, y lo ramificaría en sus cuatro descendientes finales, a no ser que todos sus vértices tengan tiempos de ciclo acotados por valores incompatibles (cota inferior menor que cota superior), quedando descartados en la Primera prueba, de infactibilidad.

La **etapa 5** escoge al siguiente vértice abierto más prometedor $\langle 0,2,1,3 \rangle$ y lo ramifica en cuatro descendientes finales:

- $\langle 0,4,2,1,3 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[115,115]$ queda descartado en la Segunda prueba, de factibilidad;
- $\langle 0,2,4,1,3 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[105,115]$, ofrece un valor coherente de **105**, que lo convierte en el nuevo óptimo provisional;
- $\langle 0,2,1,4,3 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[105,90]$ queda descartado en la Primera prueba, de infactibilidad;
- finalmente, $\langle 0,2,1,3,4 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado inicialmente por valores $[103,115]$, véase ejemplo del apartado 5.7.1, puede recortar su intervalo al actuar el óptimo como cota superior y queda limitado por $[103,105]$, pero no supera la Segunda prueba, de factibilidad.

En este punto, sólo queda como vértice abierto $\langle 0,1,2 \rangle$, con cota para sus descendientes de 115, valor peor que el óptimo provisional 105, con lo cual se cierra esta parte del árbol (representada en la figura 5.16b).

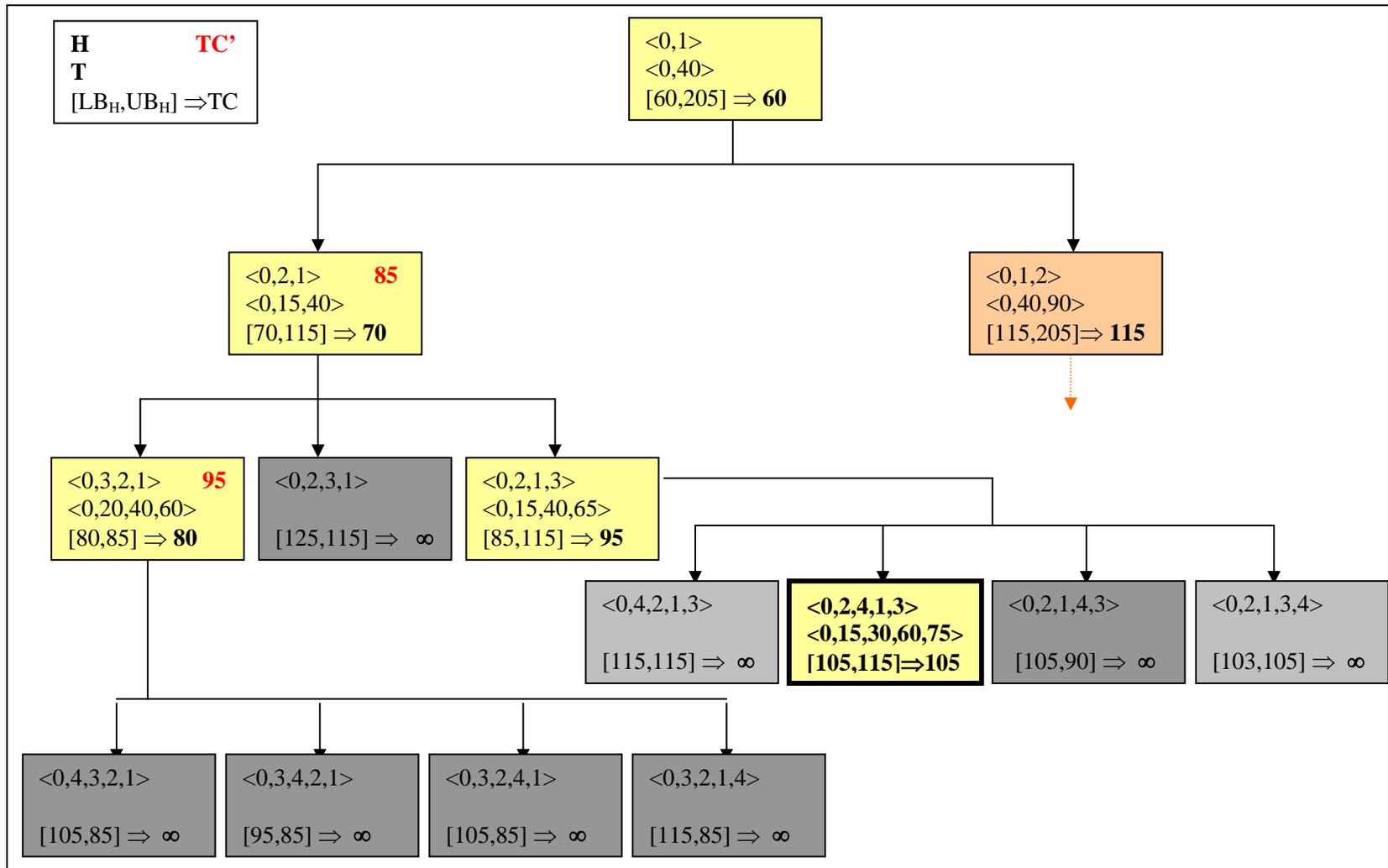


Figura 5.16. *Branch and bound* para el ejemplo 5.1. Amarillo, vértices explorados; gris oscuro, secuencias infactibles sin pasar Primera Prueba de Infactibilidad; gris claro, secuencias infactibles sin pasar Segunda Prueba de Infactibilidad; naranja, secuencia descartada al hallar 105 como tiempo de ciclo óptimo.

Como observaciones a la figura 5.16b, puede señalarse que en caso de explorar de principio esta parte del árbol:

- Algunos vértices se descartarían en la Primera prueba, de infactibilidad, como $\langle 0,4,3,1,2 \rangle$ con tiempo de ciclo acotado por $[125,115]$.
- Otros vértices se descartarían en la Segunda prueba, de factibilidad, tuvieran un tiempo de ciclo estrechamente acotado ($\langle 0,1,3,2 \rangle$ por $[115,115]$) o más ampliamente acotado ($\langle 0,3,4,1,2 \rangle$, por $[160,170]$).
- $\langle 0,3,1,4,2 \rangle$ es una secuencia factible, como se vio en el apartado 5.7.2, con tiempo de ciclo acotado por $[125,170]$ y tiempo de ciclo coherente de 125.
- $\langle 0,4,1,2,3 \rangle$ también es una secuencia factible, como se vio en el apartado 5.7.3, con tiempo de ciclo acotado inicialmente por $[170,205]$ y tiempo de ciclo coherente de 185; no obstante, si se considera el valor de 125 del vértice $\langle 0,3,1,4,2 \rangle$, con tiempo de ciclo acotado por $[170,125]$ es una secuencia que no mejora la solución en curso.
- $\langle 0,1,2,3,4 \rangle$, quedaría con tiempo de ciclo acotado por $[205,125]$ si se hubiera alcanzado el óptimo de $\langle 0,3,1,4,2 \rangle$ y no se hubiera explorado la parte del árbol de la figura 5.16.

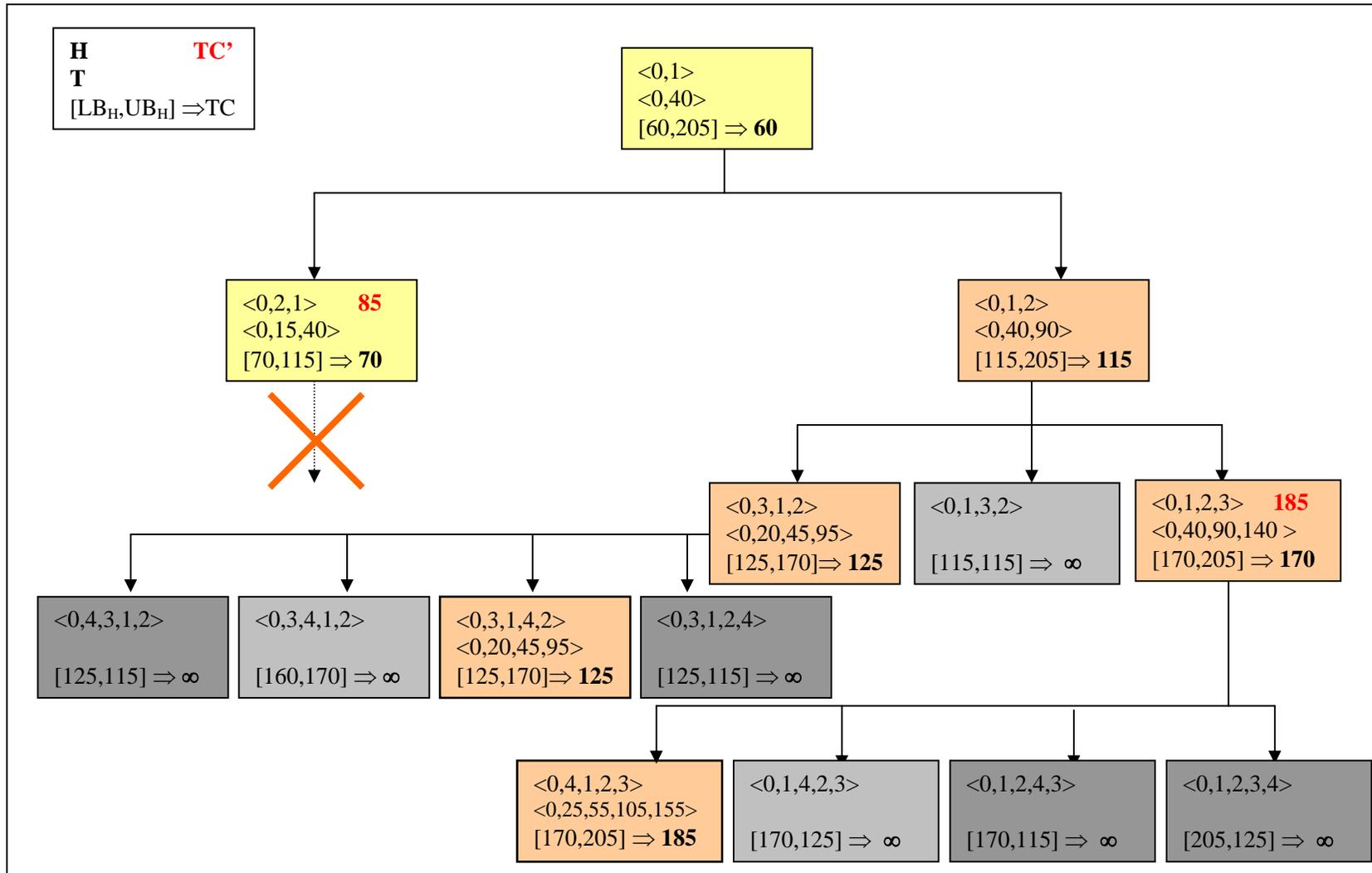


Figura 5.16b. *Branch and bound* para el ejemplo 5.1 (zona no explorada). Amarillo, vértices explorados; gris oscuro, secuencias infactibles sin pasar Primera Prueba de Infactibilidad; gris claro, secuencias infactibles sin pasar Segunda Prueba de Infactibilidad; naranja, secuencias factibles pero descartadas.

6. PROCEDIMIENTO HEURÍSTICO DE RESOLUCIÓN BASADO EN LA GENERACIÓN DE SECUENCIAS, EVALUADAS MEDIANTE EL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO

6.1. Introducción a los procedimientos heurísticos

Hasta el presente capítulo, se han presentado dos maneras de representar en forma de **grafo** la variante del problema tratado, *Hoist Scheduling Problem*:

- mediante el uso del llamado grafo Secuencial (capítulo 4) y
- mediante el uso del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (capítulo 5).

En el capítulo 4, se presentaron dos **procedimientos exactos** de exploración en una estructura arborescente, para la búsqueda de la secuencia óptima correspondiente a un cierto ejemplar:

- el procedimiento *branch and bound* mediante tiempos (BBt),
- el procedimiento *branch and bound* mediante baños o tanques (BBb).

En el capítulo 5, se ha descrito la utilización de un nuevo tipo de grafo, el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, cuyas características facilitan la resolución del problema, que puede ser aplicado en sustitución del anterior grafo en los mismos procedimientos.

Este grupo de procedimientos de resolución, de tipo exacto, obligan a una exploración muy extensa de las secuencias y subsecuencias posibles, lo cual conlleva un elevado tiempo de cálculo.

Así, como alternativas a los procedimientos exactos, se plantean otros de tipo **heurístico**, que permiten a menudo alcanzar una solución suficientemente satisfactoria, sin asegurar que se ha alcanzado la solución óptima. Para aplicar un procedimiento heurístico, en el cual sólo se evaluará un conjunto reducido de posibles soluciones, se debe cuidar más la selección de los elementos de dicho conjunto. En este caso, la exploración de secuencias de movimientos de grúa **H** (directamente formadas por vectores de $m+1$ componentes) tiene en cuenta la posible disposición de las piezas u objetos a inicio de un ciclo de movimientos.

Finalmente, es necesario fijar los criterios de finalización para una exploración determinada. En caso de plantear la búsqueda de una solución para un problema de este tipo mediante una exploración de entornos, la condición de final suele establecerse en función de dos aspectos, que podría ampliarse a un tercero en este tipo de problemas:

- el tiempo transcurrido desde el inicio de la exploración,
- el número de iteraciones realizado,
- y, en este caso también, la dimensión m del ejemplar tratado.

En la variante de problema planteado y dado el tipo de exploración escogida, se ha tomado como criterio de finalización alcanzar la solución trivial de partida, con una pieza u objeto en un ciclo del sistema productivo, después de haber analizado la posibilidad de varias.

6.2. Exploración guiada de nuevas secuencias a evaluar

El problema básico, planteado y resuelto mediante un procedimiento exacto, en una estructura arborescente, y la resolución de grafos con Tiempo de Ciclo Acotado, comporta que gran número de las inicialmente posibles secuencias terminen siendo consideradas infactibles, por cuestiones de incumplimiento simultáneo de restricciones.

Para evitar en lo posible la enumeración de secuencias **H** de operaciones de la grúa que no conduzcan a la solución óptima buscada, considerando las restricciones de tiempo de estancia en los baños, se puede analizar tan sólo secuencias **H** de movimientos según la presencia simultánea de piezas en el sistema.

6.2.1. Número máximo de piezas en el sistema durante un ciclo

En primer lugar, es necesario determinar el posible número máximo de piezas en el sistema productivo. Utilizando la expresión (3.74) de Ng (1996), el número óptimo n^* de piezas en una línea, que está acotado, depende de magnitudes relativas a los tiempos mínimo y máximo de remojo, los tiempos de movimiento de grúa y los tiempos de movimiento entre tanques. Así:

$$n \leq \text{MIN} \left\{ \text{INT} \left[\frac{f_0 + \sum_{i=1}^m (f_i + b_i)}{f_0 + f_m + \sum_{i=1}^{m-1} (f_i + e_{i,i+1})} \right] + 1, m \right\} \quad (6.1)$$

6.2.2. Características básicas del algoritmo heurístico: piezas y operaciones en un ciclo

El esquema de resolución, usado en el algoritmo heurístico que se plantea, se basa en los siguientes puntos:

- Se parte de un número de piezas al inicio del ciclo igual al máximo por disponibilidad de la grúa (n_{max}), que no puede ser nunca superior al número de tanques en la línea de producción. En este último caso, este número acabaría tomando dicho valor ($n_{max}=m$). El cociente que determina este valor tiene las mismas connotaciones que el utilizado en los problemas de asignación de máquinas a operarios: tiempo máximo de estancia en las instalaciones por una pieza, dividido por el tiempo necesario por una grúa para realizar el ciclo completo.
- Este valor de objetos a inicio del ciclo se irá reduciendo progresivamente desde n_{max} hasta 1, extremo que comporta la infrautilización de la línea al recorrer la grúa los distintos baños de proceso siguiendo una sola pieza.
- Dicho número de piezas debe repartirse a lo largo del sistema productivo para que cada una de ellas tenga una duración más o menos homogénea en la línea, en función de los tiempos mínimos de estancia en cada baño de la línea. Esto se consigue dividiendo el total de tiempos mínimos de estancia en los baños entre el número de objetos o piezas y

asignando una pieza j ($j=1, \dots, n$) al tanque i , empezando por la estación de carga ($i=0$), de manera tal que:

$$\sum_{h=1}^{i-1} a_h < \frac{\sum_{h=1}^m a_h}{n} \cdot j \quad (6.2)$$

$$\sum_{h=1}^i a_h \geq \frac{\sum_{h=1}^m a_h}{n} \cdot j \quad (6.3)$$

- Este reparto regular de piezas a lo largo de la línea, según uno de los parámetros del problema, puede ser modificado al considerar el resto de parámetros del sistema. El reparto de piezas supone que **cada pieza** deba realizar durante un ciclo **un número determinado de operaciones** ($OP = \text{Operaciones Pieza}$). Se generan otras nuevas asignaciones de operaciones para cada pieza, un conjunto de nuevas secuencias de operaciones para las piezas ($OP' = \text{Operaciones Pieza derivadas}$), partiendo del anterior reparto regular de operaciones de la línea a las diversas piezas.
- Exploración de vecindarios: Se consideran como **asignaciones vecinas** de operaciones a cada pieza de una asignación dada cuando operaciones de la última de las piezas son reasignadas a alguna de las piezas anteriores en el vector OP . Esto equivaldría al supuesto que algunas operaciones que realizaba una cierta pieza en el ciclo, en el vector original, se pasarían a otra pieza que en la realidad hubiera entrado a la línea en un ciclo posterior.
- Generación de vectores con operaciones de piezas: Se consideran dos criterios de ordenación de las operaciones a realizar por las piezas en un vector de movimientos de la grúa:
 - ✓ Por un lado, se utiliza una ordenación determinista para el vector de secuencia de movimientos de piezas \mathbf{P} . En este caso, se sigue la tendencia a homogeneizar los movimientos de las diversas piezas, donde tienen prioridad aquellas piezas cuanto más próximas se hallan del final de la línea.
 - ✓ Por otro lado, se utiliza ordenaciones de carácter aleatorio, cuando la selección para cada posición del vector de secuencia de movimientos de piezas \mathbf{P} se realiza entre las piezas cuyo siguiente movimiento no asignado esté disponible; un vector de este tipo puede comportar secuencias de movimientos de piezas infactibles, al incumplir la hipótesis que en un baño sólo puede permanecer un objeto.
- Finalmente, a partir de una secuencia cualquiera \mathbf{P} de movimientos de piezas, sea de carácter determinista o aleatorio, se genera un vecindario de secuencias \mathbf{P}' de movimientos de piezas, mediante un 2-intercambio.

Para utilizar los procedimientos de resolución basados en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, es necesario que cualquier secuencia de movimientos **P** (de piezas) sea convertida en secuencia de movimientos **H** (de tanques visitados por una grúa), y así pueda ser tratada tal como se presentó en el capítulo anterior. La secuencia **P** se representará mediante las piezas transportadas, separadas por comas, entre corchetes: **P**=[3,2,1,1] por ejemplo. En cambio, la secuencia **H** equivalente se representará tal como se ha realizado hasta este momento: **H**=<0,4,3,1,2>, por ejemplo.

ESQUEMA DEL ALGORITMO HEURÍSTICO

Solución inicial (cota superior de TC, con una pieza por ciclo)

Determinar:

número máximo de piezas en el sistema por ciclo: n_{max} ;
posición inicial en el ciclo, de cada pieza $j=1, \dots, n_{max}$: **PI**(n_{max});
operaciones a realizar en un ciclo por cada pieza $j=1, \dots, n_{max}$: **OP**(n_{max}).

$n=n_{max}$

MIENTRAS no final ($n=1$ O nueva solución = 1)

PARA cada vector (dimensión n) de posiciones iniciales de piezas **PI** en un ciclo

Determinar secuencia de movimientos **P** sobre las piezas (primero, regular según los tiempos mínimos de ventanas temporales a_i , y en siguientes iteraciones, generada aleatoriamente sin ningún criterio de regularidad en el vector).

Determinar el vector de una secuencia de movimientos **H** de la grúa, asociada a dicha secuencia de movimientos **P**.

Evaluar si dicha secuencia es factible a priori, y en caso afirmativo, determinar el tiempo de ciclo.

Realizar 2-intercambio entre piezas de la secuencia de movimientos **P**. Para cada nuevo vector generado (diferente a los ya tratados):

Determinar la secuencia de movimientos **P** sobre las piezas.
Determinar la secuencia de movimientos **H** de grúa asociada.
Evaluar si dicha secuencia es factible a priori, y en caso afirmativo, determinar el tiempo de ciclo.

finPARA

SI alguna secuencia de movimientos **P** supone nueva solución
nueva solución = 1

SINO

Determinar:

nuevo número de piezas en el sistema por ciclo: $n=n-1$;

posición inicial en el ciclo, de cada pieza: $j=1, \dots, n$;

operaciones a realizar en un ciclo por cada pieza: $j=1, \dots, n$.

finSI

finMIENTRAS

6.3. Ejemplo ilustrativo

6.3.1. Descripción del problema 6.1

En este punto, para mostrar la aplicación del anterior esquema en el algoritmo heurístico se retoma el problema de tratamiento de piezas en una línea de producción, planteado en el capítulo 5. Se recuerda nuevamente los datos del ejemplo, donde cada pieza debe permanecer en la estación donde se realiza una operación durante un tiempo, medido en segundos, comprendido entre los valores mínimo y máximo de la tabla siguiente.

Operación	Lavado	Baño de sales	Secado	Recubrimiento
Tiempo mínimo	30	40	40	20
Tiempo máximo	50	60	50	60

Tabla 6.1. Datos del ejemplo 6.1.

El tiempo requerido por la grúa para recoger una pieza en una estación y depositarla en la estación destino es de 10 segundos. En vacío, la grúa tarda en recorrer el mismo trayecto 5 segundos.

A continuación, se aplicará dicho esquema de determinación de secuencias **H** de movimientos de tanques, a partir de secuencias **P** de movimientos de piezas.

6.3.2. Número máximo de piezas a inicio de ciclo

Aplicando la fórmula 6.1 a este caso, se obtiene el siguiente resultado:

$$n \leq \text{MIN} \left\{ \text{INT} \left[\frac{(10 * 5) + (50 + 60 + 50 + 60)}{(10 + 5) + (3 * (10 + 10)) + (10 + 5)} \right] + 1, 4 \right\} = \text{MIN} \left\{ \text{INT} \left[\frac{270}{90} \right] + 1, 4 \right\} = 4$$

Por lo tanto, el número máximo de piezas presentes en el sistema simultáneamente es de cuatro, que para esta situación coincide con el número máximo de baños.

Una vez más, se considera una secuencia disponible a priori, con una sola pieza en el sistema, lo que supone una cota de 205 unidades de tiempo. El algoritmo realizará una

exploración sobre otros vectores $OP_i(n)$ de operaciones partiendo de dicha cota superior para la duración de un ciclo de movimientos en el sistema.

6.3.3. Cuatro piezas a inicio de ciclo (n=4)

A continuación, se calcula el factor de tiempo mínimo por objeto, necesario para aplicar las ecuaciones 6.2 y 6.3. Dicha referencia supone una relajación del problema, al no tener en cuenta los tiempos de transporte de las piezas u objetos consumidos por la grúa.

$$\frac{\sum_{h=1}^m a_h}{n} = \frac{130}{4} = 32,5$$

Así, con este valor de tiempo mínimo en los baños por cada una de las piezas, para hallar la disposición inicial de las cuatro piezas en los baños a comienzo de un ciclo se determina la secuencia de valores múltiplos de 32,5. Por lo tanto, cada una de las cuatro piezas teóricamente debería situarse en aquel baño correspondiente al conjunto (0; 32,5; 65; 97,5), para que el cuarto objeto alcance los 130 segundos totales al finalizar su hipotética estancia en el baño 4, último baño de la línea.

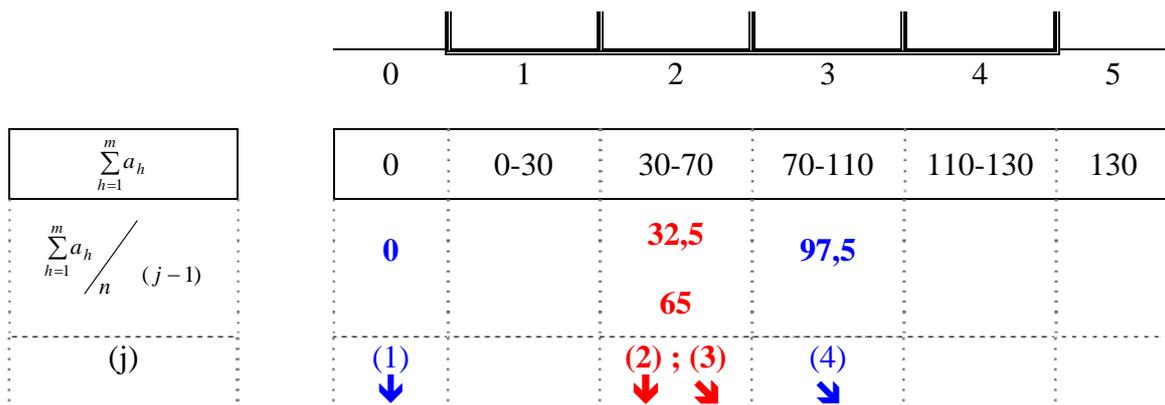


Figura 6.1. Representación gráfica de la determinación de las posiciones iniciales de piezas (n=4).

En la tabla siguiente 6.2, el resultado del procedimiento anterior queda reflejado en las posiciones iniciales para las cuatro piezas.

Tanque: (j)	0	1	2	3	4
Pieza: $PI(j)$	1		2	3	4

Tabla 6.2. Posición inicial en un ciclo para cada pieza en los tanques (n=4).

Por las hipótesis tomadas al inicio del estudio, que el movimiento de toma del objeto de la estación de carga, h_0 , se asigna automáticamente como primer movimiento, de referencia para la secuencia de movimientos cíclica, se considerará implícitamente que dicho movimiento queda asignado a la pieza 1 (véase la tabla 6.2). Por lo tanto, como resultado de esta hipótesis, el vector de posiciones iniciales de las 4 piezas $PI_i(n)$, pasa a convertirse en $PI_1(4)=[0,2,3,4]$, si se considera también la operación de movimiento entre la estación de carga y el primer baño, a ser:

$$\mathbf{PI}_1(4)=[1,2,3,4]$$

A su vez, esto implica que el número de operaciones por pieza $\mathbf{OP}_i(n)$ será:

$$\mathbf{OP}_1(4)=[1,1,1,1]$$

Se empieza tomando el número máximo de piezas simultáneas posibles, en este caso 4 piezas, con lo cual se obtiene el vector $\mathbf{OP}_1(4)$, presentado previamente. A partir de este vector $\mathbf{OP}_1(4)$, se intenta asignar la o las operaciones correspondientes a la última pieza del sistema (en este caso, la cuarta) a cualquiera de las otras primeras piezas (en este caso, las tres primeras piezas). Así se generan nuevos vectores $\mathbf{OP}_i(4)$ y sus respectivos vectores $\mathbf{PI}_i(4)$.

Tanto el vector inicial como los otros vectores, aparecen representados de forma arborescente en la figura 6.2.

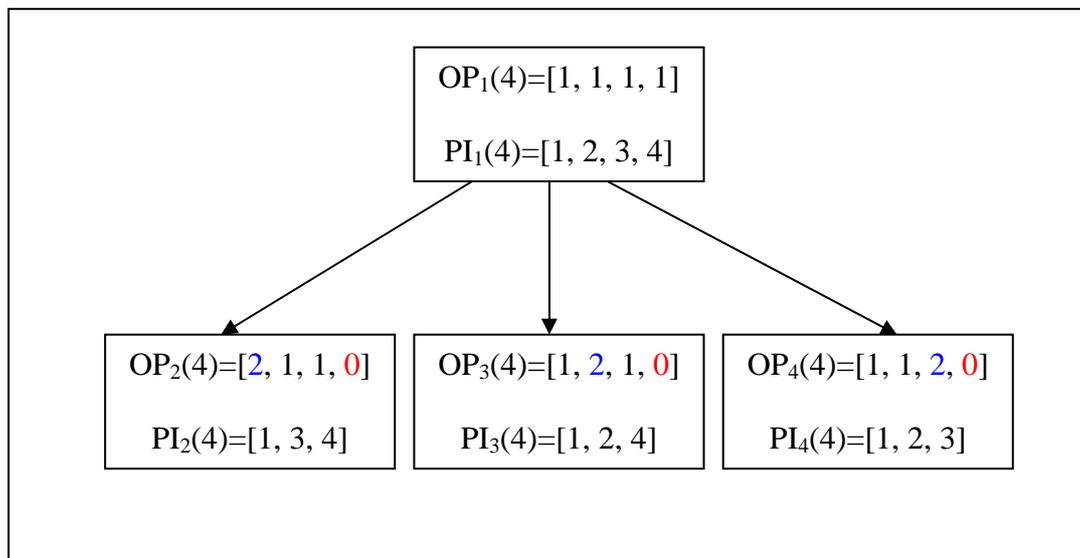


Figura 6.2. Generación de vectores $\mathbf{OP}_i(4)$ de operaciones por pieza a partir del vector $\mathbf{OP}_1(4)$.

En la figura 6.2, sólo se puede generar un **primer nivel del árbol** ya que la pieza 4, pieza asignada a los últimos tanques, sólo debe ser recogida por la grúa una sola vez según $\mathbf{OP}_1(4)$. Se ha indicado **en azul** la pieza receptora del movimiento, el cual pasa a añadirse a los que ya tenía asignados, y **en rojo**, la pieza 4 que “pierde” dicho movimiento en beneficio de las demás. Este hecho también comporta que en este primer nivel del árbol el vector de posiciones iniciales sólo cuente con tres combinaciones posibles.

Una vez determinado el vector $\mathbf{OP}_1(4)$, y disponiendo de sus vectores descendientes $\mathbf{OP}_i(4)$, es necesario establecer sus correspondientes secuencias \mathbf{P}_i de movimientos de piezas para evaluarlas. Estas secuencias, en principio, se pretende que sean bastante homogéneas o regulares en el reparto de piezas a lo largo de la secuencia.

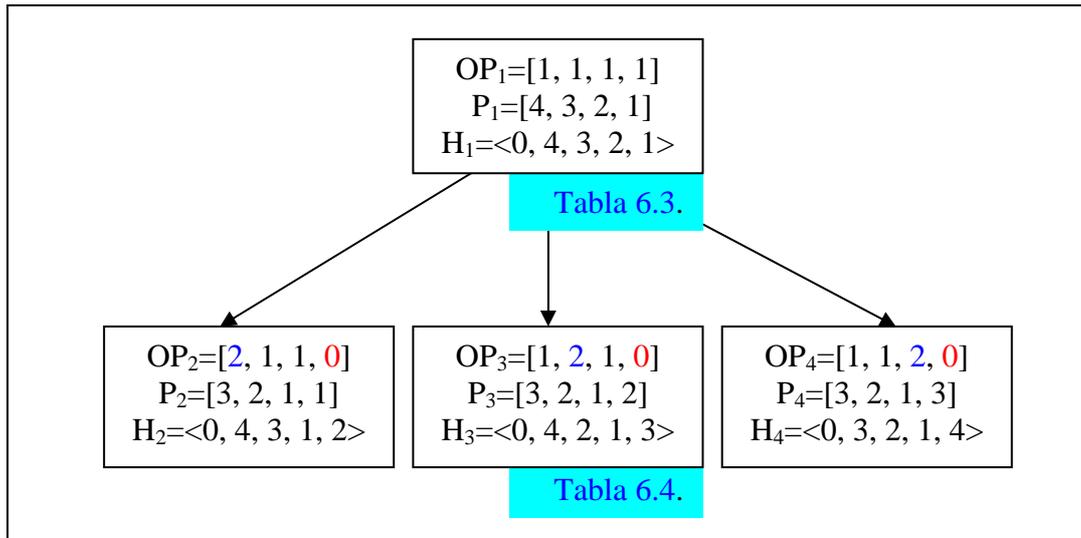


Figura 6.3. Generación de secuencias P_i de movimientos de piezas y H_i de movimientos de grúas, a partir de los vectores de operaciones por piezas OP_i , generados para $n=4$.

Para cada secuencia de movimientos de piezas P_i , se analizan diversas combinaciones del orden de piezas, todas ellas deterministas realizando un 2-intercambio a partir de la secuencia original. Así, para el vector $P_1(4)=[4,3,2,1]$ las secuencias P_i' obtenidas se encuentran en la tabla 6.3, donde las dos posiciones intercambiadas respecto $P_1(4)$ son por filas, la primera, y por columnas, la segunda.

intercambio posiciones	2		3		4	
	P_i'	H_i'	P_i'	H_i'	P_i'	H_i'
1	[3,4,2,1]	<0,3,4,2,1>	[2,3,4,1]	<0,2,3,4,1>	[1,3,2,4]	<0,1,3,2,4>
2			[4,2,3,1]	<0,4,2,3,1>	[4,1,2,3]	<0,4,1,2,3>
3					[4,3,1,2]	<0,4,3,1,2>

Tabla 6.3. Secuencias generadas mediante 2-intercambio sobre la secuencia $P_1(4)$.

Dada la saturación de la línea, cualquiera de las secuencias generadas intercambiando dos posiciones del vector $P_1(4)$ comporta que en el nuevo vector P_i' no se cumpla la hipótesis de acumular una pieza en cada baño. En la tabla 6.3 dichas secuencias se han representado de manera sombreada, indicando su infactibilidad. Estas secuencias de movimientos de piezas, que son infactibles, se descartan de antemano, antes de analizar el cumplimiento de las habituales restricciones de tiempos (para los baños y las grúas).

Por el contrario, si se toma el vector $P_3=[3,2,1,2]$, véase figura 6.3, e introduciendo el mismo tipo de intercambio, las secuencias P_i' obtenidas figuran en la tabla 6.4.

intercambio posiciones	2		3		4	
	P_i'	H_i'	P_i'	H_i'	P_i'	H_i'
1	[2,3,1,2]	<0,2,4,1,3>	[1,2,3,2]	<0,1,2,4,3>	[2,2,1,3]	<0,2,3,1,4>
2			[3,1,2,2]	<0,4,1,2,3>	[3,2,1,2]	
3					[3,2,2,1]	<0,4,2,3,1>

Tabla 6.4. Secuencias generadas mediante 2-intercambio sobre la secuencia $P_3(4)$.

En la anterior tabla 6.4, un intercambio tal como el de las posiciones 2 y 4 no supone en P_i' ninguna variación sobre la secuencia original P_i de movimientos de piezas, al estar en ambas posiciones la misma pieza. Este hecho se indica sombreando dicha secuencia P , con menor intensidad que en el caso infactible. En cambio, otras secuencias de piezas comportan secuencias H_i' de movimientos de la grúa infactibles, al no permitir que la hipótesis de ocupación única de los baños por piezas sea incumplida.

Posteriormente a la generación de las nuevas secuencias P_i' de movimientos de piezas, se permite establecer otras secuencias P_i' con carácter más aleatorio. Por tanto, algunas soluciones que podrían ser descartadas en casos con unas ventanas temporales de anchuras más heterogéneas también pueden ser evaluadas (así, se consideran también los tiempos máximos de las ventanas temporales en los baños).

Este mismo proceso, iniciado para el número máximo de piezas que según la aplicación de la fórmula 6.1 era cuatro, se repite disminuyendo de una en una el número de piezas n hasta llegar a una sola pieza, situación que implica alcanzar la solución inicialmente disponible.

6.3.4. Tres piezas a inicio de ciclo (n=3)

Al repetir el proceso descrito gráficamente en la figura 6.1 para el caso $n=3$, en primer lugar se debe calcular la parte proporcional de tiempo de estancia mínimo a_i para cada pieza. A continuación, conocida la disposición inicial en los baños de las tres piezas (tabla 6.5), el resultado de generación de nuevos vectores de posiciones se puede observar en la figura 6.4.

$$\frac{\sum_{h=1}^m a_h}{n} = \frac{130}{3} = 43,3$$

Así, con este valor de tiempo en los baños por pieza, una disposición inicial de los objetos en los baños a comienzo de un ciclo se puede relacionar con los valores múltiplos de 43,3, o sea el conjunto (0; 43,3; 86,6).

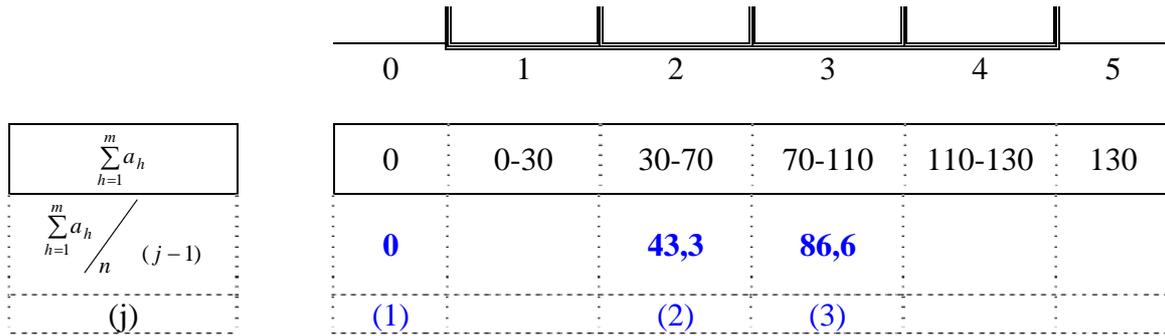


Figura 6.4. Representación gráfica de la determinación de las posiciones iniciales de piezas ($n=3$).

En la siguiente tabla 6.5, se presenta las posiciones iniciales para las tres piezas (en los baños de la línea 0, 2 y 3).

Tanque: (j)

Pieza: PI(j)

0	1	2	3	4
1		2	3	

Tabla 6.5. Posición inicial en un ciclo para cada pieza en los tanques ($n=3$).

Así, el vector de posiciones iniciales $PI_i(n)$, partiendo de 3 piezas, se corresponde con:

$$PI_1(3)=[1,2,3]$$

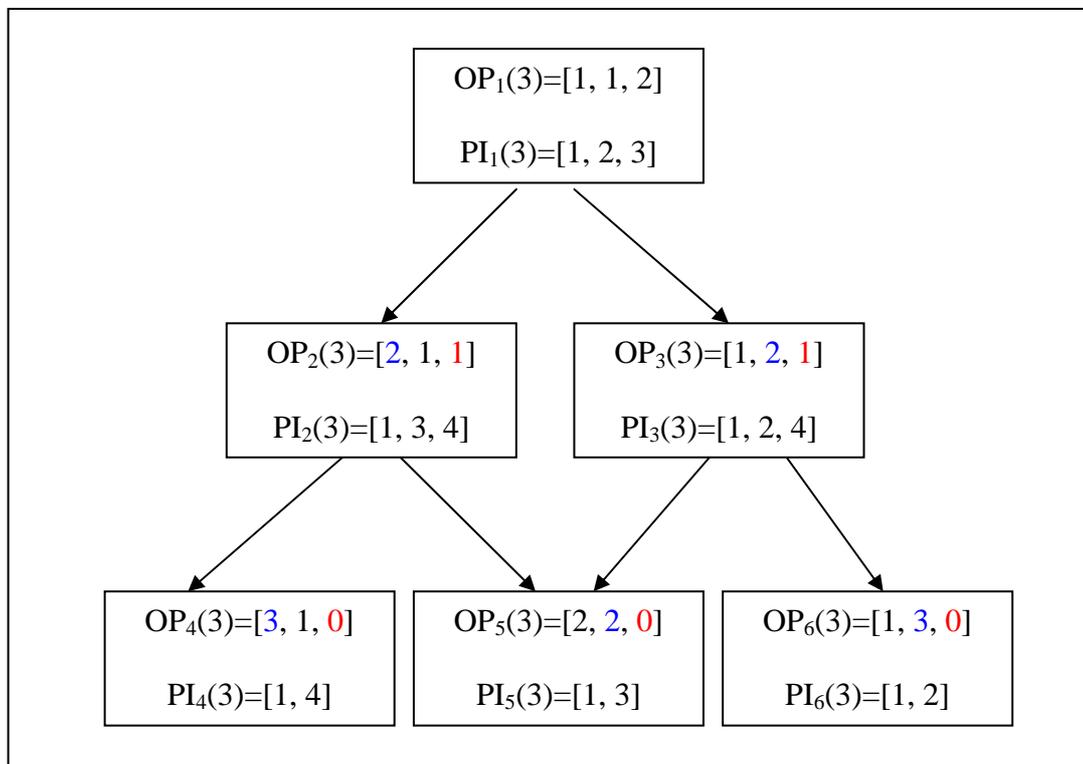


Figura 6.5. Generación de vectores $OP_i(3)$ de operaciones por pieza a partir del vector $OP_1(3)$.

Esto implica que el número de operaciones por pieza $OP_i(n)$ será:

$$OP_1(3)=[1,1,2]$$

En la figura 6.5 se generan **dos niveles del árbol** ya que la pieza 3, asignada a los últimos tanques, en $OP_1(3)$ debe ser recogida por la grúa dos veces (del baño 3 y del baño 4). Nuevamente, se indica **en azul** la pieza receptora del movimiento, el cual se suma a los ya asignados a dicha pieza, y **en rojo** la pieza 3, emisora de dicho movimiento en beneficio de las demás. Estas reasignaciones de movimientos comportan que el vector de posiciones iniciales $PI_i(3)$ tenga dos elementos en el primer nivel del árbol, y otros tres en el segundo.

Al haber determinado el vector $OP_1(3)$, ya es posible evaluar nuevas secuencias H_i' de movimientos de la grúa, para lo cual es necesario establecer la correspondiente secuencia P_i' de movimientos de piezas, para encontrar una bastante buena distribución en principio.

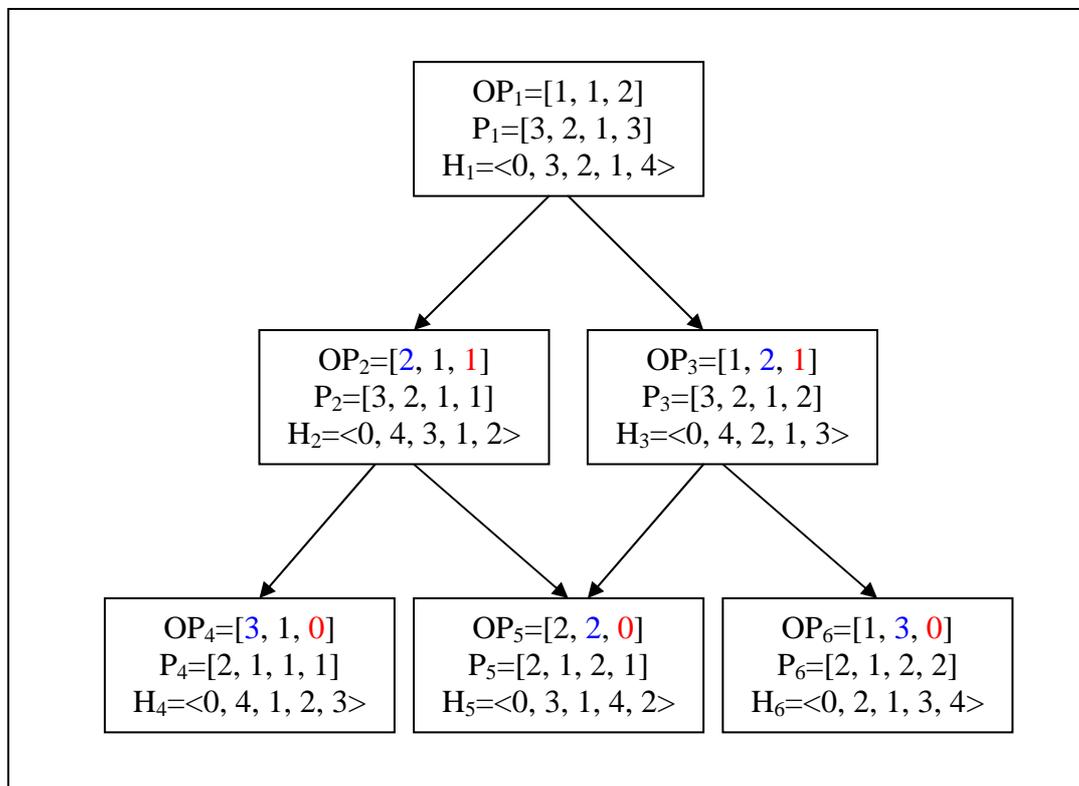


Figura 6.6. Generación de secuencias P_i de movimientos de piezas y H_i de movimientos de grúas, a partir de los vectores de operaciones por piezas OP_i ($n=3$).

Para cada secuencia de movimientos de piezas P_i , se analizan diversas combinaciones deterministas de sus valores mediante un 2-intercambio, de manera similar a como se hizo en las tablas 6.3 y 6.4.

6.3.5. Dos piezas a inicio de ciclo (n=2)

Una vez agotado el proceso de búsqueda de secuencias factibles de movimientos de grúa para n=3, con el objetivo de encontrar la que minimiza el tiempo ciclo, se repite para el caso n=2 el proceso ya aplicado anteriormente. Se calcula la parte proporcional de tiempo de estancia mínimo a_i para cada pieza, en principio. Luego, conocida la disposición inicial de las piezas en los baños (figura 6.7), se expone en la figura 6.8 el resultado de la exploración de las diversas secuencias.

$$\frac{\sum_{h=1}^m a_h}{n} = \frac{130}{2} = 65$$

Con el valor de tiempo de referencia en baños por cada pieza, una disposición inicial de éstas en los tanques a comienzo de un ciclo se puede basar en los múltiplos de 65,5, empezando por 0, cuyo conjunto está formado por (0; 65,5).

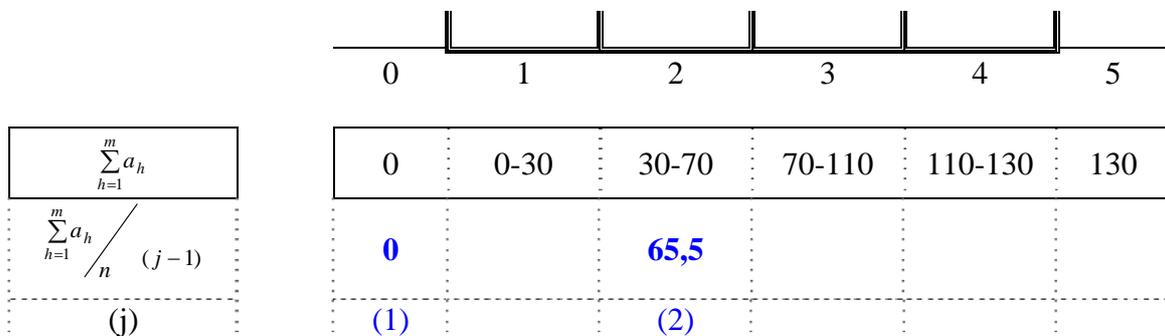


Figura 6.7. Representación gráfica de la determinación de las posiciones iniciales de piezas (n=2).

En la tabla 6.6, se observa las posiciones iniciales en los tanques 0 y 2 para las dos piezas.

Tanque	0	1	2	3	4
Pieza	1		2		

Tabla 6.6. Posición inicial en un ciclo para cada pieza en los tanques (n=2).

Así, el vector de posiciones iniciales $PI_i(n)$, de las 2 piezas, se corresponde con:

$$PI_1(2)=[1,2]$$

Esto supone que el número de operaciones por pieza $OP_i(n)$ será:

$$OP_1(2)=[1,3]$$

En la figura 6.8 se generan **tres niveles del árbol** ya que la pieza 2, asignada en el último tramo de los tanques, debe ser recogida por la grúa tres veces (de los baños 2, 3 y 4). Nuevamente, se indica **en azul** la pieza receptora del movimiento, y **en rojo** la pieza 2 emisora de dichos movimientos, en este caso sólo hacia la pieza 1. Esta particularidad se refleja en el esquema, ya que en cada nivel del árbol, el vector de posiciones iniciales

cuenta con una sola combinación posible. Respecto al nivel inmediatamente superior, sobre la primera pieza recae una operación más, y sobre la segunda, una operación menos.

En el tercer nivel generado en el árbol, la cantidad de piezas a inicio del ciclo es sólo una, lo cual supone haber alcanzado la solución básica de partida (cuando no se aprovechan los tiempos muertos de la grúa para realizar operaciones sobre más de una pieza, sino que la grúa se ocupa de una única en cada ciclo).

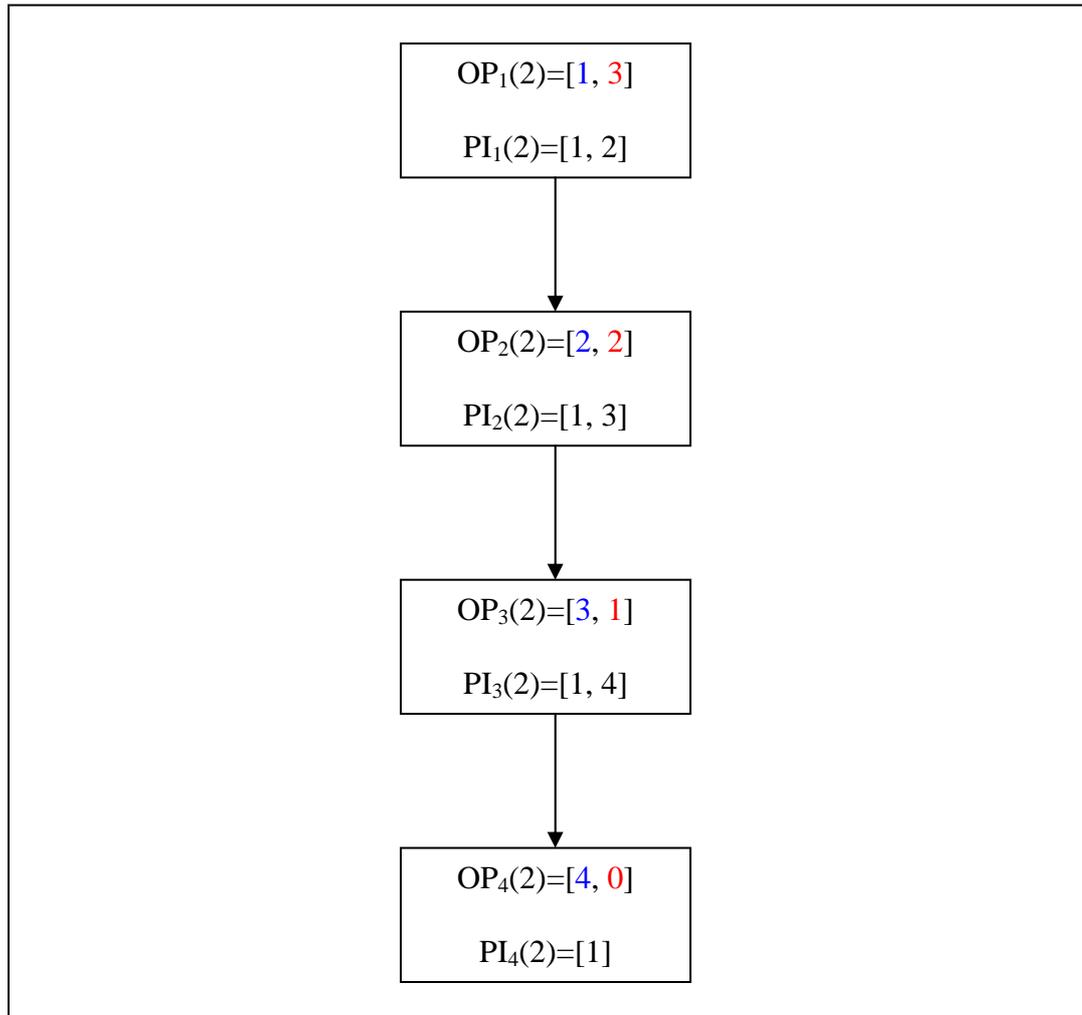


Figura 6.8. Generación de vectores $OP_i(2)$ de operaciones por pieza a partir del vector $OP_1(2)$.

En la figura 6.9, se encuentran los vectores de secuencias P_i , de movimientos de piezas, y H_i , de movimientos de la grúa, de los que se parte en cada vértice del árbol representado en la figura anterior 6.8.

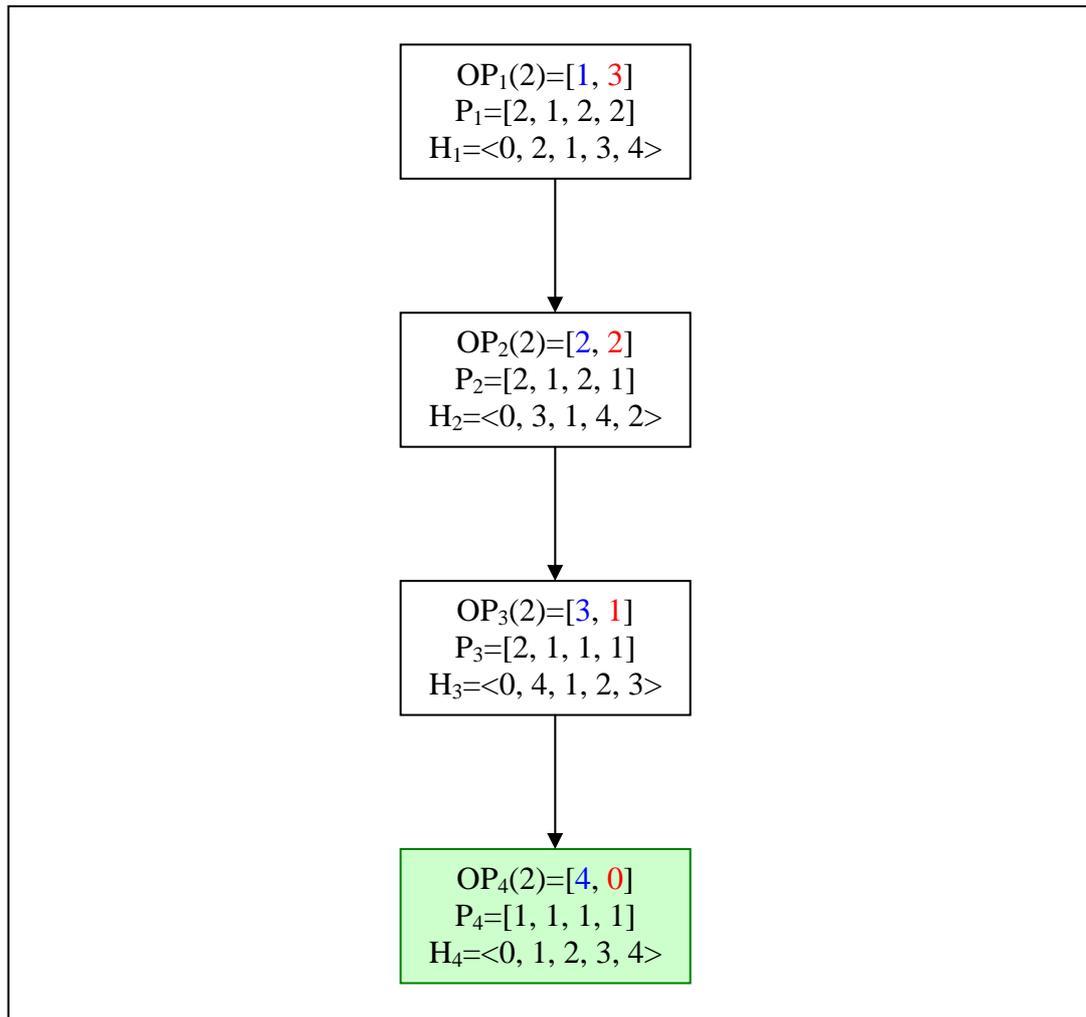


Figura 6.9. Generación de secuencias \mathbf{P}_i de movimientos de piezas y \mathbf{H}_i de movimientos de grúas, a partir de los vectores de operaciones por piezas \mathbf{OP}_i ($n=2$).

No obstante, dado que el objetivo de minimizar el tiempo de ciclo está inversamente relacionado con el número de objetos en el sistema durante un ciclo, al aplicar este procedimiento se busca un valor para n lo mayor posible. Por esta razón, el procedimiento parte del máximo número de piezas ($n=n_{\max}$) y va disminuyendo dicho valor n de manera progresivamente. Así, cuando el procedimiento alcanza una secuencia de movimientos de piezas y de grúa con valores factibles de acuerdo con las restricciones, acaba de explorar las secuencias con la misma cantidad de piezas y finaliza el procedimiento.

En este ejemplo, la solución óptima se corresponde con las secuencias de movimiento de piezas $\mathbf{P}=[2,3,1,2]$ y de movimientos de la grúa $\mathbf{H}=\langle 0,2,4,1,3 \rangle$, con un tiempo de ciclo óptimo de 105 segundos. Esta solución se obtiene al explorar el árbol de vectores $\mathbf{OP}_i(4)$ de operaciones por pieza, construido a partir del vector $\mathbf{OP}_1(4)$ en la figura 6.2.

Con los vectores $\mathbf{OP}_1(4)$ y $\mathbf{OP}_2(4)$ no se puede hallar ninguna solución factible. Sin embargo, al realizar la evaluación de secuencias generadas partiendo del vector de operaciones por pieza $\mathbf{OP}_3(4)$, se obtiene la secuencia óptima. Si bien la secuencia de

movimientos de piezas $P_3(4)=[3,2,1,2]$ resulta ser **infactible** al no cumplir la restricción de tiempo máximo en el baño 1, si se lleva cabo un intercambio entre las posiciones 1 y 2 del vector $P_2(4)$, se obtiene la secuencia de movimientos de piezas derivada, cuyos componentes son $P_2'(4)=[2,3,1,2]$, y dado el criterio de unicidad con la secuencia de movimientos de grúa, $H_2'(4)=\langle 0,2,4,1,3 \rangle$.

Como conclusión, al hallar una secuencia factible con 3 piezas en este ejemplo, aunque el carácter heurístico del algoritmo no permita asegurar su condición de óptimo, ya no es necesario continuar el análisis de secuencias de piezas como los planteados en el texto en las figuras 6.5 y 6.8.

6.4. Algoritmo general de aplicación del procedimiento heurístico

Retomando el algoritmo presentado en el capítulo anterior, en el apartado 5.2.4, e introduciendo las aportaciones presentadas especialmente en el apartado 6.2, el algoritmo general adaptado a este procedimiento heurístico, basado en el número de piezas tratadas por ciclo, adquiere un formato como el siguiente:

ALGORITMO PRINCIPAL

Inicialización de variables (H, T, TC, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime)

Lectura de datos de un ejemplar (m, A, B, E, F)

Secuencia inicial: $H=H^0$

$TC^*=LB(H^0)$; $T^*=T(H^0)$; $H^*=H^0$

iteracion=1

Determinar nmax (6.1)

$OP_1(nmax)$, $P=P_1(nmax)$, $H=H_1(nmax)$

MIENTRAS (no_condición_final (n,P,H,T,iteracion))

Crear tablas(m, H, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime, TC, A,B,E,F)

Analizar grafo (m, H, Gcycle, Gtime, T,TC, LB, UB)

SI (Primera prueba infactibilidad (ajuste de cotas))

Secuencia no factible

SINO

Resolver grafo (m, Gfrom, Gto, Gcycle, Gtime, H, T,TC, LB,UB)

finSI

Si ($TC \leq TC^*$)

$TC^*=TC$; $T^*=T$; $H^*=H$

finSI

Explorar vecindario (P, H, T, TC, n)
iteracion=iteracion+1

finMIENTRAS

La acción de *Explorar vecindario* implica, según el esquema del algoritmo descrito en el apartado 6.2:

- explorar una nueva secuencia de piezas P_{i+1} si anteriormente se ha explorado completamente la secuencia P_i ;
- realizar un 2-intercambio sobre la secuencia de piezas P_i entonces en exploración, para obtener secuencias de piezas P_i' ;
- crear secuencias de piezas con carácter aleatorio, partiendo de un determinado vector de operaciones por pieza OP_i .

7. EXPERIENCIA COMPUTACIONAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

7.1. Presentación y objetivos del capítulo

En este capítulo se presenta una experiencia computacional realizada sobre 540 ejemplares tipo, que han sido resueltos mediante dos tipos de procedimientos: la programación lineal y el método de tiempo de ciclo acotado. Además, la experiencia computacional se ha completado con 30 problemas tipo más y algunos otros problemas habituales en la literatura relacionada con el tema.

Los objetivos que se pretenden lograr en los siguientes apartados se pueden concentrar en los siguientes puntos:

- Analizar dos tipos diferentes de exploración en una estructura arborescente, para determinar cuál es más idóneo para aplicar un algoritmo exacto o heurístico basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.
- Analizar la eficiencia y validez del algoritmo de exploración arborescente basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.
- Proponer un procedimiento heurístico válido para aquellas situaciones con un número elevado de tanques, que permita alcanzar una solución aceptable, es decir, cercana al óptimo o incluso óptima.
- Resolver algunos ejemplares de problemas encontrados en la literatura, conocidos como *benchmarks*: el problema que aparece en el artículo de Phillips y Unger (1976); y ejemplares de los problemas que se encuentran en la página *web* sobre el tema, del grupo francés de trabajo Bermudes (<http://bermudes.univ-bpclermont.fr/>).

7.2. Descripción de la experiencia computacional básica de validación

En este apartado, se presenta las características de la primera parte de la experiencia computacional realizada. En total, se trata de 540 ejemplares que han sido resueltos mediante diversos procedimientos.

En primer lugar, se ha utilizado la programación lineal mediante el paquete de software CPLEX, optimizador matemático. Así, se dispone con total seguridad de la solución óptima para todos los ejemplares.

En segundo lugar, utilizando el grafo de Secuencia planteado en el capítulo 4, se han aplicado dos tipos de arborescencia y se ha estudiado cuál de los dos aportaba mejores resultados.

7.2.1. Clasificación de ventanas temporales

Para llevar a cabo una clasificación en las ventanas temporales, se ha considerado la relación entre el tiempo máximo de estancia en un baño respecto al tiempo mínimo necesario en dicho baño.

Se han establecido dos límites, que se sitúan cuando la ventana temporal valga la mitad del tiempo mínimo de remojo ($b_i - a_i = 0,5 a_i$) y cuando la ventana temporal valga el tiempo mínimo de remojo ($b_i - a_i = a_i$). Esto conlleva que las ventanas temporales en los baños puedan agruparse en tres tipos:

- **Ventana cerrada:** cuando el tiempo máximo de remojo no supera en 1,5 veces el tiempo mínimo de remojo en un baño.
- **Ventana semiabierta:** cuando el tiempo máximo de remojo supera en 1,5 veces el tiempo mínimo de remojo en un baño, y no lo duplica.
- **Ventana abierta:** cuando el tiempo máximo de remojo supera en 2 veces el tiempo mínimo de remojo en un baño.

La clasificación queda reflejada de manera más sintetizada en la tabla 7.1.

Tipo de ventana	Código	Intervalo
Ventana cerrada	VC	$b_i \leq 1.5 a_i$
Ventana semiabierta	VS	$1.5 a_i \leq b_i \leq 2 a_i$
Ventana abierta	VA	$b_i \geq 2 a_i$

Tabla 7.1. Definición de los tipos de ventanas temporales en los baños.

7.2.2. Tipos de velocidades de grúa

Una nueva clasificación, que afecta a la velocidad de desplazamiento de los puentes-grúa, considera la relación entre el tiempo de movimiento entre dos tanques determinados con carga respecto al tiempo para dicho movimiento sin carga.

Igualmente, se han establecido tres situaciones tomando como referencia la situación en que la grúa duplica su tiempo de viaje cuando va cargada respecto a cuando lo hace vacía ($f_i = 2 e_{i,i+1}$). Así, además de esta situación intermedia, se considera la situación de mayor facilidad de movimiento para la grúa, cuando al transportar carga no alcanza duplicar el tiempo de transporte en vacío ($f_i < 2 e_{i,i+1}$) y la situación de menor facilidad de movimiento para la grúa, cuando al transportar carga el tiempo de transporte sobrepasa el doble de aquél en vacío ($f_i > 2 e_{i,i+1}$). Esto conlleva que las grúas y sus movimientos puedan agruparse en tres tipos:

- **Grúa rápida:** cuando el tiempo de un movimiento de grúa con carga no supera en 2 veces el tiempo del mismo movimiento sin carga.
- **Grúa semi-rápida:** cuando el tiempo de un movimiento de grúa con carga es igual a 2 veces el tiempo del mismo movimiento sin carga.

- **Grúa lenta:** cuando el tiempo de un movimiento de grúa con carga supera en 2 veces el tiempo del mismo movimiento sin carga.

La clasificación se observa mucho más sintetizada en la tabla 7.2.

Tipo de grúa	Código	Intervalo
Grúa rápida	GR	$f_i < 2 e_{i,i+1}$
Grúa semi-rápida	GS	$f_i = 2 e_{i,i+1}$
Grúa lenta	GL	$f_i > 2 e_{i,i+1}$

Tabla 7.2. Definición de los tipos de movimientos de las grúas.

7.2.3. Experiencia computacional básica

La experiencia cuenta con 540 ejemplares, con un número de baños m uniforme comprendido entre 5 y 10, lo cual indica que 90 problemas son ejemplares con 5 baños, 90 con 6 baños, ... hasta llegar a 90 problemas con 10 baños.

Posteriormente, en la experiencia computacional 2 se tratarán los casos de problemas con más de 10 baños.

- Tomando como modelo la experiencia computacional de Ng (1996), el tiempo mínimo de las operaciones se ha generado aleatoriamente siguiendo una ley uniforme:

$$a_i = U [20 ; 80]$$

- A diferencia de Ng (1996), para determinar los intervalos para las ventanas temporales en los baños, se han agrupado los problemas según su tiempo máximo de operaciones respecto al tiempo mínimo, según la tabla 7.3:

Tipo de ventana	Código	Intervalo
Ventana cerrada	VC	$b_i = U [1,2 a_i; 1,5 a_i]$
Ventana semiabierta	VS	$b_i = U [1,5 a_i; 2 a_i]$
Ventana abierta	VA	$b_i = U [2 a_i; 10 a_i]$

Tabla 7.3. Definición de los tipos de ventanas temporales para la experiencia computacional 1.

- Nuevamente, tomando Ng (1996) como referencia, el tiempo mínimo de movimiento de la grúa sin carga entre dos estaciones consecutivas se ha fijado en 5, si bien el tiempo máximo para dicha operación de la grúa se ha establecido en 10, a diferencia de Ng (1996), que considera una mayor variabilidad:

$$e_{i,i+1} = U [5 ; 10]$$

- A diferencia de Ng (1996), que suma un valor constante para tomar y dejar un objeto sobre el tiempo provocado por cualquier velocidad de la grúa, se han agrupado los problemas según sea el tiempo adicional de carga y descarga para la grúa, según la tabla 7.4:

Tipo de grúa	Código	Intervalo
Grúa rápida	GR	$f_i = 1,5 e_{i,i+1}$
Grúa semi-rápida	GS	$f_i = 2 e_{i,i+1}$
Grúa lenta	GL	$f_i = 3 e_{i,i+1}$

Tabla 7.4. Definición de los tipos de movimientos de las grúas para la experiencia computacional 1.

Dado que existen 3 tipos de ventanas temporales referidas a los baños y 3 tipos de velocidades, esto comporta que resulten 9 tipologías diferentes de problemas a estudiar. Si en cada una de estas tipologías, se analizan diferentes números de baños m , comprendidos entre 5 y 10, se alcanzan los 54 problemas tipo. Finalmente, para cada bloque de problemas (según ventana, grúa y dimensión del proceso de la línea) se han generado 10 instancias diferentes. En resumen, esto supone un total de 540 ejemplares que se encuentran en el Anexo 1, y que han sido codificados según se expresa en la tabla 7.5.

Grúa	m	GR	GS	GL
Ventana VC	5	101-110	201-210	301-310
	6	111-120	211-220	311-320
	7	121-130	221-230	321-330
	8	131-140	231-240	331-340
	9	141-150	241-250	341-350
	10	151-160	251-260	351-360
Ventana VS	5	401-410	501-510	601-610
	6	411-420	511-520	611-620
	7	421-430	521-530	621-630
	8	431-440	531-540	631-640
	9	441-450	541-550	641-650
	10	451-460	551-560	651-660
Ventana VA	5	701-710	801-810	901-910
	6	711-720	811-820	911-920
	7	721-730	821-830	921-930
	8	731-740	831-840	931-940
	9	741-750	841-850	941-950
	10	751-760	851-860	951-970

Tabla 7.5. Tres dígitos iniciales en los códigos de los problemas de la experiencia computacional 1. Los dos últimos dígitos en el código (Anexo 1) corresponden al número de tanques del problema.

7.3. Determinación de las soluciones óptimas para la experiencia computacional básica

A partir del modelo planteado por Phillips y Unger (1976), basado en la programación lineal entera mixta, se ha desarrollado un modelo original en el que se reduce el número de variables y de restricciones. Cabe recordar que el modelo inicial ya fue detallado en el capítulo 3.

7.3.1. Variables

De las variables que los autores proponían, se mantienen las siguientes:

t_i = instante en el cual se extrae un contenedor del tanque i ($i=0,1,\dots,m$)

Siempre se considera como referencia $t_0 = 0$. Dado que a_i , b_i , f_i y $e_{i,j}$ son valores enteros, no se fuerza a que las restantes variables t_i sean enteras.

TC = variable que indica el tiempo de ciclo del conjunto de operaciones a realizar por la grúa.

Equivale a la variable del modelo original llamada *tmax*.

$y_{i,j}$ = variables binarias ($i=1, \dots, m-1; j=i+1, \dots, m$) que, a diferencia del modelo original, valen:

1 si $t_i < t_j$, es decir, si se extrae antes el contenedor del tanque i que del tanque j en la secuencia de acciones de la grúa en un ciclo;

0 si $t_i > t_j$, es decir, si se extrae antes el contenedor del tanque j que del tanque i en la secuencia de acciones de la grúa en un ciclo.

Finalmente, se ha prescindido de las variables binarias $z(i)$.

El número total de variables es de:

$\text{Nº variables} = 1 + m + [(m-1)m/2] = m^2/2 + m/2 + 1$
--

7.3.2. Reformulación de las restricciones

En este caso, dado que se cuenta con algunas variables menos, ha sido necesario que en algunas restricciones que se mantienen se incorporen algunos retoques, por ejemplo cambios de signo; otras restricciones se han podido suprimir, y finalmente, algunas otras son necesarias por coherencia con el resto del modelo.

- Restricciones de procesos monociclo

Las restricciones en este capítulo referidas como 7.1 y 7.2 se corresponden con la restricción 3.6 para el caso de cumplir con el tiempo mínimo, inicialmente del tipo 2, y la restricción 3.10 para cumplir con el tiempo máximo, encuadrada en el tipo 3 original, respectivamente.

$$t_{i+1} - t_i \geq f_i + a_{i+1} - M \cdot (1 - y_{i,i+1}) \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (7.1)$$

$$t_{i+1} - t_i \leq f_i + b_{i+1} + M \cdot (1 - y_{i,i+1}) \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (7.2)$$

- Restricciones de procesos bicicleta

Las restricciones en este capítulo referidas como 7.3 y 7.4 corresponden a la restricción 3.8 para cumplir con el tiempo mínimo y la restricción 3.9 para no exceder el tiempo máximo, respectivamente, ambas pertenecientes al tipo 3 en el modelo original.

$$t_{i+1} - (t_i - TC) \geq f_i + a_{i+1} - M \cdot y_{i,i+1} \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (7.3)$$

$$t_{i+1} - (t_i - TC) \leq f_i + b_{i+1} + M \cdot y_{i,i+1} \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (7.4)$$

- Restricciones de movimientos internos de ciclo

Las restricciones, a continuación con referencias 7.5 y 7.6, equivalen a la restricción 3.5 y a la restricción 3.7 respectivamente, para considerar los tiempos de movimiento de las grúas, ambas pertenecientes al tipo 2 en el modelo inicial.

$$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j} - M \cdot (1 - y_{i,j}) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m-2 \\ j = i+2, \dots, m \end{array} \quad (7.5)$$

$$t_j - t_i \geq f_i + e_{i+1,j} + M \cdot y_{j,i} \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, m \\ j = 1, \dots, m-1 \end{array} \quad (7.6)$$

- Restricciones de movimientos interciclos

La restricción referida como 7.7 equivale a las restricciones del tipo 1, señaladas en el modelo inicial como 3.2, 3.3 y 3.4.

$$t_i + f_i + e_{i+1,0} \leq TC \quad i = 1, \dots, m \quad (7.7)$$

- Restricciones de inicio de ciclo (tanque 1 y primer tanque a visitar)

La restricción 7.8 sirve para tomar como referencia, para el resto de movimientos, al primer tanque del cual se extraiga un objeto. Las restricciones 7.9 y 7.10 garantizan el cumplimiento de la ventana temporal para el tanque número 1.

$$t_i \geq f_0 + e_{0,i} \quad i = 2, \dots, m \quad (7.8)$$

$$t_1 \geq f_0 + a_1 \quad (7.9)$$

$$t_1 \leq f_0 + b_1 \quad (7.10)$$

El número total de restricciones es de:

$N^{\circ} \text{ restricciones} = (m+1) + m + 3(m-1) + [2 \cdot m \cdot (m-1)/2] = m^2 + 4m - 2$

7.3.3. Función objetivo

La función objetivo queda simplificada a minimizar el tiempo total de duración del ciclo:

$$[\text{MIN}] TC \quad (7.11)$$

7.3.4. Ejemplo: el problema 11406

Para resolver este tipo de problema se ha utilizado el sistema GAMS (*General Algebraic Modeling System*), sistema de modelización de alto nivel para problemas de programación matemática. GAMS consta de un compilador del lenguaje GAMS, y un conjunto de optimizadores matemáticos de gran rendimiento que se integran en el propio sistema. La gran ventaja de este sistema es la forma muy compacta y natural de modelizar problemas de programación matemática. En este trabajo se ha utilizado la versión 2.50A para el sistema operativo UNIX/SOLARIS.

El optimizador utilizado es la versión 6.0.1 para UNIX del optimizador CPLEX. En el sistema GAMS, el optimizador se encarga realmente de resolver el programa lineal una vez el modelo ha sido compilado en lenguaje GAMS.

A continuación, se detalla el modelo introducido en el optimizador matemático CPLEX para un ejemplar que está formado por 6 baños (ejemplar de código: *11406*).

El conjunto de variables i , de tiempos de extracción de los objetos de los tanques, y el conjunto de variables j , con variables binarias que determinan la secuenciación de movimientos para la grúa, han sido dimensionadas para el máximo número posible de tanques de esta experiencia computacional, o sea 10.

```

file sol/pl114.txt/;
put sol;
sol.nj=2;
sol.nd=0;

set i /ta1*ta10/;
set j /ya12*ya910/;

variables t(i);
variables tc;
binary variables y(j);

equations

R605, R606, R607, R608, R609, R610, R611, R612, R613,
R614, R615, R616, R617, R618, R619, R620, R621, R622,
R623, R624, R625, R626, R627, R628, R629, R630, R631,
R632, R633, R634, R635, R636, R637, R638, R639, R640,
R641, R642, R643, R644, R645, R646, R647, R648, R649,
R650, R651, R652, R653, R654, R655, R656, R657, R658,
R659, R660, R661, R662;

R605.. t('TA1') =g= 57 ;
R606.. t('TA1') =l= 121 ;
R607.. t('TA2') =g= 12 ;
R608.. t('TA3') =g= 17 ;
R609.. t('TA4') =g= 22 ;
R610.. t('TA5') =g= 27 ;
R611.. t('TA6') =g= 32 ;

```

R612.. $t_c - t('TA1') = g = 17 ;$
R613.. $t_c - t('TA2') = g = 22 ;$
R614.. $t_c - t('TA3') = g = 27 ;$
R615.. $t_c - t('TA4') = g = 32 ;$
R616.. $t_c - t('TA5') = g = 37 ;$
R617.. $t_c - t('TA6') = g = 42 ;$

R618.. $t('TA2') - t('TA1') - 1000 y('YA12') = g = -947 ;$
R619.. $t('TA2') - t('TA1') + 1000*y('YA12') = l = 1110 ;$
R620.. $t('TA1') - t('TA2') + 1000*y('YA12') = g = 17 ;$
R621.. $t('TA3') - t('TA2') - 1000 y('YA23') = g = -953 ;$
R622.. $t('TA3') - t('TA2') + 1000*y('YA23') = l = 1096 ;$
R623.. $t('TA2') - t('TA3') + 1000*y('YA23') = g = 17 ;$
R624.. $t('TA4') - t('TA3') - 1000 y('YA34') = g = -940 ;$
R625.. $t('TA4') - t('TA3') + 1000*y('YA34') = l = 1135 ;$
R626.. $t('TA3') - t('TA4') + 1000*y('YA34') = g = 17 ;$
R627.. $t('TA5') - t('TA4') - 1000 y('YA45') = g = -967 ;$
R628.. $t('TA5') - t('TA4') + 1000*y('YA45') = l = 1068 ;$
R629.. $t('TA4') - t('TA5') + 1000*y('YA45') = g = 17 ;$
R630.. $t('TA6') - t('TA5') - 1000 y('YA56') = g = -939 ;$
R631.. $t('TA6') - t('TA5') + 1000*y('YA56') = l = 1132 ;$
R632.. $t('TA5') - t('TA6') + 1000*y('YA56') = g = 32 ;$

R633.. $t('TA2') - t('TA1') + t_c + 1000*y('YA12') = g = 53 ;$
R634.. $t('TA2') - t('TA1') + t_c - 1000*y('YA12') = l = 110 ;$
R635.. $t('TA3') - t('TA2') + t_c + 1000*y('YA23') = g = 47 ;$
R636.. $t('TA3') - t('TA2') + t_c - 1000*y('YA23') = l = 96 ;$
R637.. $t('TA4') - t('TA3') + t_c + 1000*y('YA34') = g = 60 ;$
R638.. $t('TA4') - t('TA3') + t_c - 1000*y('YA34') = l = 135 ;$
R639.. $t('TA5') - t('TA4') + t_c + 1000*y('YA45') = g = 33 ;$
R640.. $t('TA5') - t('TA4') + t_c - 1000*y('YA45') = l = 68 ;$
R641.. $t('TA6') - t('TA5') + t_c + 1000*y('YA56') = g = 61 ;$
R642.. $t('TA6') - t('TA5') + t_c - 1000*y('YA56') = l = 132 ;$

R643.. $t('TA1') - t('TA3') - 1000*y('YA13') = g = -988 ;$
R644.. $t('TA1') - t('TA3') + 1000*y('YA13') = g = 22 ;$
R645.. $t('TA1') - t('TA4') - 1000*y('YA14') = g = -983 ;$
R646.. $t('TA1') - t('TA4') + 1000*y('YA14') = g = 27 ;$
R647.. $t('TA1') - t('TA5') - 1000*y('YA15') = g = -978 ;$
R648.. $t('TA1') - t('TA5') + 1000*y('YA15') = g = 32 ;$
R649.. $t('TA1') - t('TA6') - 1000*y('YA16') = g = -973 ;$
R650.. $t('TA1') - t('TA6') + 1000*y('YA16') = g = 37 ;$
R651.. $t('TA2') - t('TA4') - 1000*y('YA24') = g = -988 ;$
R652.. $t('TA2') - t('TA4') + 1000*y('YA24') = g = 22 ;$
R653.. $t('TA2') - t('TA5') - 1000*y('YA25') = g = -983 ;$
R654.. $t('TA2') - t('TA5') + 1000*y('YA25') = g = 27 ;$
R655.. $t('TA2') - t('TA6') - 1000*y('YA26') = g = -978 ;$
R656.. $t('TA2') - t('TA6') + 1000*y('YA26') = g = 32 ;$
R657.. $t('TA3') - t('TA5') - 1000*y('YA35') = g = -988 ;$
R658.. $t('TA3') - t('TA5') + 1000*y('YA35') = g = 22 ;$
R659.. $t('TA3') - t('TA6') - 1000*y('YA36') = g = -983 ;$
R660.. $t('TA3') - t('TA6') + 1000*y('YA36') = g = 27 ;$
R661.. $t('TA4') - t('TA6') - 1000*y('YA46') = g = -988 ;$
R662.. $t('TA4') - t('TA6') + 1000*y('YA46') = g = 22 ;$

```

MODEL P1146 /
R605, R606, R607, R608, R609, R610, R611, R612, R613,
R614, R615, R616, R617, R618, R619, R620, R621, R622,
R623, R624, R625, R626, R627, R628, R629, R630, R631,
R632, R633, R634, R635, R636, R637, R638, R639, R640,
R641, R642, R643, R644, R645, R646, R647, R648, R649,
R650, R651, R652, R653, R654, R655, R656, R657, R658,
R659, R660, R661, R662 /;

P1146.OPTCR=0; *

SOLVE P1146 USING MIP MINIMIZING TC;

```

Para este ejemplar (11406), la solución óptima, tal como la facilita el mismo optimizador, es la siguiente:

```

P1146
Número de tanques=6
TC=137
ta1    ta2    ta3    ta4    ta5    ta6    ta7    ta8    ta9    ta10
98     14     110   33     66     45     0      0      0      0

```

Los resultados completos de esta parte de la experiencia computacional se hallan en el Anexo 2.

A partir de los resultados de las secuencias óptimas de movimientos de la grúa para los 540 ejemplares, distribuidos en 9 series, se ha estudiado la relación entre los parámetros iniciales (como número de tanques) y algunos aspectos de los resultados alcanzados. En la figura 7.1, dado un número de tanques o baños m , se muestra su influencia sobre el número medio de piezas u objetos simultáneos que puede tratar la grúa en un ciclo de trabajo. Se representan las nueve series de ejemplares (S1, ..., S9), según los tres posibles tamaños de la ventana y las tres posibles velocidades de la grúa.

* Para alcanzar la solución óptima, ha sido necesario modificar la tolerancia por defecto (10%) asignándole un valor de 0%.

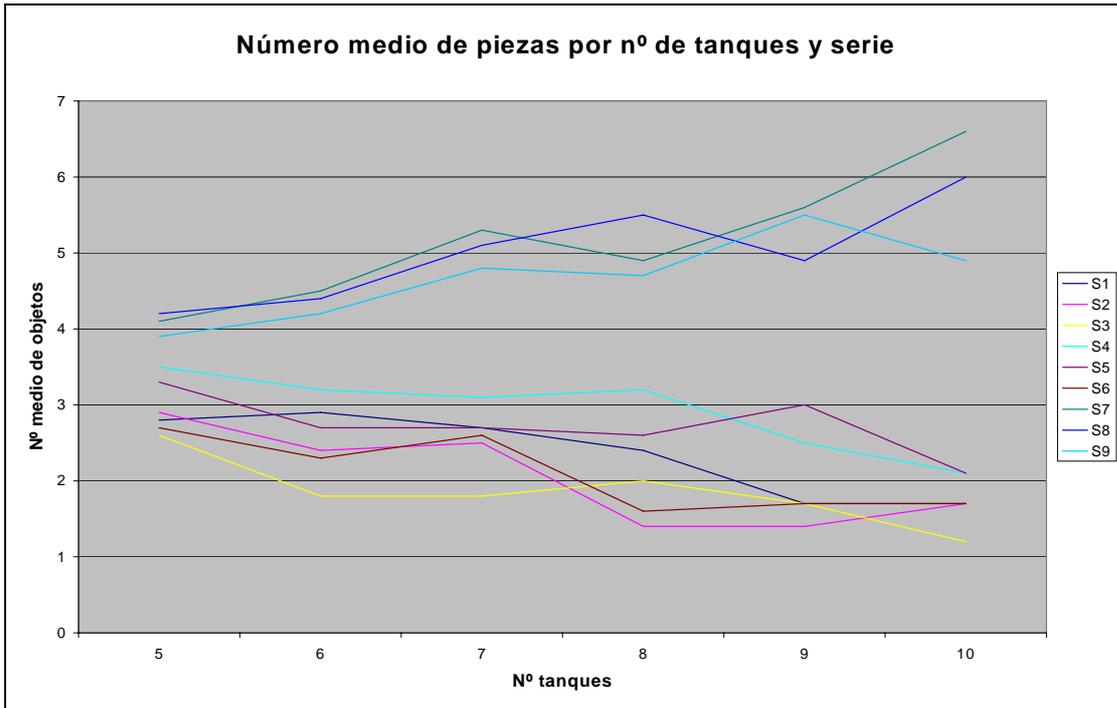


Figura 7.1. Número medio de objetos por ciclo según el número de tanques y la serie de datos (según la ventana temporal y velocidad de la grúa).

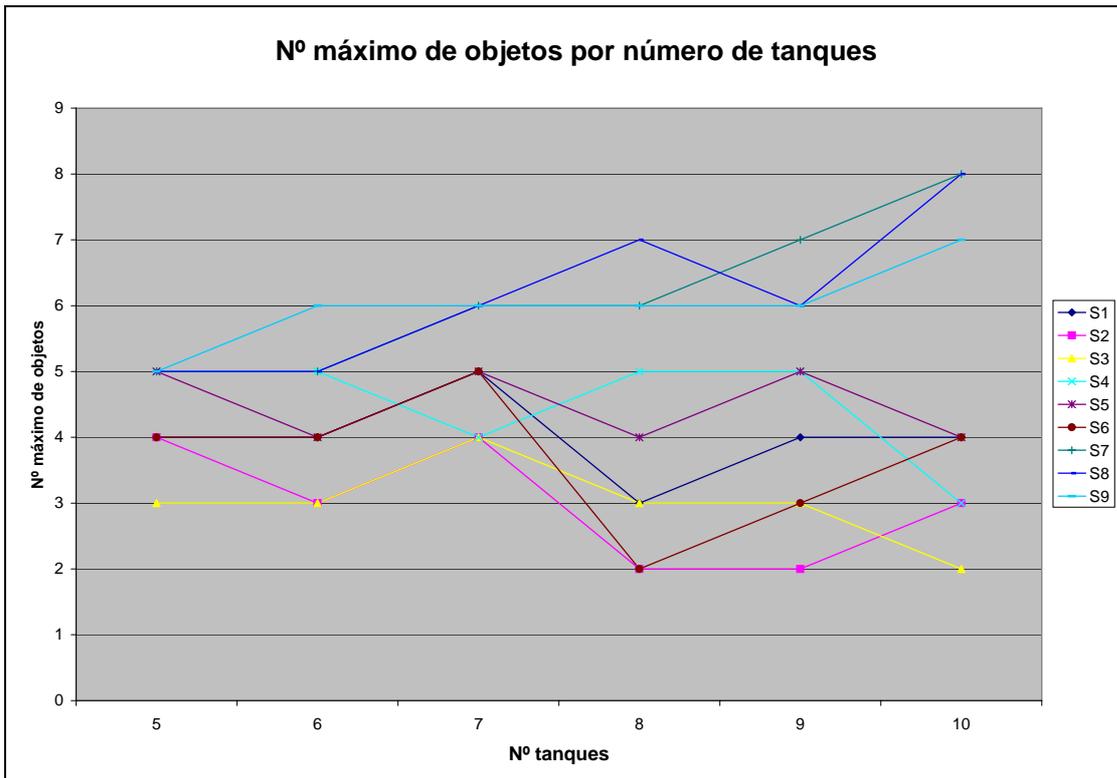


Figura 7.2. Número máximo de objetos por ciclo según el número de tanques y la serie de datos (según la ventana temporal y velocidad de la grúa).

7.3.5. Ventana Temporal Media y Trabajos Durante Permanencia

Finalmente, se observa la relación entre el número máximo de objetos simultáneamente en la línea respecto a dos características determinadas por los parámetros de los problemas:

- **Ventana Temporal Media (VTM).** Se define la Ventana Temporal Media de un ejemplar como la media de las ventanas temporales (tiempo máximo menos tiempo mínimo) de todos sus tanques o baños:

$$VTM = \frac{\sum_{i=1}^m (b_i - a_i)}{m} \quad (7.12)$$

- **Trabajos Durante la Permanencia (TDP).** Se define la cantidad de Trabajos Durante la Permanencia como el número de veces, por tanto baños, a que se puede desplazar la grúa durante su estancia media en un baño. Por tanto, la Ventana Temporal Media (el tiempo durante el cual una operación se está desarrollando) se divide entre la media de los tiempos mínimos para que la grúa se pueda desplazar y realizar otras operaciones:

$$TDP = \frac{VTM}{\sum_{i=1}^m (f_i + e_{i,i+1}) / m} \quad (7.13)$$

En las figuras 7.3 y 7.4 se representa la relación (para los resultados óptimos de los 540 ejemplares) entre estos dos parámetros, VTM y TDP, y el número óptimo de objetos simultáneos tratados por la grúa en un ciclo.

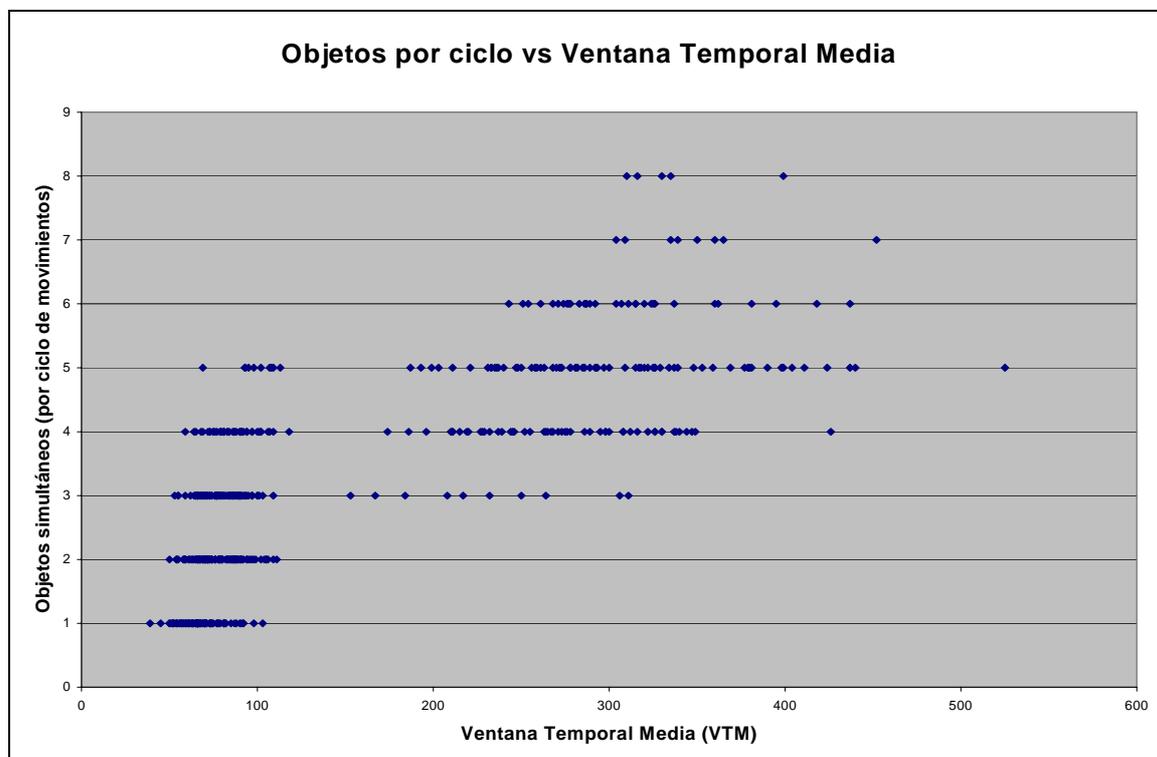


Figura 7.3. Número óptimo de objetos por ciclo según la Ventana Temporal Media (540 ejemplares).

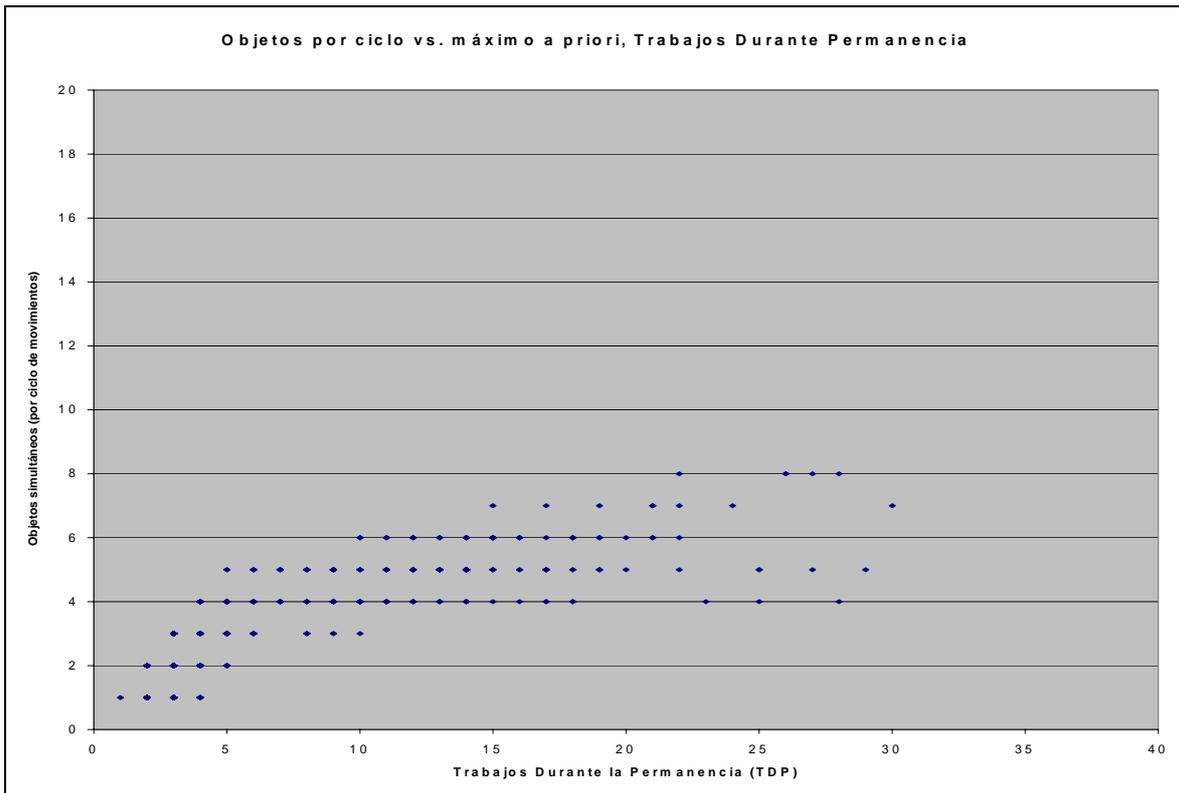


Figura 7.4. Número óptimo de objetos por ciclo según los Trabajos Durante la Permanencia (540 ejemplares).

7.4. Aplicación de un algoritmo arborescente sobre el grafo Secuencial

7.4.1. Características de los algoritmos de exploración sobre el grafo Secuencial

En el presente apartado, se analiza mediante los 540 ejemplares presentados en el apartado 7.2 la elección de un procedimiento de *branch and bound* las bases del cual se han presentado en el capítulo 4. El algoritmo que lo aplica puede basarse:

- en los principios de un *branch and bound* mediante tiempos (BBt), con la secuenciación de movimientos de traslado de objetos en el ciclo, simulando su posterior ejecución, tal como la que plantea Lomnicki (1965) para la resolución exacta del problema de *flow-shop* del taller mecánico,
- o en los principios de un *branch and bound* mediante baños o tanques (BBb), con la inclusión de baños a medida que se alcanzan niveles superiores del árbol, siguiendo el modelo propuesto por Shapiro y Nuttle (1988).

Una vez recordados los dos tipos de árboles analizados, éstos se pueden recorrer en busca de la secuencia óptima de movimientos de un ciclo de diversas formas. Así, en este caso, se proponen tres tipos de exploración:

1. Exploración en profundidad: Selecciona entre los vértices abiertos del árbol en el nivel más avanzado aquel vértice con una cota más prometedora de sus vértices descendientes, es decir, el vértice con menor cota del nivel superior del árbol con vértices abiertos.
2. Exploración en anchura: Selecciona entre los vértices abiertos del árbol en cualquier nivel aquel vértice con una cota más prometedora de sus vértices descendientes; en definitiva, el vértice con menor cota de los vértices abiertos en un momento dado.
3. Exploración de máxima ocupación: Selecciona entre los vértices abiertos del árbol en el nivel más avanzado aquel vértice con un tanque más avanzado en la última posición de la secuencia a construir para que los demás tanques puedan ser ocupados por otras piezas y maximizar la ocupación global del sistema.

De la aplicación de ambos tipos de algoritmos, dada la gran cantidad de información (secuencia de movimientos de la grúa y temporización de los movimientos) y que no siempre se pueda asegurar su optimalidad, se ha optado por mantener en el Anexo 3 los siguientes resultados, para cada tipo de arborescencia y exploración:

- Tiempos de ciclo.
- Número de evaluaciones realizadas, o sea, número de grafos resueltos.
- Número máximo de vértices abiertos, o sea, tamaño máximo de la lista.

Finalmente, es necesario señalar que la lista de vértices abiertos se ha limitado a un tamaño máximo de 200 elementos, lo que supone realizar en determinadas ocasiones una purga de elementos de la lista con menos posibilidades de conducir a la solución óptima, para que no se sobrepase dicho valor.

7.4.2. Resultados de la experiencia computacional básica utilizando el grafo Secuencial

A continuación, se analizan los resultados obtenidos por series de ejemplares:

- **S1**, corresponde a ejemplares con Ventanas Cerradas y Grúa Rápida (VC/GR);
- **S2**, corresponde a ejemplares con Ventanas Cerradas y Grúa Semi-rápida (VC/GS);
- hasta **S9**, correspondiente a ejemplares con Ventanas Abiertas y Grúa Lenta (VA/GL).

En primer lugar, en la tabla 7.6, en cada fila se introducen los resultados de cada una de las 9 series de ejemplares, mientras que en cada una de las respectivas 6 columnas se indica el número de secuencias óptimas obtenidas sobre un total de 60 ejemplares por secuencia, para los dos tipos de variantes de algoritmo, según su estructura en árbol, y los tres tipos de exploración descritos, determinación del siguiente vértice a expandir.

Serie	ventana / grúa	BBb Exp1	BBb Exp2	BBb Exp3	BBt Exp1	BBt Exp2	BBt Exp3
S1	VC / GR	57	56	55	58	32	56
S2	VC / GS	60	60	60	60	39	58
S3	VC / GL	57	58	58	60	36	60
S4	VS / GR	60	54	59	57	26	55
S5	VS / GS	59	54	59	60	27	55
S6	VS / GL	60	60	60	58	35	57
S7	VA / GR	59	38	56	29	21	51
S8	VA / GS	59	37	59	39	26	56
S9	VA / GL	59	34	58	39	20	52

Tabla 7.6. Número de tiempos de ciclo óptimos hallados (por grupo de 60 ejemplares).

Si se pretende analizar el número de secuencias exploradas o evaluadas para llegar a los resultados siguiendo el mismo esquema, se ha creído conveniente observar su evolución en función del número de tanques en la secuencia, tal como se observa en la figura 7.5.

En la figura 7.6 se sigue el mismo criterio para analizar el tamaño máximo de la lista que se ha logrado en algún momento de aplicación del algoritmo.

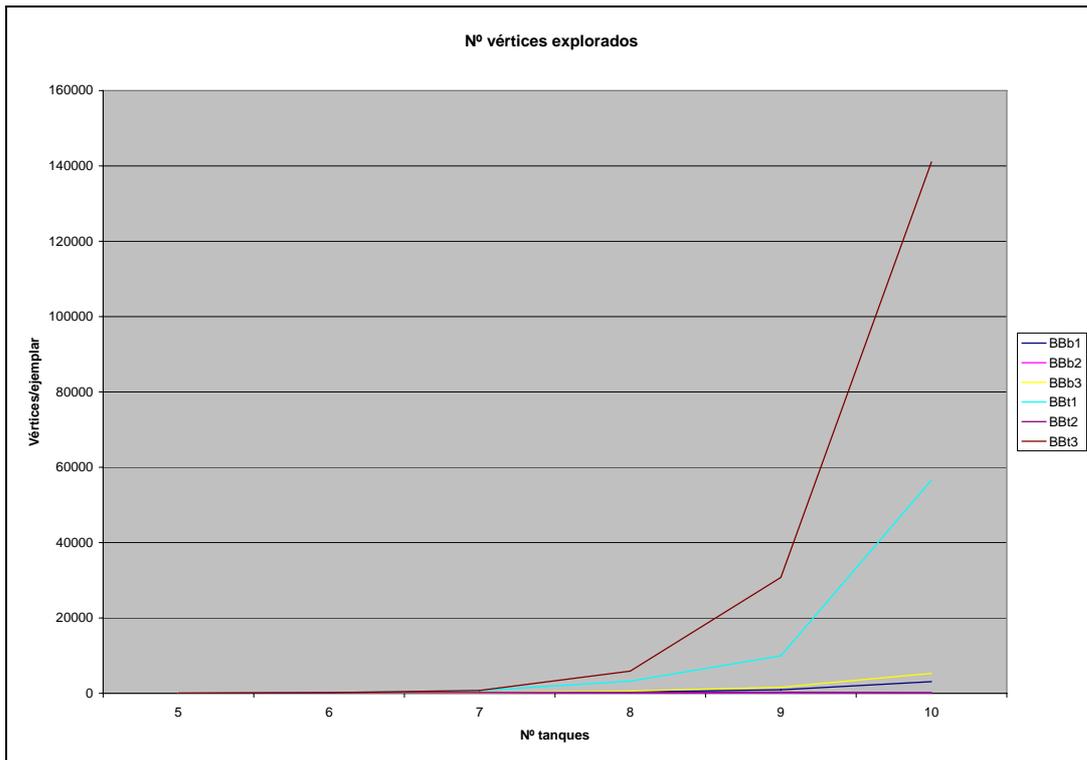


Figura 7.5. Número de vértices explorados (secuencias o subsecuencias evaluadas).

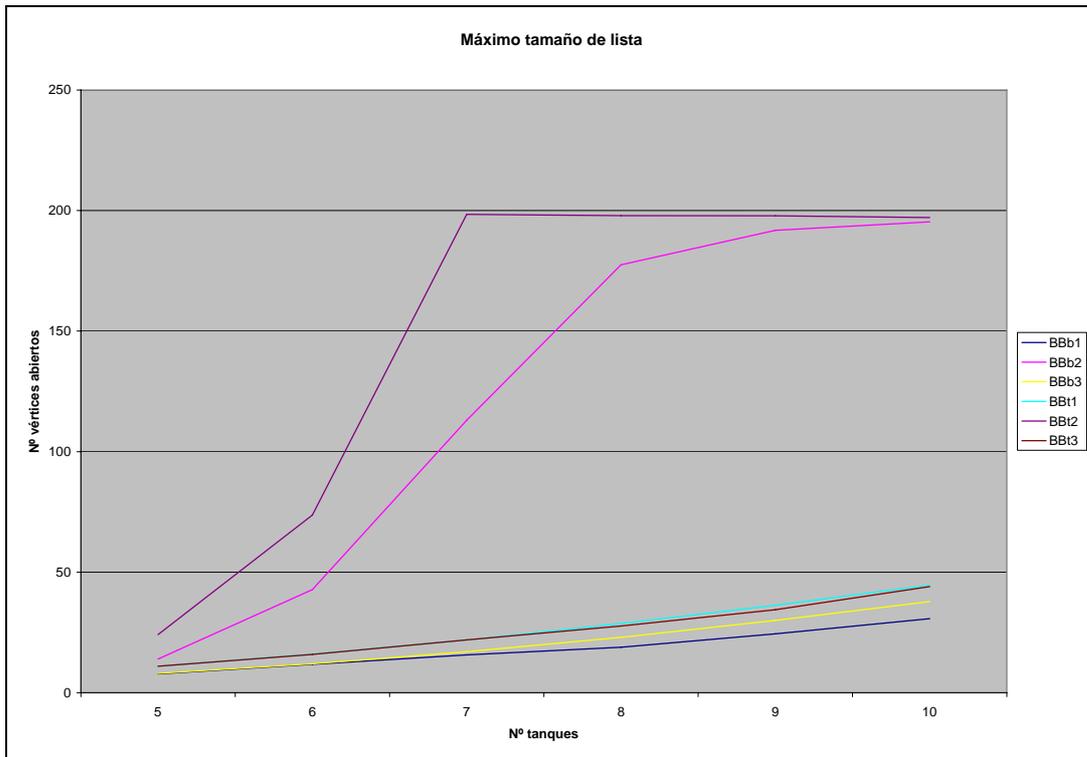


Figura 7.6. Número máximo de vértices abiertos (secuencias o subsecuencias).

A partir de los anteriores resultados, se puede establecer las siguientes conclusiones:

- El algoritmo basado en una estructura de exploración de *branch and bound* mediante baños (**BBb**) presenta mejores resultados que el *branch and bound* mediante tiempos (**BBt**), además de requerir una menor cantidad de evaluaciones y de vértices simultáneamente abiertos.
- No puede asegurarse completamente si es mejor seguir un tipo de exploración **Exp1**, exploración en profundidad, o **Exp3**, exploración de máxima ocupación.
- La tabla 7.6 muestra como la relajación del problema, al plantear el grafo Secuencial, comporta que no se consiga alcanzar los valores óptimos en el 100% de los casos. La mejor opción es aplicar una estructura de *branch and bound* mediante baños (**BBb**) con una exploración en profundidad (**Exp1**), lo que significa para este conjunto de ejemplares que se alcance el óptimo en más de un 98% de veces.
- Otras opciones que logran bastante buenos resultados son: se alcanza el óptimo en poco más del 97% de ocasiones mediante *branch and bound* mediante baños (**BBb**) con exploración de máxima ocupación (**Exp3**), y 92,6% de ejemplares mediante *branch and bound* mediante tiempos (**BBt**) con exploración de máxima ocupación (**Exp3**).
- Si se consigue mejorar la cota inferior del tiempo de ciclo, quizá se evitará que en la exploración en anchura (**Exp2**), se purguen determinados vértices, alguno de los cuales podría conducir a las secuencias óptimas de movimientos.
- La exploración en profundidad (**Exp1**) requiere normalmente mayor número de secuencias evaluadas, si bien acaba aportando mejores resultados (tiempos de ciclo casi siempre óptimos), muy cercano al 100% de resultados óptimos si se aplica en un *branch and bound* mediante baños (**BBb**).

7.5. Aplicación del algoritmo *branch and bound* sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado

En este apartado se muestra la aplicación del algoritmo basado en el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado, que fue presentado en el capítulo 5. Este algoritmo permite hallar de manera bastante rápida el resultado óptimo (hasta 10 tanques, máximo de la experiencia computacional básica), basándose en desestimar vértices por el cruce de las cotas inferior y superior sobre el tiempo de ciclo en algunos momentos.

Antes de mostrar los resultados obtenidos, que avalan la validez del citado algoritmo, se recuerdan sus dos principales características:

- El conjunto de soluciones queda reflejado en una estructura de *branch and bound*, siguiendo el modelo mediante baños propuesto por Shapiro y Nuttle (1988): **BBt**.
- De entre los tres tipos de exploración posibles (en una búsqueda en profundidad, a través del vértice más prometedor, o a través del vértice que hace máximo el número de piezas en el sistema), se ha optado por la búsqueda en profundidad, según los vértices explorados al aplicar el algoritmo que utiliza grafo Secuencial (tabla 7.7).

Serie ejemplares	BBb(Exp1)	BBb(Exp3)	BBb(Exp1) - BBb(Exp3)
S1	9.818	10.744	-926
S2	8.107	8.547	-440
S3	7.171	7.648	-477
S4	14.548	16.851	-2.303
S5	15.489	17.763	-2.274
S6	7.356	7.984	-628
S7	45.487	77.332	-31.845
S8	36.601	63.459	-26.858
S9	54.440	70.304	-15.864
Todas	199.017	280.632	-81.615

Tabla 7.7. Número de vértices explorados, por series de ejemplares, mediante exploración en profundidad (Exp1) y de maximización de objetos en el sistema (Exp3), en *Branch and bound* mediante baños (BBb).

Las programaciones para el ciclo de trabajo de la grúa para los 540 ejemplares se hallan en el Anexo 4. No obstante, a continuación se exponen los siguientes datos que indican las prestaciones del algoritmo:

- número de vértices explorados y ramificados en sus vértices descendientes inmediatos;
- número de secuencias a evaluar (grafos generados), bien sean parciales si no incluyen la totalidad de los baños, bien sean completas si correspondan a vértices terminales;
- número de secuencias evaluadas (grafos resueltos), que han pasado el análisis de cotas, bien sean parciales sin la totalidad de los baños, bien sean completas asociadas a vértices terminales;
- número de secuencia completa (grafo resuelto), en que se halló la solución óptima.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	11	10	11	10	11	11	11	13	16
6	18	19	15	24	18	18	31	38	36
7	35	30	24	41	34	39	79	81	101
8	64	35	31	97	77	29	259	236	311
9	60	52	45	138	204	50	667	601	888
10	82	56	40	149	122	51	2356	1541	1734

Tabla 7.8. Número de vértices explorados y ramificados en sus vértices descendientes inmediatos.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	42	36	39	39	40	41	42	52	63
6	82	83	66	115	80	77	147	189	178
7	186	156	120	215	176	208	451	472	599
8	377	191	168	616	476	153	1747	1555	2125
9	378	329	283	936	1460	304	4999	4433	6783
10	564	372	245	1078	869	323	20005	12585	14238

Tabla 7.9. Número de secuencias a evaluar (grafos generados).

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	36	31	35	35	37	38	37	48	59
6	73	69	57	109	69	67	135	181	173
7	165	133	100	196	155	187	407	419	575
8	318	158	136	546	440	116	1565	1337	1989
9	322	267	238	786	1314	250	4097	3810	6052
10	478	306	186	925	734	268	16230	10451	12533

Tabla 7.10. Número de secuencias finalmente evaluadas (grafos resueltos).

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	12	9	12	6	13	12	9	16	18
6	16	14	7	39	13	14	49	84	56
7	36	14	20	32	22	34	133	136	220
8	46	11	16	75	59	5	488	310	592
9	20	33	32	34	186	25	987	518	1383
10	39	27	5	46	40	14	3948	1412	1674

Tabla 7.11. Número de grafo resuelto, con la secuencia completa, correspondiente a la solución óptima.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	6	5	4	4	3	3	5	4	4
6	9	15	9	6	11	10	13	8	6
7	21	23	20	20	20	21	44	53	23
8	60	33	32	71	36	36	182	219	136
9	55	61	46	150	146	54	902	623	731
10	86	67	59	153	135	55	3775	2135	1705

Tabla 7.12. Diferencia entre secuencias (grafos) planteadas y finalmente resueltas.

Como estudio sobre las soluciones finales obtenidas, se puede analizar la mayor o menor flexibilidad de las ventanas temporales sobre los baños, combinadas con los tiempos de desplazamiento de grúa, que se puede ver reflejada en:

- el número de objetos diferentes tratados por la grúa en un ciclo,
- el tiempo total de espera de la grúa en las diversas estaciones a la espera de finalización de operaciones,
- el valor de la diferencia entre el resultado obtenido mediante este algoritmo y el resultado óptimo.

Por lo que se refiere al primer parámetro, **número de objetos diferentes**, el resultado medio (por número de tanques y serie de ejemplares) figura en la tabla 7.13.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	2,8	2,9	2,6	3,5	3,3	2,7	4,1	4,2	3,9
6	2,9	2,4	1,8	3,2	2,7	2,3	4,5	4,4	4,2
7	2,7	2,5	1,8	3,1	2,7	2,6	5,3	5,1	4,8
8	2,4	1,4	2	3,2	2,6	1,6	4,9	5,5	4,7
9	1,7	1,4	1,7	2,5	3	1,7	5,6	4,9	5,5
10	1,7	1,7	1,2	2,1	2,1	1,7	6,6	6	4,9

Tabla 7.13. Número medio de objetos diferentes en la línea para un ciclo.

Si se quiere analizar el segundo parámetro, **tiempo total de espera de la grúa** en los baños o estaciones, el resultado medio (por número de tanques y serie de ejemplares) se ofrece seguidamente en la tabla 7.14.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	31	22	29	16	7	24	1	0	5
6	82	47	139	14	65	46	1	1	9
7	95	94	195	34	81	60	2	2	2
8	71	262	118	55	101	218	13	6	17
9	270	275	266	101	71	231	24	31	14
10	269	281	413	213	189	278	7	13	26

Tabla 7.14. Tiempo medio de espera de la grúa en los baños de la línea para un ciclo.

En este caso, como ya se ha comentado, la **diferencia entre los resultados del tiempo de ciclo** obtenidos mediante este algoritmo y los facilitados por el optimizador ha sido nula en los 540 ejemplares analizados, ya que en ningún momento se ha establecido ningún límite al número de evaluaciones sobre los grafos ni al tiempo de ejecución del procedimiento.

7.6. Aplicación del algoritmo heurístico sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado

En este apartado, se muestra los resultados de la aplicación del **algoritmo heurístico** basado en el **grafo de Tiempo de Ciclo Acotado**, que fue presentado en el capítulo 6. La finalidad de este algoritmo, basado en el número de objetos presentes en el sistema durante un ciclo de movimientos de la grúa, es hallar de manera rápida alguna solución. Esta solución, por tanto, puede fácilmente no ser óptima al no realizarse una exploración completa.

Los tiempos de ciclo de trabajo de la grúa para los 540 ejemplares se han incluido en el Anexo 5. Así mismo, se han recogido también otros datos sobre la respuesta de este algoritmo a los ejemplares planteados:

- número de vértices explorados y ramificados en sus vértices descendientes inmediatos;
- número de secuencias a evaluar (grafos generados), sean subsecuencias parciales sin todos los baños o secuencias completas que correspondan a vértices terminales;
- número de secuencias evaluadas (grafos resueltos), que han pasado el análisis de cotas, sean subsecuencias parciales o secuencias en vértices terminales;
- número de secuencia completa (grafo resuelto), en que se obtuvo la solución ofrecida.

Tomando como **referencia** los resultados obtenidos por el algoritmo de *branch and bound*, utilizando también para evaluar secuencias o subsecuencias un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, se puede analizar la respuesta de este algoritmo heurístico reflejada de nuevo en:

- el número de objetos diferentes tratados por la grúa en un ciclo,
- el tiempo total de espera de la grúa en las diversas estaciones a la espera de finalización de operaciones,
- el valor de la diferencia entre el resultado obtenido y el resultado óptimo.

Por lo que respecta al primer parámetro, **número de objetos diferentes**, el resultado medio (por número de tanques y serie de ejemplares), comparado con el del algoritmo de *branch and bound* escrito en la fila inferior en rojo, se recoge en la tabla 7.15.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	2,8 2,8	2,9 2,9	2,7 2,6	3,5 3,5	3,2 3,3	2,7 2,7	4,2 4,1	4,3 4,2	3,9 3,9
6	2,7 2,9	2,3 2,4	1,9 1,8	3,1 3,2	2,6 2,7	2,2 2,3	4,9 4,5	4,6 4,4	4,4 4,2
7	2,5 2,7	2,5 2,5	1,8 1,8	2,5 3,1	2,7 2,7	2,5 2,6	5,9 5,3	5,7 5,1	5,2 4,8
8	2,3 2,4	1,5 1,4	1,7 2	2,8 3,2	2,3 2,6	1,6 1,6	5,2 4,9	5,0 5,5	4,7 4,7
9	1,7 1,7	1,3 1,4	1,6 1,7	2,2 2,5	2,5 3	1,6 1,7	5,4 5,6	4,8 4,9	4,8 5,5
10	1,5 1,7	1,4 1,7	1,2 1,2	1,7 2,1	1,7 2,1	1,7 1,7	5,7 6,6	5,7 6	4,1 4,9

Tabla 7.15. Número medio de objetos diferentes para un ciclo, al aplicar un algoritmo heurístico (comparado con el número medio aplicando un algoritmo exacto).

En la tabla anterior, las casillas **en amarillo** indican que el número medio de objetos en el sistema en un ciclo puede llegar a ser superior al obtener una solución mediante el algoritmo heurístico, lo cual no representa siempre mejores resultados, dado que también es importante la disposición de éstos a inicio de ciclo.

Para observar como se comporta el segundo parámetro, **tiempo total de espera de la grúa** en los baños o estaciones, el resultado medio (por número de tanques y serie de ejemplares) a continuación en la tabla 7.16 se ofrece la comparativa con los resultados anteriores al aplicar un algoritmo exacto.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	40 31	26 22	30 29	16 16	16 7	28 24	2 1	5 0	6 5
6	86 82	59 47	140 139	24 14	70 65	63 46	1 1	5 1	11 9
7	104 95	107 94	198 195	52 34	97 81	96 60	2 2	0 2	10 2
8	85 71	266 262	161 118	77 55	103 101	218 218	11 13	10 6	13 17
9	282 270	312 275	275 266	132 101	125 71	239 231	30 24	25 31	22 14
10	305 269	362 281	412 413	306 213	290 189	288 278	34 7	35 13	19 26

Tabla 7.16. Tiempo medio de espera de la grúa en los baños para un ciclo, al aplicar un algoritmo heurístico (comparado al tiempo medio de espera en soluciones mediante un algoritmo exacto).

En la tabla anterior, nuevamente las casillas **en amarillo** indican que el tiempo medio de espera de la grúa en los baños del sistema en un ciclo puede ser inferior al obtener una solución mediante el algoritmo heurístico, dada la poca eficiencia de la secuencia solución que supone mayor tiempo destinado a movimientos de transporte.

Finalmente, el parámetro con mayor importancia en este caso es la **diferencia entre los tiempos de ciclo** obtenidos mediante este algoritmo heurístico y los facilitados por el algoritmo exacto. Los resultados medios para los 540 ejemplares analizados se encuentran en la siguiente tabla 7.17, en la cual se observa que esta diferencia aumenta a medida que lo hace el número de baños y también la flexibilidad de tiempos en los baños.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	16	6	3	11	14	7	8	14	16
6	12	9	1	15	5	17	20	28	28
7	21	13	8	45	9	26	47	25	61
8	24	2	25	30	24	4	61	76	83
9	12	19	10	31	47	18	95	92	107
10	26	60	0	71	68	10	106	103	150

Tabla 7.17. Diferencia media del tiempo de ciclo entre las soluciones del algoritmo heurístico y las del algoritmo exacto.

Para complementar los anteriores resultados, otro parámetro con importancia puede ser el **porcentaje de desviación media entre el tiempo de ciclo como resultado del algoritmo heurístico sobre el valor óptimo** del algoritmo exacto. Los resultados se encuentran en la siguiente tabla 7.18, donde consecuentemente también se observa que la desviación crece conforme lo hace el número de baños y la amplitud de las ventanas temporales en los tanques.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	7	3	1	6	7	3	5	8	7
6	5	3	0	7	2	5	11	12	11
7	7	3	2	15	3	6	22	11	20
8	7	0	5	10	6	1	23	26	23
9	2	3	2	7	12	3	31	28	28
10	5	10	0	13	11	1	36	31	32

Tabla 7.18. Porcentaje de desviación media del tiempo de ciclo entre las soluciones del algoritmo heurístico y las del algoritmo exacto.

7.7. Experiencia computacional ampliada

El número máximo de tanques en una línea tratado hasta el momento en los 540 ejemplares estudios, 10 tanques, no alcanza a los de las líneas que se encuentran en los sistemas productivos reales, tal como indican los ejemplares *benchmark* del apartado siguiente o el caso real planteado en el siguiente capítulo. Por lo tanto, parece oportuno generar algunos ejemplares más, cuya dimensión supere los 10 baños, para evaluar no tan sólo los algoritmos presentados (de grafo Secuencial, *branch and bound* exacto basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, heurístico basado también en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado), sino incluso aprovechar sus fortalezas de manera conjunta, en busca de la solución óptima.

Para no generar una nueva experiencia computacional con 540 ejemplares, con alta probabilidad que muchos de ellos no permitieran más que el tratamiento de un único objeto simultáneamente por la grúa, se ha seleccionado la serie 7 ya que tiene un número medio de objetos mayor que las demás (según la tabla 7.8). En este caso, el número de baños m tomará los valores $m=14$, $m=17$ y $m=20$, con 10 ejemplares por cada número de baños escogido, lo cual indica 30 nuevos ejemplares que forman parte de esta experiencia computacional 2 o ampliada.

Se recuerdan los parámetros en que se basa la generación de dichos ejemplares:

- El tiempo mínimo de las operaciones se ha generado aleatoriamente siguiendo una ley uniforme:

$$a_i = U [20 ; 80].$$

- Los intervalos para las ventanas temporales en los baños son del tipo Ventana Abierta (VA):

$$b_i = U [2 a_i ; 10 a_i].$$

- El tiempo mínimo de movimiento de la grúa sin carga entre dos estaciones consecutivas se fija según el intervalo:

$$e_{i,i+1} = U [5 ; 10].$$

- Para la obtención del tiempo adicional de carga y descarga para la grúa, se considera una grúa rápida (GR):

$$f_i = 1,5 e_{i,i+1}.$$

En resumen, esto supone unos 30 nuevos ejemplares, de la serie **S7+**, que se encuentran en el Anexo 6, y que han sido codificados según se expresa en la tabla 7.18.

Ventana	Grúa	m	GR
VA		14	761-770
		17	771-780
		20	781-790

Tabla 7.18. Tres dígitos iniciales en los códigos de los ejemplares de la experiencia computacional 2. Los dos últimos códigos corresponden al número de tanques del problema.

7.8. El Algoritmo Combinado

7.8.1. Descripción del Algoritmo Combinado (AC)

Para la resolución de ejemplares de mayores dimensiones, entre 11 y 20 baños, se propone la combinación del algoritmo heurístico basado en el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado con el algoritmo de *branch and bound* basado en el grafo Secuencial, apoyado por la resolución mediante grafo de Tiempo de Ciclo Acotado cuando es oportuno.

Algoritmo Combinado (AC)

1. Algoritmo heurístico basado en el número de piezas $\Rightarrow TC_1^*, H_1^*, T_1^*$
 2. Algoritmo mixto arborescente basado en el grafo Secuencial y el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado (cota superior inicial = tc_1^*) $\Rightarrow TC_2^*, H_2^*, T_2^*$
- $TC^*=TC_2^*, H^*=H_2^*, T^*=T_2^*$
-

Así, la función de la primera parte del Algoritmo Combinado (AC), correspondiente con el algoritmo heurístico planteado en el capítulo 6, es obtener una solución, que sea a la vez cota superior inicial de la segunda parte. Conviene, pues, que dicho valor sea mucho más ajustado que el disponible a inicio de la resolución del problema (tiempo de ciclo resultado de la presencia de un solo objeto en el sistema).

En cambio, la función del segundo algoritmo AC, que puede convertirse en exacto si no se limita el número de evaluaciones sobre los grafos ni la posibilidad de relajar la resolución de ciertas secuencias, es determinar la solución óptima para el problema planteado. En esta segunda etapa de resolución, el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado se utiliza para verificar las infactibilidades indicadas por el grafo Secuencial para algunas secuencias, superables en cierto caso mediante el margen de las ventanas temporales en los baños.

Antes de aplicar este Algoritmo Combinado a la nueva parte de la experiencia computacional, se evalúa dicho algoritmo sobre la experiencia computacional básica para conocer las prestaciones del procedimiento. Así, se podrá fijar con más criterio límites en la exploración, dada la magnitud de los ejemplares tratados.

Para evaluar el comportamiento de cada una de las partes de la resolución mediante el algoritmo propuesto se compara en las siguientes tablas (para la experiencia computacional inicial):

- el número de evaluaciones realizadas sobre secuencias, o subsecuencias, mediante cada una de ambas partes, y posteriormente, el desglose según el tipo de grafo usado en la segunda parte;
- la desviación relativa del tiempo de ciclo hallado respecto al óptimo, para cada una de las partes.

7.8.2. Evaluación del algoritmo sobre la experiencia computacional básica

Empezando por la comparación en el **número de evaluaciones** para ambas partes del algoritmo, el valor medio de esta cantidad (por número de tanques y serie de ejemplares), se recoge en la tabla 7.19. Dichos resultados se escriben en azul para el algoritmo heurístico de la primera parte, y en verde, para la parte del algoritmo basada en la mezcla de ambos tipos de grafos de la segunda.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	118 62	92 43	138 58	104 45	157 52	128 62	85 50	121 70	82 74
6	263 145	326 160	391 184	172 181	276 169	300 155	89 234	87 240	128 341
7	429 322	685 333	653 251	511 531	529 436	507 403	346 798	139 841	243 987
8	940 922	1010 803	865 590	833 1433	957 1232	962 633	200 2821	143 2510	247 3782
9	1004 1360	1012 1192	1013 1509	1011 2314	957 3719	1012 1401	310 6797	496 5874	507 10559
10	1009 3177	1013 1835	1012 1716	1008 3472	1011 2616	1014 1293	413 18609	580 17069	798 19443

Tabla 7.19. Número medio de secuencias evaluadas, por número de baños y serie de ejemplares, mediante el algoritmo combinado; en la primera parte (en azul) y en la segunda (en verde).

Para líneas de producción con un número de tanques igual a 5, la obtención de la solución mediante el algoritmo heurístico es altamente rentable, ya que su número de evaluaciones supera al que se realiza en el algoritmo mixto. Para casos de líneas con entre 6 y 8 tanques, el número de evaluaciones en ambas partes del algoritmo combinado está bastante equilibrado. Así mismo, al superar los 9 tanques el número de evaluaciones de la segunda parte del algoritmo combinado supera siempre al de la primera parte.

Si se quiere desglosar las evaluaciones realizadas en el algoritmo AC (en verde en la tabla 7.19) entre las que se realizan mediante el grafo Secuencial y las llevadas a cabo mediante el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, esto conduce a la tabla 7.20, en la cual para cada número de baños la primera fila corresponde al uso del primer tipo de grafo y la segunda fila (en negrita), al segundo tipo de grafo.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	18 44	14 29	17 40	14 31	15 36	17 44	15 35	19 51	20 54
6	39 106	45 115	46 138	46 134	44 125	43 113	54 180	58 183	75 266
7	89 233	93 240	72 179	129 401	109 327	105 299	187 611	186 655	218 769
8	249 673	208 595	161 429	347 1086	293 939	173 460	690 2131	661 1849	838 2944
9	361 999	325 868	380 1129	634 1680	906 2812	377 1024	2012 4785	1821 4052	2814 7745
10	844 2333	553 1282	490 1225	1012 2459	887 1729	411 882	6104 12505	5810 11260	6332 13111

Tabla 7.20. Número medio de secuencias evaluadas, por número de baños y serie de ejemplares, mediante grafo Secuencial (primera fila) y grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (segunda fila).

Para observar cómo el algoritmo se acerca en cada etapa a la solución óptima, la diferencia entre el valor medio del tiempo de ciclo al final de cada etapa y el valor medio de los tiempos de ciclo óptimos (por número de tanques y serie de ejemplares) se ofrece en la tabla 7.21.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	16 0	5 0	2 0	10 0	14 0	11 0	8 0	16 0	14 0
6	12 0	6 0	5 0	22 0	19 0	23 0	20 0	16 0	40 0
7	21 0	9 0	6 0	41 0	14 0	28 0	49 0	36 0	63 0
8	149 0	68 0	32 0	96 0	105 0	66 0	69 0	75 0	68 0
9	50 0	79 0	123 0	181 0	187 0	115 0	108 0	128 0	162 0
10	129 0	126 0	51 0	150 0	167 0	109 0	140 0	197 0	205 0

Tabla 7.21. Diferencia media en el tiempo de ciclo, por número de baños y serie de ejemplares, respecto el valor óptimo, al final de la primera parte (en azul) y de la segunda (en verde).

7.8.3. Descripción de la variante del Algoritmo Combinado (AC')

En la segunda parte del Algoritmo Combinado (AC), una secuencia se resuelve mediante el grafo Secuencial y, en caso que éste indique posible infactibilidad, se opta por el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado. Se ha aplicado también una variante del Algoritmo Combinado, conocida como AC', consistente en prescindir de la resolución mediante grafos con Tiempo de Ciclo Acotado.

Algoritmo Combinado (AC')

- 1. Algoritmo heurístico basado en el número de piezas $\Rightarrow TC_1^*, H_1^*, T_1^*$
 - 2. Algoritmo mixto arborescente basado en el grafo Secuencial (cota superior inicial = tc_1^*) $\Rightarrow TC_2^*, H_2^*, T_2^*$
- $TC^*=TC_2^*, H^*=H_2^*, T^*=T_2^*$

Los resultados de la diferencia entre el valor medio del tiempo de ciclo al final de cada etapa y el valor medio de los tiempos de ciclo óptimos (por número de tanques y serie de ejemplares) se ofrecen en la tabla 7.22.

m \ S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
5	16 0	6 0	2 0	7 0	14 0	7 0	6 0	15 0	14 0
6	12 0	11 0	4 0	20 0	7 0	23 0	29 0	22 0	40 0
7	21 0	6 0	5 0	32 0	17 0	28 0	46 0	35 0	63 0
8	149 0	53 0	32 0	103 0	105 0	66 0	88 0	69 0	68 0
9	50 0	79 0	123 0	181 0	147 0	115 0	117 0	119 0	162 0
10	129 0	126 0	51 0	150 0	167 0	109 0	154 0	190 0	224 0

Tabla 7.22. Diferencia media en el tiempo de ciclo, por número de baños y serie de ejemplares, respecto al valor óptimo, al final de la primera parte (en azul) y de la segunda parte, sin aplicar el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (en verde).

Se observa que se puede alcanzar el mismo valor óptimo en el algoritmo combinado AC' que aplicando el algoritmo combinado original AC.

7.8.4. Evaluación del algoritmo sobre la experiencia computacional ampliada

Para resolver los 10 ejemplares de problema de la experiencia computacional ampliada, con una dimensión de la línea de producción de 14 tanques, se ha usado tanto el Algoritmo Combinado (AC) como su variante (AC'). Para cada una de las partes de los algoritmos AC y AC', se ha establecido un límite de 10.000 vértices explorados.

A partir del Algoritmo AC', se han generado dos nuevas variantes, AC2 y AC2+, que realizan solamente cálculos de la segunda parte del algoritmo AC', lo que permite un menor o mayor número de evaluaciones máximas permitidas, respectivamente. Es decir:

- **AC2:** se aplica el Algoritmo arborescente con evaluación mediante grafo Secuencial (limitado a 10.000 vértices explorados).
- **AC2+:** se aplica el Algoritmo arborescente con evaluación mediante grafo Secuencial (limitado a 300.000 vértices explorados).

Los tiempos de ciclo obtenidos para los 10 ejemplares con 14 baños se ofrecen en la tabla 7.23. La columna **Mejor** indica el mejor de los tiempos de ciclo obtenidos utilizando todas las variantes anteriores de algoritmos, cuya programación de movimientos del puente-grúa se encuentra en el Anexo 7.

<i>Código S7+</i>	AC fin p.1	AC fin p.2	AC' fin p.1	AC' fin p.2	AC2	AC2+	Mejor TC
76114	924	516	924	516	516	516	516
76214	647	472	647	472	472	346	346
76314	908	656	908	656	656	459	459
76414	1026	891	1026	891	891	646	646
76514	628	468	628	468	468	354	354
76614	962	675	962	675	675	511	511
76714	1072	885	1072	885	885	631	631
76814	464	464	464	464	546	365	365
76914	890	659	890	659	659	608	608
77014	1021	824	1021	824	824	646	646

Tabla 7.23. Resultados de la aplicación del algoritmo combinado AC, así como de sus diversas variantes AC', AC1, AC2 i AC2+ (ejemplares 761 a 770).

Las conclusiones que se pueden extraer de los resultados de la anterior tabla 7.23, para los ejemplares tratados, son las siguientes:

- Es indistinto utilizar la evaluación de secuencias mediante grafo Secuencial (algoritmo AC) o mediante Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (algoritmo AC'),

- Destinar todo el tiempo de cálculo a la segunda parte del algoritmo (AC2 y AC2+), en general, supone una opción tan buena como la utilización de AC y AC'. Sólo en una ocasión en AC2 no se alcanza el tiempo de ciclo logrado en la primera parte.
- Permitir mayor número de evaluaciones es positivo. El algoritmo AC2+ ofrece mejores resultados que el algoritmo AC2. Además, el uso de un problema relajado para evaluar una secuencia acelera el proceso de realización de cálculos.

En la siguiente tabla 7.24, se compara los resultados obtenidos mediante el Algoritmo Combinado y sus variantes con los logrados por la aplicación del algoritmo *de branch and bound* basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado. El único ejemplar para el cual no se había hallado el tiempo de ciclo óptimo es el 76817 (en rojo).

Código S7+	Algoritmo Combinado AC2+	Algoritmo <i>b&b</i> con grafo TCA (vértices explorados)	TC*
76114	516	516 (4956)	516
76214	346	346 (18591)	346
76314	459	459 (40755)	459
76414	646	646 (33630)	646
76514	354	354 (24035)	354
76614	511	511 (14424)	511
76714	631	631 (102723)	631
76814	365	285 (174211)	285
76914	608	608 (35361)	608
77014	646	646 (43286)	646

Tabla 7.24. Comparación de resultados del algoritmo combinado AC2+ con el algoritmo *branch and bound* con evaluación mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (ejemplares 761 a 770).

Para el caso de ejemplares con 17 baños, los resultados referentes a los tiempos de ciclo obtenidos por el algoritmo AC y sus variantes siguen la misma tendencia que en la dimensión anterior (14 baños). En este caso, los resultados de AC (final de la segunda parte), AC' (final de la segunda parte) y AC2 coinciden plenamente en los 10 ejemplares. Por eso, se ha omitido la tabla para m=17 equivalente a la anterior tabla 7.23. Los tiempos de ciclo obtenidos para los 10 ejemplares con 17 baños se detallan en la tabla 7.25.

El algoritmo presentado en el capítulo 5, de *branch and bound* con evaluación de secuencias o subsecuencias mediante el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, se ha limitado a 1.000.000 de vértices explorados. Este límite, necesario a partir de este tamaño de ejemplar, viene condicionado por el límite de unas 48 horas de evaluación en un ordenador de 700 MHz. En tres de los ejemplares (77317, 77917, 78017) se ha alcanzado dicho valor máximo. En seis de los ejemplares, los resultados mejoran a los obtenidos por AC2+.

Código S7+	Algoritmo Combinado AC2+	Algoritmo <i>b&b</i> con grafo TCA (vértices explorados)	TC*
77117	866	866 (337649)	866
77217	772	540 (333903)	540
77317	667	451 (999999)	451
77417	812	812 (102505)	812
77517	735	553 (814488)	553
77617	724	628 (644966)	628
77717	1097	1097 (126543)	1097
77817	1008	1008 (3924)	1008
77917	1186	1018 (999999)	1018
78017	859	597 (999999)	597

Tabla 7.25. Comparación de resultados del algoritmo combinado AC2+ con el algoritmo *branch and bound* con evaluación mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (ejemplares 771 a 780).

Los resultados de aplicación del algoritmo combinado AC, con sus tiempos de ciclo obtenidos para los siguientes 10 ejemplares formados por 20 baños, se detallan en la tabla 7.26. En este caso, para la evaluación mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado el tiempo de cálculo se incrementa bastante (poco más de 600.000 iteraciones en una semana), por lo que se ha limitado la experiencia al algoritmo AC2+.

Código S7+	Algoritmo Combinado AC2+	TC*
78120	983	983
78220	1424	1424
78320	1134	1134
78420	938	938
78520	1261	1261
78620	902	902
78720	1084	1084
78820	1149	1149
78920	900	900
79020	1367	1367

Tabla 7.26. Resultados del algoritmo combinado AC2+ (ejemplares 771 a 780).

Para finalizar, se ha de comentar que aunque se hayan analizado algunas variantes sobre el *branch and bound* con evaluación mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado intentando reducir tiempo de cálculo, los resultados han sido en general peores que los mostrados en este trabajo.

7.9. Evaluación de los algoritmos mediante ejemplares *benchmark*

En cualquier tipo de problema analizado por diversos investigadores, es frecuente la existencia de algunos ejemplares de problemas que éstos utilizan como referencia para el desarrollo de sus algoritmos. El caso de *Hoist Scheduling Problem* no es una excepción.

7.9.1. *Benchmark Phillips y Unger (1976)*

Diversos investigadores, como Shapiro y Nuttle (1988) o Lei y Wang (1991), han tomado como ejemplar de referencia el que exponían Phillips y Unger (1976), en el primer artículo de la literatura que trataba esta problemática. Este ejemplar, que consta de 12 tanques más la estación de carga y descarga, recibirá el nombre de "DatosPU".

Los datos del problema planteado ya en 1976 por Phillips y Unger se detallan a continuación.

Restricciones de las ventanas temporales en los baños

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	150	90	120	90	30	60	60	45	130	20	90	30
b_i	200	120	180	125	40	120	120	75	∞	∞	120	60

Tabla 7.27. Ventanas temporales en los baños en el *benchmark* de Phillips y Unger.

Restricciones de tiempos de movimientos de la grúa

Se recogen los tiempos (en segundos) de movimiento de la grúa sin carga entre dos tanques. La estación o baño 0 actúa como estación de carga y la estación o baño 13, como estación de descarga, siendo físicamente un mismo lugar. Por eso, se ha utilizado una sola fila y una sola columna para designar dicha posición.

i	0/13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0/13	0	11	14	16	14	19	22	24	26	29	6	8	10
1	11	0	2	5	2	8	10	13	15	17	10	3	1
2	14	2	0	2	0	5	8	10	13	15	12	6	3
3	16	5	2	0	2	3	5	8	10	13	15	8	6
4	14	2	0	2	0	5	8	10	13	15	12	6	3
5	19	8	5	3	5	0	3	5	7	10	18	11	9
6	22	10	8	5	8	3	0	2	5	7	20	14	11
7	24	13	10	8	10	5	2	0	2	5	23	16	14
8	26	15	13	10	13	7	5	2	0	2	25	19	16
9	29	17	15	13	15	10	7	5	2	0	27	21	19
10	6	10	12	15	12	18	20	23	25	27	0	7	9
11	8	3	6	8	6	11	14	16	19	21	7	0	2
12	10	1	3	6	3	9	11	14	16	19	9	2	0

Tabla 7.28. Tiempos de traslado sin carga entre dos baños cualesquiera en el *benchmark* de Phillips y Unger.

Los resultados obtenidos al evaluar dicho ejemplar mediante los diversos procedimientos presentados se muestran en la siguiente tabla 7.29.

	Alg. heurístico <i>branch and bound</i> con grafo Secuencial	Alg. exacto <i>branch and bound</i> con grafo Tiempo de Ciclo Acotado	Alg. heurístico con grafo Tiempo de Ciclo Acotado	Algoritmo Combinado AC
TC	521	521	866	521
Número de vértices explorados	1037	91	*	1008 (p1) 1263 (gS) 11703 (gTCA)

Tabla 7.29. Resultados para el *benchmark* de Phillips y Unger, mediante los procedimientos empleados (p1: primera parte; gS: segunda parte, grafo Secuencial; gTCA: grafo con Tiempo de Ciclo Acotado).

Los anteriores resultados mayoritariamente coinciden con el resultado óptimo de un tiempo de ciclo de 521 segundos, que ya Shapiro y Nuttle (1988) facilitan. Se observa como el procedimiento basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, presentado en este trabajo, es el que ofrece mejor relación entre tiempo de ciclo y número de vértices explorados. La programación óptima de la grúa en un ciclo sigue la secuencia de movimientos y la temporización de la tabla 7.30.

H	T	H'	T'	W
0	0	1	31	0
10	41	11	68	0
4	76	5	101	2
5	131	6	154	30
11	168	12	190	0
1	191	2	213	0
12	220	13	250	4
6	272	7	294	0
2	304	3	326	0
7	354	8	376	20
9	378	10	425	0
8	450	9	472	0
3	485	4	507	0

Tabla 7.30. Programación óptima para una grúa (*benchmark* de Phillips y Unger).

7.9.2. Benchmark del grupo Bermudes

Otro ejemplar que se toma como referencia es más actual, y su procedencia también acorde a los tiempos presentes. Éste ha sido extraído de la página web que el grupo de trabajo de investigación francés Bermudes tiene en <http://bermudes.univ-bpclermont.fr/>.

Se ha elegido un ejemplar que contiene 14 tanques, que se conocerá como "DatosBE" (<http://bermudes.univ-bpclermont.fr/HSPLIB/probl14.html>).

Restricciones de las ventanas temporales en los baños

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	180	60	60	180	60	30	60	60	180	60
b_i	300	120	120	240	120	120	120	120	300	180

Tabla 7.31a. Ventanas temporales en los baños de la línea de "DatosBE".

i	11	12	13	14
a_i	60	60	660	240
b_i	120	150	720	∞

Tabla 7.31b. Ventanas temporales en los baños de la línea de "DatosBE".

Restricciones de tiempos de movimientos de la grúa

Se recogen los tiempos (en segundos) de movimiento de la grúa primero sin carga y, posteriormente, con carga entre dos baños consecutivos.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	5	5	6	8	9	10	12	13	15	16	18	19	21	25	0
1		0	4	5	7	8	9	11	12	14	15	16	18	19	20	5
2			0	4	6	7	7	10	11	12	14	15	17	18	22	5
3				0	5	6	6	8	9	11	13	14	15	17	21	6
4					0	4	5	7	8	10	11	12	14	15	20	8
5						0	4	6	7	8	10	11	13	14	18	9
6							0	5	6	7	9	10	12	13	17	10
7								0	4	6	7	8	10	11	16	12
8									0	5	6	7	9	10	14	13
9										0	5	5	7	8	13	15
10											0	4	6	7	11	16
11												0	5	6	10	18
12													0	5	9	19
13														0	8	21
14															0	25
15																0

Tabla 7.32. Tiempos de traslado sin carga entre dos baños cualesquiera en la línea de "DatosBE".

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_i	15	24	14	25	29	19	20	24	20	25	19	20	25	18	35

Tabla 7.33. Tiempos de traslado con carga entre dos baños consecutivos en la línea de "DatosBE".

Los resultados obtenidos mediante los diversos procedimientos empleados se ofrecen a continuación en la tabla 7.34.

	Alg. heurístico <i>branch and bound</i> con grafo Secuencial	Alg. exacto <i>branch and bound</i> con grafo de Ciclo Acotado	Alg. heurístico con grafo de Ciclo Acotado	Algoritmo Combinado AC
TC	712	712	739	712
Número de vértices explorados	10825	789	*	1031 (p1) 711 (gS) 7684 (gTCA)

Tabla 7.34. Resultados para el *benchmark* de “DatosBE”, mediante los procedimientos empleados (p1: primera parte; gS: segunda parte, grafo Secuencial; gTCA: grafo con Tiempo de Ciclo Acotado).

Nuevamente la mayoría de los anteriores resultados coincide con el resultado óptimo, un tiempo de ciclo de 712 segundos, que figura en la misma página *web* de donde se extrajo el ejemplar. Una vez más, el procedimiento arborescente basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado ofrece la mejor relación entre tiempo de ciclo y número de vértices explorados.

La programación óptima de la grúa en un ciclo sigue la secuencia de movimientos y su temporización indicadas en la tabla 7.35.

H	T	H'	T'	W
0	0	1	31	0
10	41	11	68	0
4	76	5	101	2
5	131	6	154	30
11	168	12	190	0
1	191	2	213	0
12	220	13	250	4
6	272	7	294	0
2	304	3	326	0
7	354	8	376	20
9	378	10	425	0
8	450	9	472	0
3	485	4	507	0

Tabla 7.32. Programación óptima para una grúa (*benchmark* de “DatosBE”).

8. APLICACIÓN DEL GRAFO CON TIEMPO DE CICLO ACOTADO A OTRAS VARIANTES DEL PROBLEMA

En el presente capítulo, se ofrece una adaptación del algoritmo MCC (*Minimum Common Cycle*) de los autores Lei y Wang (1991) para resolver problemas con líneas de producción de idénticas características a las tratadas anteriormente, excepto en que dos puentes-grúa se encargan del transporte de los objetos y piezas a lo largo de ellas. El algoritmo propuesto facilita una resolución mucho más eficiente al plantear las secuencias a resolver mediante grafos con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA). Por este motivo, el algoritmo para determinar las secuencias de movimientos óptimas para ambas grúas, actuando de manera coordinada, recibe el nombre de **Algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA**.

8.1. Aplicación del algoritmo *branch and bound* sobre el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado al caso C2HSP

En este apartado, se demuestra la destacada aportación que supone el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado para resolver problemas con la presencia de dos grúas en una misma línea de producción, conocidos como *Cyclic Two-Hoist Scheduling Problem (C2HSP)*. Siguiendo la notación establecida en este trabajo, se trata de un problema 1B,1F/1/2/U,∪.

El algoritmo que se ha tomado como referencia y con el que se compara el algoritmo propuesto está publicado en un artículo de Lei y Wang (1991). En este caso, dada la facilidad para incorporar cotas inferiores y superiores sobre el tiempo de ciclo, se ha adaptado para que se alcance una mayor eficiencia en la resolución.

8.1.1. Algoritmo basado en el grafo de tiempo de ciclo acotado para el caso C2HSP

En el capítulo 3 ya se introdujo el funcionamiento del algoritmo propuesto por Lei y Wang (1991). A continuación, se describe la aportación de este trabajo, consistente en un algoritmo basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA) para el caso C2HSP, explotando también las propiedades detalladas por los autores precursores en esta variante del problema.

Algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA

piv₁ tal que se reparte equitativamente el tiempo según duraciones mínimas
 piv₂ tal que se reparte equitativamente el tiempo según duraciones máximas
 $piv^0 = (piv_1 + piv_2) / 2 \Rightarrow G_1(piv^0) = \{S_0, S_1, \dots, S_{piv^0-1}\}; G_2(piv^0) = \{S_{piv^0+1}, \dots, S_m\}$

Grúa 1 (m'=piv-1) $\Rightarrow tc_1^*(piv^0), H_1^*, T_1^*$
Grúa 2 (m'=m-piv) $\Rightarrow tc_2^*(piv^0), H_2^*, T_2^*$

Si $tc_1^*(piv^0) = tc_2^*(piv^0)$
 $piv^* = piv^0; TC^*(piv^*) = tc_1^*(piv^0) = tc_2^*(piv^0)$

SINO

$TC^*(piv^0) = \text{Max}[c_{sup1}(piv^0), c_{sup2}(piv^0)]$; $piv^* = piv^0$; $piv = piv^0$

$Max^0 = \text{Max} [tc_1^*(piv^0), tc_2^*(piv^0)]$

$Min^0 = \text{Min} [tc_1^*(piv^0), tc_2^*(piv^0)]$

SI $tc_1(piv) > tc_2(piv)$

paso = -1

primero, la partición izquierda

SINO

paso = +1

primero, la partición derecha

finSI

parar = Falso

partición_contraria = Falso

MIENTRAS [$tc_1(piv) \neq tc_2(piv)$]

SI $tc_1(piv) > tc_2(piv)$

grúa 1 debe alcanzar tc_2

$cinf_2 = tc_1(piv)$

Grúa 2 ($m'=m-piv$) $\Rightarrow tc_2^*(piv), H_2^*, T_2^*$

SINO

grúa 2 debe alcanzar tc_1

$cinf_1 = tc_2(piv)$

Grúa 1 ($m'=piv-1$) $\Rightarrow tc_1^*(piv), H_1^*, T_1^*$

finSI

finMIENTRAS

SI $tc_1^*(piv^0) < TC^*(piv^*)$

si es óptimo, $tc_1 = tc_2$

$piv^* = piv^0$; $TC^*(piv^*) = tc_1(piv) = tc_2(piv)$

$c_{sup1}(piv) = c_{sup2}(piv) = tc_1(piv)$

finSI

MIENTRAS [no parar]

$cinf_1 = Min^0$

parar = $[TC^*(piv^*) < Max^0]$ o $[piv=1]$ o $[piv=m-1]$

SI $[parar]$ y $[partición_contraria = Falso]$

partición_contraria = Verdadero

cambio de partición

paso = $paso \cdot (-1)$; $piv = piv^0$

SI $TC^*(piv^*) \geq Max^0$

parar = Falso

finSI

finSI

SI $[parar = Falso]$

$piv = piv + paso$

nueva partición

$\Rightarrow G_1(piv) = \{S_0, S_1, \dots, S_{piv-1}\}$; $G_2(piv) = \{S_{piv+1}, \dots, S_m\}$

Grúa 1 ($m'=piv-1$) $\Rightarrow tc_1^*(piv), H_1^*, T_1^*$

Grúa 2 ($m'=m-piv$) $\Rightarrow tc_2^*(piv), H_2^*, T_2^*$

MIENTRAS [$tc_1(piv) \neq tc_2(piv)$]

SI $tc_1(piv) > tc_2(piv)$ *grúa 1 debe alcanzar tc_2*

$cinf_2 = tc_1(piv)$

Grúa 2 ($m'=m-piv$) $\Rightarrow tc_2^*(piv), H_2^*, T_2^*$

```

SINO                                     grúa 2 debe alcanzar  $tc_1$ 
     $cinf_1 = tc_2(piv)$ 
    Grúa 1 ( $m'=piv-1$ )  $\Rightarrow tc_1^*(piv), H_1^*, T_1^*$ 
    finSI
    finMIENTRAS
    SI [ $tc_1^*(piv) > TC^*(piv^*)$ ] y [ $partición\_contraria = Falso$ ]
         $partición\_contraria = Verdadero$  (cambio de partición)
         $paso = paso \cdot (-1)$ ;  $piv = piv^0$ 
        parar = Falso
    finSI
    SI [ $tc_1^*(piv^*) > TC^*(piv^*)$ ] y [ $partición\_contraria = Verdadero$ ]
        parar = Verdadero (final de la búsqueda)
    finSI
    finSI
    SI  $tc_1^*(piv^0) < TC^*(piv^*)$                                      si es óptimo,  $tc_1 = tc_2$ 
         $piv^* = piv^0$ ;  $TC^*(piv^*) = tc_1(piv) = tc_2(piv)$ 
         $csup_1(piv) = csup_2(piv) = tc_1(piv)$ 
    finSI
    finMIENTRAS
finSI

```

El algoritmo que busca el tiempo de ciclo óptimo $TC^*(piv^*)$ se inicia considerando las dos partes de la línea que crea el pivote inicial (piv^0) y las resuelve por separado (tc_1^* y tc_2^*) hasta encontrar un tiempo de ciclo común a ambas. En caso que esto se produzca inmediatamente en la primera exploración de cada parte por separado, se dispone del resultado óptimo y el procedimiento puede finalizar. En caso contrario, en función de los tiempos de ciclo de la primera exploración se determina un sentido de desplazamiento del pivote ($paso=1$ supone desplazar el pivote al siguiente tanque en el proceso, a la derecha, y $paso=-1$ supone desplazar el tanque pivote en el sentido contrario).

Después de evaluar la primera partición de la línea, según el tanque inicial, se dispone de una cota superior para el tiempo de ciclo óptimo (habitual en este tipo de problemas) y una cota inferior que es igual al mínimo de los dos tiempos de ciclo en la primera exploración sobre el pivote inicial (Min^0).

Mientras pueden hallarse tiempos de ciclo (sean de una grúa, de la otra grúa y por supuesto de ambas) que se encuentren en el intervalo definido por ambas cotas se continúan explorando nuevas particiones. Cuando esto ya no es posible, se cambia de sentido con el producto: $paso=paso \cdot (-1)$.

Si al cambiar de sentido, el tiempo de ciclo óptimo es inferior al valor máximo determinado en la primera exploración, no es necesario explorar ninguna partición en este nuevo sentido y puede finalizar el procedimiento.

Para ilustrar la utilización de todos estos conceptos, se presenta el ejemplo de la instancia planteada por Phillips y Unger (1976) y resuelta por Lei y Wang (1991) mediante el algoritmo MCC (*Minimum Common Cycle*), véase capítulo 3, para el caso C2HSP.

8.1.2. Benchmark de Phillips y Unger resuelto mediante el algoritmo MCC

El desarrollo del procedimiento sobre cómo se resuelve el problema planteado por Phillips y Unger (1976) mediante la aplicación del algoritmo MCC (*Minimum Common Cycle*) se reproduce seguidamente. En el apartado siguiente, utilizando de nuevo el mismo problema, éste se resolverá aplicando el nuevo algoritmo, basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

- **Partición 0:**
 $piv^0 = 7$

Paso	Grúa 1	Grúa 2
1	$tc_1^*(piv^0)=251$	$tc_2^*(piv^0)=336$
2	$tc_1^*(piv^0)=340$	
3		$tc_2^*(piv^0)=340$

Tabla 8.1. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 7 (algoritmo MCC).

Resultado: $TC^*(7) = 340$

Se inicia la exploración del baño pivote hacia la derecha [$tc_1^*(piv) < tc_2^*(piv)$].

- **Partición 1:**
 $piv = piv+1 = 8$

Paso	Grúa 1	Grúa 2
1	$tc_1^*(piv)=251$	$tc_2^*(piv)=244$
2		$tc_2^*(piv)=251$

Tabla 8.2. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 8 (algoritmo MCC).

Resultado: $TC^*(8) = 251$

Al reducirse el tiempo de ciclo óptimo, se mantiene la exploración a derecha del pivote.

- **Partición 2:**
 $piv = piv+1 = 9$

Paso	Grúa 1	Grúa 2
1	$tc_1^*(piv)=293$	$tc_2^*(piv)=215$
2		$tc_2^*(piv)=293$

Tabla 8.3. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 9 (algoritmo MCC).

Resultado: $TC^*(9) = 293$

Al cumplirse que $tc_1^*(9)=293 > TC^*(8)=251$, supone finalizar la exploración de particiones hacia la derecha. Dado que $tc_2^*(7)=336 > TC^*(8)=251$, cualquier otra partición hacia la izquierda tomará un valor igual o superior a 336, lo que implica finalizar la exploración definitivamente. Por lo tanto, el óptimo es $TC^*=TC^*(8) = 251$.

8.1.3. Benchmark de Phillips y Unger resuelto mediante el algoritmo MCC adaptado al grafo TCA

En este apartado, se resuelve el problema planteado por Phillips y Unger (1976), el mismo que en el apartado anterior, resuelto mediante la aplicación del algoritmo para dos grúas basado en el grafo de Tiempo de Ciclo Acotado. Por esta razón, se incluye como última columna, adicional a las tablas anteriores, el intervalo determinado por las cotas inferior y superior para la búsqueda de nuevas posibles soluciones.

- **Partición 0:**
piv^o = 7

Paso	Grúa 1	Grúa 2	Cotas
1	$tc_1(\text{piv}^o)=251$	$tc_2(\text{piv}^o)=336$	[0, ∞]
2	$tc_1(\text{piv}^o)=340$		[336, ∞]
3		$tc_2(\text{piv}^o)=340$	[340, ∞]

Tabla 8.4. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 7 (algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA).

Resultado: $TC^*(7) = 340$

Se inicia la exploración del baño pivote hacia la derecha [$tc_1^*(\text{piv}) < tc_2^*(\text{piv})$].

- **Partición 1:**
piv = piv+1 = 8

Paso	Grúa 1	Grúa 2	Cotas
1	$tc_1(\text{piv})=251$	$tc_2(\text{piv})=244$	[251, 340]
2		$tc_2(\text{piv})=251$	[251, 340]

Tabla 8.5. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 8 (algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA).

Resultado: $TC^*(8) = 251$

Se mantiene la exploración del pivote hacia la derecha.

- **Partición 2:**
piv = piv+1 = 9

Paso	Grúa 1	Grúa 2	Cotas
1	$tc_1(\text{piv})=293$	$tc_2(\text{piv})=215$	[251, 251]

Tabla 8.6. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo el pivote el baño 9 (algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA).

Resultado: $TC^*(9) = 293$

Como no puede darse la situación que $TC^*(9) < 251$, esto supone el final de la exploración de particiones hacia la derecha. Además, cualquier otra partición hacia la izquierda proporciona un tiempo de ciclo común con valor superior, dado que:

$$tc_2^*(7) = 336 > tc_1^*(7) = 251$$

$$tc_2^*(7) = 336 > TC^*(8) = 251$$

Esto supone el final de la aplicación del algoritmo con el tiempo de ciclo óptimo $TC^*(8) = 251$, siendo las programaciones para ambas grúas las siguientes:

grúa	H_1^*	T_1^*	H'_1^*	T'_1^*	W_1^*
1	0	0	1	31	0
1	6	41	7	63	0
1	2	73	3	95	0
1	4	97	5	122	0
1	7	127	8	149	0
1	5	156	6	179	0
1	1	189	2	211	0
1	3	215	4	237	2
1	0	251			

grúa	H_2^*	T_2^*	H'_2^*	T'_2^*	W_2^*
2	8	0	9	22	0
2	12	41	13	71	0
2	10	77	11	104	0
2	9	152	10	199	27
2	11	210	12	232	4
2	8	251			

Tabla 8.7. Programación óptima de las dos grúas para el *benchmark* de Phillips y Unger (1976).

Al sincronizar ambas grúas, tomando como referencia de inicio de un ciclo el instante en que la grúa 1 recoge un objeto de la estación de carga, y considerando que el objeto permanece en el baño pivote el tiempo mínimo necesario en dicho baño ($a_8=45$), el resultado de la programación queda tal como lo indica la tabla 8.8.

grúa	H_1^*	T_1^*	H'_1^*	T'_1^*	W_1^*
1	0	0	1	31	0
1	6	41	7	63	0
1	2	73	3	95	0
1	4	97	5	122	0
1	7	127	8	149	0
1	5	156	6	179	0
1	1	189	2	211	0
1	3	215	4	237	2
1	0	251			

grúa	H_2^*	T_2^*	H'_2^*	T'_2^*	W_2^*
2	8	194	9	216	0
2	12	235	13	14(*)	0
2	10	20	11	47	0
2	9	95	10	142	27
2	11	153	12	175	4
2	8	194			

Tabla 8.8. Programación coordinada óptima de las dos grúas para el *benchmark* de Phillips y Unger (1976).

(*) El instante 14 de un ciclo equivaldría también al instante de tiempo 265 del ciclo anterior.

Aunque se alcance idéntico resultado mediante ambos procedimientos, es oportuno plantear una comparación entre las secuencias planteadas y evaluadas (grafos resueltos) al resolver el problema mediante el algoritmo presentado en este apartado en comparación con el que Lei y Wang (1991) proponen. Así, se ilustra cómo la introducción de cotas inferiores y superiores sobre el tiempo de ciclo afecta claramente a la disminución del número de vértices explorados y al número de grafos resueltos, aquéllos que superan la Primera prueba, de factibilidad (el análisis conjunto de cotas).

	Algoritmo MCC		Algoritmo MCC con TCA		reducción de secuencias evaluadas (%)
	Secuencias planteadas (grafos planteados)	Secuencias evaluadas (grafos resueltos)	Secuencias planteadas (grafos planteados)	Secuencias evaluadas (grafos resueltos)	
Número de secuencias	488	380	209	137	- 243 (-64%)

Tabla 8.9. Comparación del número de secuencias planteadas y evaluadas mediante los algoritmos MCC y MCC con grafos de TCA para el *benchmark* de Phillips y Unger (1976), C2HSP (dos grúas).

El análisis de los datos de la tabla 8.9 permite concluir que:

- Al incorporar las cotas sobre el tiempo de ciclo para hallar la solución óptima, sólo es necesario plantear 279 secuencias menos, lo que supone un 57% menos de las inicialmente necesarias (algoritmo MCC).
- El número de secuencias resueltas disminuye en una proporción similar, 243 secuencias menos, lo que proporcionalmente supone una reducción del 64% de las que se requerían en el algoritmo MCC sin considerar las cotas sobre el tiempo de ciclo.

8.1.4. Experiencia computacional: caso de dos grúas en líneas con 10 ó más baños

El objetivo de este apartado es comprobar qué reducción en el número de secuencias resueltas se produce al pasar al algoritmo que introduce el concepto de Tiempo de Ciclo Acotado (TCA) en un grafo, partiendo del algoritmo inicialmente definido como MCC, por Lei y Wang (1991). A tal efecto, se ha realizado una experiencia computacional aplicando el algoritmo MCC y el algoritmo MCC mediante TCA a todos aquellos problemas con líneas de producción de 10 ó más tanques.

El conjunto de ejemplares analizados suman un total de 120:

- 10 ejemplares con 10 baños, de cada una de las 9 series de la experiencia computacional básica, que suponen un grupo de 90 ejemplares;
- 10 ejemplares con 14 baños, 10 más con 17 baños y 10 más con 20 baños, de la experiencia computacional ampliada, que amplían el grupo en 30 ejemplares más.

En la tabla siguiente (tabla 8.10), se demuestra cómo las afirmaciones anteriormente realizadas por el problema que Lei y Wang tomaron de referente en su estudio también se cumplen para estos 120 ejemplares.

En la última columna de dicha tabla, figura el porcentaje de grafos no se han resuelto al introducir las cotas sobre el tiempo de ciclo.

Serie de ejemplar. (m)	Algoritmo MCC		Algoritmo MCC con TCA		% reducción de secuencias evaluadas
	Secuencias planteadas (grafos planteados)	Secuencias evaluadas (grafos resueltos)	Secuencias planteadas (grafos planteados)	Secuencias evaluadas (grafos resueltos)	
S1 (10)	268	233	115	98	58
S2 (10)	248	203	120	99	51
S3 (10)	258	218	138	117	46
S4 (10)	301	273	134	117	57
S5 (10)	354	309	144	123	60
S6 (10)	250	210	125	102	51
S7 (10)	407	359	147	121	66
S8 (10)	480	437	174	153	65
S9 (10)	487	459	188	173	62
S7+ (14)	4763	3886	1756	1540	60
S7+ (17)	24033	17748	8752	7280	59
S7+ (20)	87998	62546	27962	22595	64

Tabla 8.10. Número de secuencias planteadas y resueltas mediante los algoritmos MCC y MCC con propiedades del grafo TCA (líneas de 10 a 20 baños)

Los resultados de programación de la grúa para cada ejemplar se encuentran en el Anexo 8. Así mismo, en el Anexo 9, se encuentra detallado el número de secuencias planteadas y evaluadas para cada uno de los ejemplares, según los algoritmos inicial y propuesto.

El porcentaje en el descenso de número de secuencias finalmente evaluadas respecto a las inicialmente necesarias según el algoritmo MCC de Lei y Wang (1991) parece más o menos similar en las 12 categorías establecidas (mayoritariamente, entre el 50% y el 60%). No obstante, si se observa más atentamente esta última columna puede matizarse la anterior afirmación:

- El número de secuencias finalmente evaluadas mediante su correspondiente grafo con Tiempo de Ciclo Acotado supone aproximadamente un 60% de las que son necesarias sin tener en cuenta cotas sobre el tiempo de ciclo (para los cuatro casos: 10 baños, 14 baños, 17 baños y 20 baños).
- Aunque la media de reducción en la cantidad de evaluaciones, en el caso de 10 tanques, se cifra en un 57%, si los resultados se analizan por los grupos creados según el tipo de ventanas temporales (VC, VS y VA), puede observarse como las cotas pudieran ser menos beneficiosas cuanto más reducido sea el intervalo de las ventanas temporales:

para Ventanas Cerradas VC (S1, S2, S3): media del 52%;
 para Ventanas Semiabiertas VS (S4, S5, S6): media del 56%;
 para Ventanas Abiertas VA (S7, S8, S9): media del 64%.

8.2. Comparación de los resultados entre casos mono-grúa y multi-grúa

En este apartado, se plantea cómo analizar los resultados de programaciones para una línea de idénticas necesidades que pueda disponer de una o dos grúas, los cuales fueron obtenidos mediante dos algoritmos:

- el algoritmo exacto, basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, para el caso de una grúa **1B,1F/1/1/U,∪**;
- el algoritmo también exacto, basado en el MCC (*Minimum Common Cycle*) usando un grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, para el caso de una grúa **1B,1F/1/2/U,∪**.

Utilizando el concepto de ratio de servicio, presentado por Larrubia y Mengual (2000), se podrá establecer un rango en una posible mejora (reducción del tiempo de ciclo) si se pretende duplicar el número de grúas en una línea de fabricación.

El **ratio de servicio RS(h)**, útil para comparar tiempos de ciclo en casos mono-grúa respecto multi-grúa, se expresa como función del número de grúas:

$$RS(h) = TC^*(h) * h \quad (8.1)$$

donde h es el número de grúas a evaluar y $TC^*(h)$ es el tiempo de ciclo óptimo para dicho número h de grúas.

El valor $RS(h)$, pues, se considerará mejor cuanto menor sea, dado que con una reducción del tiempo total de un objeto en la línea se incrementará la productividad. El objetivo básico de este ratio consiste en valorar con un mismo baremo el tiempo de estancia de una pieza en el sistema, independientemente del número de grúas.

Como complemento al concepto anterior, se define la diferencia de ratios de servicio en función del número de grúas:

$$\Delta RS = RS(1) - RS(2) \quad (8.2)$$

La casuística que puede presentarse es la siguiente:

- $\Delta RS > 0$: recomendable un sistema bi-grúa para incrementar la productividad de la línea;
- $\Delta RS < 0$: recomendable un sistema mono-grúa para incrementar la productividad de la línea;
- $\Delta RS = 0$: indiferente que el sistema sea bi-grúa o mono-grúa, aunque si se plantean temas de fiabilidad parece más sensato optar por disponer de dos grúas.

Con este valor ΔRS se podrá apreciar para cada uno de los 12 tipos de problemas tratados la variación en la productividad de una línea al pasar de 1 a 2 grúas que realicen las

funciones de transporte (9 de la experiencia computacional básica, en la tabla 8.11, y los otros 3 más en la tabla 8.12).

Serie (m=10)	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
ΔRS									
Media	230	215	297	199	213	180	-6	-8	17
Mínimo	56	87	169	96	81	32	-32	-40	-30
Máximo	377	357	408	340	318	323	28	51	68

Tabla 8.11. Determinación del ratio de servicio medio, mínimo y máximo (resultados mono-grúa y bi-grúa) para los problemas con 10 baños de las 9 series iniciales.

Nuevamente, como en el apartado anterior, el comportamiento del sistema al duplicar su número de grúas depende del tipo de ventanas temporales que tengan sus baños. Por esto, además de incluir los datos restantes (para líneas de 14, 17 y 20 baños), se ha agrupado los datos de las 9 series iniciales según el tipo de ventana temporal (VC, VS y VA) en la tabla 8.12.

Serie	S1-S3, VC (m=10)	S4-6, VS (m=10)	S7-S9, VA (m=10)	S7+ (m=14)	S7+ (m=17)	S7+ (m=20)
ΔRS						
Media	247	197	1	216	490	652
Mínimo	104	70	49	54	392	514
Máximo	381	327	-34	389	614	767

Tabla 8.12. Determinación del ratio de servicio medio, mínimo y máximo (resultados mono-grúa y bi-grúa) para los problemas con 10 baños de la experiencia computacional básica (agrupados por tipos de ventanas) y con 14, 17 y 20 baños de la experiencia computacional ampliada S7+.

Como conclusión, se puede afirmar que en caso de presencia en un sistema de ventanas temporales sobre los baños de intervalo reducido (Ventanas Cerradas) la duplicidad de grúas es altamente beneficiosa, ya que en media se logran duraciones importantes (247 unidades de tiempo). Esta diferencia se ve reducida en el caso de Ventanas Semiabiertas (en media, 197 unidades de tiempo). Finalmente, en casos de Ventanas Abiertas se produce un equilibrio de ratios de servicio entre los dos casos (lo que supone un ΔRS medio de apenas 1 unidad de tiempo). Incluso, para determinados ejemplares la coordinación de movimientos entre ambas grúas llega a provocar que el caso mono-grúa sea preferible al caso bi-grúa.

Analizando los datos según el número de baños del sistema productivo, a medida que éste aumenta se hace cada vez más necesaria la presencia de una segunda grúa, lo que supone en el caso de 20 baños una media de 652 unidades de tiempo menos por ejemplar, e incluso un máximo de 767 unidades de tiempo.

9. APLICACIÓN A UN CASO REAL EN EL CAMPO DE LA ELECTRÓNICA

9.1. Introducción a la empresa

La problemática planteada hasta este momento se sustenta en la situación que afrontan algunas industrias, como las industrias electrónicas. En concreto, el problema HSP se plantea para la fabricación de PCBs (*printed circuit boards*), dentro de un conjunto de empresas dedicadas a la fabricación de circuitos impresos.

La empresa en cuestión fabrica placas de circuitos impresos para la industria electrónica. Sus instalaciones están diseñadas para fabricar PCBs multicapa (es decir, de varias capas) de muy escaso grosor, hasta 16 capas (por ejemplo, 0,35 mm. para cuatro capas, o 0,55 mm. para seis capas: el caso de las tarjetas PCMCIA), circuitos con todo tipo de agujeros (como *blind* y *buried*), etc.

El objetivo de empresas como ésta es alcanzar niveles importantes de calidad en los circuitos impresos para sus clientes (su eslogan es *Advanced quality on time*), realidad que se logra con la integración de tecnología, servicio, competitividad y calidad de producto. Esta vertiente ha obligado a la empresa a disponer desde 1991 de la certificación ISO 9002, que a su vez ha revertido en otros galardones en el campo de los circuitos impresos.

9.2. Los productos fabricados

La empresa utiliza algunas de las más avanzadas tecnologías y métodos de producción. La fabricación se centra en impresiones multicapa, con gran densidad de imagen impresa y que pueden mostrar diversos tipos de acabado: estaño/conductor (*tin/lead*), dorado químico/galvanizado (*chemical/galvanic gold*), carbono (*carbon*), níquel (*nickel*), etc.

Para conseguir que las capas internas e la instalación de circuitos se consiga de la manera adecuada, se requieren modernas instalaciones que fabriquen productos eficientes para circuitos con agujeros ciegos y tapados (*blind and buried holes*), y paneles opacos adaptados a tecnologías de fijación y con impedancia controlada. Dicha empresa también cuenta entre su experiencia en circuitos con pistas de ancho muy fino, dispositivos SMD de ajuste fino (*fine-pitch SMD*), agujeros sobre terminales de conexión (*hole on pad*) y chips sobre placas (*COB, Chip On Board*), dada la continua y creciente demanda de circuitos con mayores densidades de interconexión, desde un punto de vista productivo.

Equipo e instalaciones

Las instalaciones de producción multicapas usan equipos bastante sofisticados, lo que permite incrementar la calidad y la competitividad. En concreto, se dispone de una línea automatizada para capas internas con lacas fotosensibles, presiones al vapor de precalentamiento, control de imagen óptica sobre las capas internas, y otras prestaciones adicionales. Así mismo, se dispone de moderna maquinaria que permite taladrar, realizar tests eléctricos o tests ópticos, líneas de recubrimiento de metales como el níquel (*plating*), etc.

9.3. El proceso productivo

En este apartado, se describe el conjunto de operaciones que reciben las placas de circuitos impresos a lo largo de una línea productiva, formada por 37 baños o tanques. Se utiliza las expresiones “Baños” para cualquier punto en la línea de trabajo, aunque no sea propiamente un recipiente de este tipo: esto supone que los lugares de carga y descarga y el almacén intermedio entre dichos lugares y la línea de baños reales.

La barra es el elemento trasladado por la grúa a lo largo de la línea de producción, que contiene un conjunto de placas de circuitos colgadas de alguno de sus barras travesaños.

Las operaciones o etapas del proceso productivo que recorren las diferentes unidades de producto, su asignación inicial a los baños, y el intervalo en que deben realizarse (duración mínima y máxima) es la siguiente:

Operación. Descripción	Baño asignado	Ventana temporal
1. Carga de la barra.	“Baño” 1.	(420-)
2. Paso por el almacén (espera en entrada).	“Baños” 3 a 8.	(0-)
3. Revelado y revelado 2.	Baños 15 y 16.	(100-)
4. Lavado con pulverizador.	Baño 18.	(30-)
5. Lavado con agua.	Baño 22.	(30-)
6. Desengrase.	Baño 21.	(90-)
7. Lavado con agua 1 y 2.	Baños 22 y 23.	(30-)
8. Microengrase.	Baño 25.	(20- 35)
9. Lavado con agua 1 y 2.	Baños 24 y 23.	(30-)
10. Ácido sulfúrico.	Baño 27.	(60-180)
11. Baño de cobre.	Baños 28 a 37.	(4800-)
12. Lavados con agua 1 y 2.	Baños 26 y 23.	(40-)
13. Ácido fluobórico.	Baño 20.	(60-180)
14. Baño de estaño - plomo.	Baño 19.	(480-540)
15. Lavados con pulverizador 1 y 2.	Baños 18 y 17.	(30-)
16. Lavado con agua.	Baño 14.	(90-)
17. Secadero.	Baño 13.	(420-)
18. Paso por el almacén (espera en salida).	“Baños” 3 a 8.	(0-)
19. Descarga de la barra.	“Baño” 2.	(420-)

Además, puede realizarse algún proceso alternativo, como aquél que después del paso por el secadero (operación 17 y baño 13), pasaría por el baño de desmetalizado (baño 12), dos lavaderos (baños 11 y 10), de nuevo por otro secadero (baño 9), lo cual enlazaría con la operación 18, de paso por el almacén. Entre los dos recorridos consecutivos que deba realizar una barra con placas que siguen los tratamientos, la barra permanece aparcada en alguno de los “Baños” 3 a 8, cuya función es el **Paso por el almacén** de las barras, bien sea de entrada, bien sea de salida.

La descripción anterior corresponde a una de las principales líneas automatizadas de fabricación de PCBs, que cuenta con tres grúas, un mismo sitio de carga y descarga, y la presencia de diversos tanques que se destinan a efectuar una misma función (por ejemplo,

10 tanques para el baño de cobre), ya que requiere un tiempo mínimo bastante superior al del resto de operaciones. La línea de producción se compone de los siguientes baños:

Baño 1: Carga.

Se realiza la carga de las placas a tratar en las barras que las deberán sustentar a lo largo del proceso, y que serán manejadas por los puentes-grúa.

Baño 2: Descarga.

Se realiza la descarga de las placas que han sido tratadas en los baños y que estaban sujetas a las barras manejadas por los puentes-grúa.

Baños 3 a 8: Almacén de barras

Se trata de una zona sin baños pero ocupada por las barras que han sido liberadas de las placas tratadas (baño 2) y esperan ser retomadas para reiniciar el proceso en la línea cuando sean necesarias en el baño 1.

Baño 9: Secadero (de barras o bastidores).

Se secan las barras mediante aplicación de un gas comprimido para evitar goteos antes que de ser liberadas de las placas tratadas (baño 2).

Baños 10, 11 y 14: Lavaderos.

Cada uno contiene su respectivo baño, que limpia a las placas procedentes de otras operaciones y que deben quedar a punto para las siguientes reacciones o para su finalización.

Baño 12: Desmetalizado.

Contiene un baño que sirve para eliminar los excesos de recubrimiento de metal sobre las placas.

Baño 13: Secadero (de placas de circuitos).

Se secan las placas de circuitos mediante aplicación de un gas comprimido para evitar que estén goteantes cuando se saquen las barras que las sustentan (baño 2).

Baños 15 y 16: Revelados.

Mediante un negativo fotosensible, estos baños permiten que quede fijada la silueta de las conexiones (que deberán ser rellenadas de estaño/plomo).

Baños 17 y 18: Lavados mediante pulverizador.

Cada uno de los baños debe limpiar las placas después de haber recibido el ataque químico de la disolución con estaño/plomo.

Baño 19: Baño de estaño-plomo (Sn/Pb).

Contiene un baño con productos químicos buenos conductores, como son estaño y plomo, que quedan adheridos a las conexiones.

Baño 20: Baño de ácido fluobórico.

El baño con este ácido permite que determinadas disoluciones básicas queden adheridas a las placas.

Baño 21: Desengrasador.

Contiene un baño que facilita la eliminación de aquellas sustancias que difuminen la máscara de conexiones que debe ser atacada por los ácidos.

Baños 22 a 24: Lavados.

Estos baños permiten la limpieza de impurezas antes o después de los ataques de otras disoluciones químicas.

Baño 25. Microengrase

Contiene un baño que facilita la fijación de sustancias en la máscara de conexiones que debe ser atacada por los ácidos.

Baño 26: Lavado.

Contiene un baño que realiza la limpieza de impurezas del cobre.

Baño 27: Ácido sulfúrico.

El baño con este ácido facilita que la posterior disolución de cobre quede aplicada sobre las placas.

Baños 28 a 37: Baño de cobre.

Son una serie de baños con el mismo producto químico, cobre, que como buen conductor, facilita las conexiones en las placas.

En la tabla 9.1, se incluyen los valores de tiempos de proceso mínimos y máximos de las ventanas temporales, para que cada operación se realice de la forma esperada.

Baño	Función	a_i	b_i
1	Carga	420	
2	Descarga	420	
3-8	Almacén (de barras)	0	
9	Secadero (de barras o bastidores)	180	
10	Lavadero	60	
11	Lavadero	120	
12	Desmetalizado	420	
13	Secadero (de placas de circuitos).	420	
14	Lavadero	90	
15	Primer Revelado	100	
16	Segundo Revelado	30	
17	Lavado mediante pulverizador	30	
18	Lavado mediante pulverizador 2	30	
19	Baño de estaño/plomo (Sn/Pb)	480	540
20	Baño de ácido fluobórico	60	180
21	Desengrasador	180	360
22	Lavado con agua	90	
23-24	Lavado con agua 2	30	
25	Microengrase	20	35
26	Lavado	40	
27	Acido sulfúrico	60	180
28-37	Baño de cobre	4800	

Tabla 9.1. Datos de las ventanas temporales en los baños de la línea real (+B,+F/1/3/U, \cap).

9.4. Planteo para la resolución de la línea en configuración 1B,1F/1/p/U, \cup

La línea de producción, descrita en el apartado anterior, cuenta con una estación única de carga y descarga (\cap). Esta característica supone una diferencia respecto la variante tratada hasta el momento en este trabajo, en que los objetos entran por un extremo de la línea y salen por el otro (\cup). En este apartado, se plantea una adaptación del funcionamiento de la línea a la situación para la cual se han planteado los anteriores algoritmos.

Así, adaptando los anteriores datos para que en una línea la circulación de objetos o piezas (barras, en este caso) se realice en una única dirección, conlleva, como resultado de este proceso de ajuste, una línea de producción con 20 operaciones a realizar. La reducción que existe de 37 a 30 “baños” comporta que la descarga sea externa a la línea de tanques (se haría después de la descarga, baño 30, y antes de una nueva carga, baño 0), y además se considera que en la anterior descripción algunos lavados se producían por duplicado. La nueva distribución de tanques es tal como la que muestra la tabla 9.2.

Baño	Función	a_i	b_i
0	Carga		
1	Revelado	100	
2	Revelado 2	30	
3	Lavadero pulverizador	30	
4	Lavadero agua	90	
5	Desengrase	180	360
6	Lavado agua 1	90	
7	Lavado agua 2	30	
8	Microengrase	20	35
9	Lavado agua 1	30	
10	Lavado agua 2	30	
11	Ácido sulfúrico	60	180
12-21	Baño cobre	4800	
22	Lavado agua 1	40	
23	Lavado agua 2	30	
24	Ácido fluobórico	60	180
25	Baño estaño-plomo	480	540
26	Lavado pulverizador 1	30	
27	Lavado pulverizador 2	30	
28	Lavado agua	90	
29	Secadero	420	
30	Descarga		

Tabla 9.2. Datos de las ventanas temporales en los baños de la línea de características 1B,1F/1/p/U, \cup .

Se supone que los tiempos de desplazamiento de la grúa con carga, entre dos baños inmediatamente consecutivos, tienen una duración constante por la disposición homogénea de los tanques. Para los tiempos de desplazamiento de la grúa entre dos baños cualesquiera, se ha partido de la expresión:

$$e_{i,j} = 4 + |i-j| \quad i \neq j \quad (9.1)$$

siendo i y j dos tanques cualesquiera o estaciones de carga o descarga ($i,j=0,\dots,m+1$).

En caso de trasladar algún objeto entre baños consecutivos se supone que pasarán 5 segundos para levantar el objeto, 5 segundos más para depositarlo en el tanque destino y aún 5 segundos más para que el objeto pueda escurrirse. En total, se requieren 15 segundos más que los inicialmente necesarios para realizar los movimientos de la grúa sin ningún objeto.

Para el caso de los 10 baños con la disolución de cobre (tanques 12 a 21), con un tiempo de operación muy alto, éste se repartirá entre los 10 tanques, para que en cada ciclo se recoja y se deposite un objeto en un de ellos. Se utilizará como tiempo de movimiento de la grúa respecto a dicha operación sobre las placas de circuitos aquel valor más desfavorable entre los 10 posibles.

En definitiva, el problema real analizado queda planteado, siguiendo la nomenclatura utilizada, tal como se describe a continuación:

Restricciones de las ventanas temporales en los baños

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	100	30	30	90	180	90	30	20	30	30
b_i					360			35		

Tabla 9.3. Ventanas temporales en los baños de la línea de características 1B,1F/1/p/U,∅.

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_i	60	480	40	30	60	480	30	30	90	420
b_i	180				180	540				

Tabla 9.3bis. Ventanas temporales en los baños de la línea de características 1B,1F/1/p/U,∅.

Restricciones de tiempos de movimientos de la grúa

Se recogen los tiempos (en segundos) de movimiento de la grúa con carga, y de traslado entre una estación i cualquiera y alguno de los 10 baños de cobre. El resto de tiempos de traslado en vacío de la grúa siguen la fórmula 9.1.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
$e_{i,12}$	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15

Tabla 9.4. Tiempos de traslado con carga y sin carga entre un baño cualquiera y un baño con cobre de la línea de características 1B,1F/1/p/U,∅.

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f_i	29	29	20	20	20	20	20	20	20	20	
$e_{i,12}$	14	0	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Tabla 9.4bis. Tiempos de traslado con carga y sin carga entre un baño cualquiera y un baño con cobre

de la línea de características 1B,1F/1/p/U,∪.

9.5. Resolución de la línea para el caso mono-grúa (1B,1F/1/1/U,∪)

La línea de producción con los parámetros y características del apartado anterior ha sido resuelta bajo el supuesto de una única grúa para realizar todas las operaciones de transporte. Mediante la aplicación del algoritmo basado en el grafo secuencial y mediante el algoritmo del Tiempo de Ciclo Acotado, se ha llegado a los siguientes resultados:

- Algoritmo heurístico (utilizando Grafo Secuencial): TC = 725”
- Algoritmo heurístico, basado en el número de piezas en el sistema (utilizando Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado): TC = 822”
- Algoritmo combinado AC (parte 1: heurística basada en piezas; parte 2: *branch and bound* con Grafo Secuencial y Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado): TC = 725”
- Algoritmo combinado AC’ (parte 1: heurística basada en n° de piezas; parte 2: *branch and bound*): TC = 725”

Por lo tanto, la mejor programación cíclica para una grúa con una línea de estas características, con un tiempo de ciclo de 725 segundos, se encuentra detallada en la tabla 9.5. **H** indica el vector de la secuencia de movimientos de la grúa y **T** los instantes de tiempo asociados a los inicios de los respectivos movimientos; **H’** son los baños destinos y **T’** los instantes de llegada de los objetos; **W** es el vector de tiempos de espera en los baños indicados en el vector **H**.

grúa	H	T	H'	T'	W
1	0	0	1	20	0
1	13	45	14	65	0
1	15	70	16	90	0
1	17	95	18	115	0
1	20	121	21	141	0
1	19	147	20	167	0
1	1	199	2	219	0
1	2	249	3	269	30
1	3	299	4	319	30
1	5	324	6	344	0
1	12	363	13	392	0
1	18	401	19	421	0
1	6	447	7	467	0
1	10	474	11	494	0
1	7	502	8	522	0
1	9	527	10	547	0
1	8	553	9	573	0
1	11	579	12	608	0
1	16	625	17	645	0
1	14	652	15	672	0

1	4	696	5	716	0
---	---	-----	---	-----	---

Tabla 9.5. Mejor programación hallada con una sola grúa para el caso real de 20 operaciones y 29 baños.

9.6. Resolución de la línea para el caso multi-grúa (1B,1F/1/2/U,∪)

En esta ocasión, la línea de producción con los parámetros y características del apartado 9.4 se resuelve para el supuesto de dos grúas que se reparten las operaciones de transporte. Mediante el algoritmo para el caso con 2 grúas (C2HSP), el algoritmo MCC adaptado a la resolución mediante grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, se han conseguido los resultados expuestos a continuación.

- **Partición 0:**
piv^o = 12

Paso	Grúa 1	Grúa 2	Cotas
1	tc ₁ (piv ^o)=380	tc ₂ (piv ^o)=526	[0, ∞]
2	tc ₁ (piv ^o)=526		[526, ∞]

Tabla 9.6. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo pivote el baño 12 (algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA).

$$\text{Resultado: } \mathbf{TC^*(12) = 526}$$

Se inicia la exploración del baño pivote hacia la derecha [tc₁*(piv) < tc₂*(piv)].

- **Partición 1:**
piv = piv+1 = 13

Para resolver esta situación, en caso de aplicar el algoritmo MCC adaptado a la resolución mediante Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, el número de secuencias evaluadas y de grafos resueltos se convierte en una cantidad elevada, que fácilmente supera las 100.000 iteraciones.

Si se analiza la causa de esta dilatada resolución, se puede observar que los 12 primeros baños tienen como a duración mínima a_i de estancia de los objetos en los baños un máximo de 180 segundos, mientras que en el baño 12 este valor lo supera ampliamente con $a_{12}=480$. Esto implica que siguiendo la estructura arborescente escogida, *branch and bound* de baños (BBb), gran cantidad de secuencias sean potencialmente factibles hasta el último nivel del árbol, pero al insertar el último movimiento considerado (el del baño 12), la cota mínima evita la factibilidad de las secuencias propuestas.

Por lo tanto, es oportuno cuestionarse si es necesario llevar a cabo todas estas evaluaciones, que no parecen conducir a ningún sitio, para alcanzar el resultado con mayor rapidez y minimizar el número de evaluaciones. La respuesta afirmativa a la existencia de un procedimiento más rápido para resolver esta problemática se basa en aplicar el algoritmo sobre el problema inverso. En el próximo apartado, se detalla cuál es el problema inverso.

Paso	Grúa 1	Grúa 2	Cotas
1	$tc_1(\text{piv}) \geq 554$		[380, 526]

Tabla 9.7. Determinación del tiempo de ciclo común para ambas grúas, siendo pivote el baño 13 (algoritmo MCC adaptado al grafo con TCA).

Resultado: $TC^*(13) \geq 554$

Se cambia la exploración del pivote, ahora hacia la izquierda.

Como no puede darse la situación que $TC^*(14) < 526$, al aumentar $tc_1(\text{piv})$ conforme el pivote aumenta en según su posición en los baños, se produce el final de la exploración de particiones hacia la derecha. Además, cualquier otra partición hacia la izquierda proporciona un tiempo de ciclo común con valor superior, dado que:

$$[tc_2^*(11)=526] \geq [TC^*(12)=526]$$

Así pues, se consigue llegar al final de la aplicación del algoritmo con el tiempo de ciclo óptimo $TC^*(12)=526$, siendo las programaciones para ambas grúas las siguientes:

grúa	H_1^*	T_1^*	H'_1^*	T'_1^*	W_1^*
1	0	0	1	20	0
1	10	33	11	53	0
1	9	59	10	79	0
1	11	113	12	142	29
1	7	160	8	180	0
1	8	200	9	220	20
1	6	227	7	247	0
1	5	253	6	273	0
1	4	399	5	419	120
1	3	425	4	445	0
1	2	451	3	471	0
1	1	477	2	497	0
1	0	526			

grúa	H_2^*	T_2^*	H'_2^*	T'_2^*	W_2^*
2	12	0	13	29	0
2	18	38	19	58	0
2	17	64	18	84	0
2	16	90	17	110	0
2	15	116	16	136	0
2	20	144	21	164	0
2	19	170	20	190	0
2	14	442	15	462	242
2	13	468	14	488	0
2	12	526			

Tabla 9.8. Programación óptima de las dos grúas para el caso real de 20 operaciones y 29 baños (pivote=12).

Coordinando ambas grúas para que tomen como referencia el instante 0 de carga del objeto del baño 0 por parte de la grúa 1, y que los objetos permanezcan el mínimo tiempo $a_{12}=480$ en el pivote, el instante de recogida de un objeto de la estación de carga de la grúa 2 (baño 12) debe ser el instante 622, que equivale al instante 96 del siguiente ciclo. Los nuevos instantes relativos de tiempo para la grúa 2 en un ciclo de movimientos se encuentran en la tabla 9.9.

grúa	H ₁ *	T ₁ *	H' ₁ *	T' ₁ *	W ₁ *
1	0	0	1	20	0
1	10	33	11	53	0
1	9	59	10	79	0
1	11	113	12	142	29
1	7	160	8	180	0
1	8	200	9	220	20
1	6	227	7	247	0
1	5	253	6	273	0
1	4	399	5	419	120
1	3	425	4	445	0
1	2	451	3	471	0
1	1	477	2	497	0
1	0	526			

grúa	H ₂ *	T ₂ *	H' ₂ *	T' ₂ *	W ₂ *
2	12	96	13	125	0
2	18	134	19	154	0
2	17	160	18	180	0
2	16	186	17	206	0
2	15	212	16	232	0
2	20	240	21	260	0
2	19	266	20	286	0
2	14	12	15	32	242
2	13	38	14	58	0
2	12	96			

Tabla 9.9. Programación óptima (coordinada) de las dos grúas para el caso real de 20 operaciones y 29 baños (pivote=baño 12).

9.7. Principios y aplicación de la transformación simétrica

9.7.1. Transformación simétrica: el ejemplar directo y el ejemplar inverso

Tal como se presenta en Companys, Bautista y Mateo (2000), en algunos problemas combinatorios, como el que nos ocupa, existe una transformación simétrica tal que permite asociar a cada ejemplar del problema otro llamado inverso. Así, las soluciones de ambos ejemplares están también asociadas dos a dos, donde pasar de una solución a la asociada consiste en utilizar las consecuencias de la transformación básica. Cada pareja de soluciones tiene el mismo valor de la función objetivo, por lo que una solución óptima de un ejemplar está asociada a una solución óptima del otro. Esto comporta que sea indiferente resolver un ejemplar o su inverso, aunque el comportamiento de ambos ejemplares frente a los algoritmos pueda ser muy diferente, como en esta ocasión sucede.

Una formalización de la explicación anterior lleva a considerar asociado al problema P , que se desea resolver, dos transformaciones Φ y φ tales que:

- Φ transforma un ejemplar cualquiera e del problema P en un ejemplar e' de un problema P' :

$$e' = \Phi(e)$$

- φ^{-1} transforma una solución s' de e' en una solución s de e :

$$s = \varphi^{-1}(s')$$

Se sobreentiende que si las soluciones se consideran factibles y óptimas, por ejemplo, φ^{-1} transforma una solución factible en una solución factible y una solución óptima en una solución óptima. Para que el procedimiento sea útil, obtener s' a partir de e' debe ser más fácil que obtener directamente s a partir de e (la disminución de complejidad computacional debe compensar la debida a transformaciones).

En este caso, la simetría de un problema del tipo $1B,1F/1/1/U,\cup$, que es un subproblema de un problema con dos grúas ($1B,1F/1/2/U,\cup$), permite esta transformación. Sólo se trata de observar la solución s que comporta un ejemplar e , analizando un ciclo de movimientos empezando por el final y observando cómo afecta a la estructura de datos para que el ejemplar e' conduzca a la solución s' , idéntica a la solución s .

Tomando los resultados de la programación de la primera grúa de la tabla 9.8, e invirtiendo los movimientos a lo largo del ciclo, se considera a continuación su equivalencia con una línea de producción que define la actual estación de carga (primera) como la de descarga (última) y viceversa. Recuérdese que la parte de la línea tratada tenía 11 baños, por lo que la estación o baño de descarga era el número 12.

tiempos	H*	T*	H'*	T'*	W*
	0	0			
2	29	1	49	23	
3	55	2	75	0	
4	81	3	101	0	
5	107	4	127	0	
6	253	5	273	120	
7	279	6	299	0	
9	306	8	326	0	
8	346	7	366	20	
12	384	11	413	0	
10	447	9	467	29	
11	473	10	493	0	
1	506	0	526	0	

baños	H*	T*	H'*	T'*	W*
12	0				
10	29	11	49	23	
9	55	10	75	0	
8	81	9	101	0	
7	107	8	127	0	
6	253	7	273	120	
5	279	6	299	0	
3	306	4	326	0	
4	346	5	366	20	
0	384	1	413	0	
2	447	3	467	29	
1	473	2	493	0	
11	506	12	526	0	

Tabla 9.9. Programación óptima de la grúa 1 (11 primeros baños), en el caso real 20 operaciones y 29 baños. Izquierda: cambio de referencia temporal (en rojo); derecha: cambio de referencia física (en azul).

En la parte de la izquierda de la tabla 9.9, se procede a cambiar la referencia de tiempo para los resultados de la tabla 9.8, lo que supone fijar como instantes de llegada o marcha de los objetos de los baños el tiempo complementario al tiempo de ciclo de 526 segundos. Es decir, lo que antes era el instante 526 de final de ciclo pasa a ser el instante 0 de referencia y que el final del ciclo, ahora en la primera fila, se convierta en instante 0.

En la parte de la derecha de la tabla 9.9, se procede a cambiar la referencia física de baños para los resultados anteriores de la tabla 9.9, lo que implica fijar como baños de llegada o marcha de los objetos el baño complementario al número de baños, incluyendo el de descarga, de 12 baños. Así, el baño 12 anterior de final de línea se convierte en el baño 0 de inicio y el baño 0, de carga, ahora aparece como baño 12, de descarga.

El resultado equivalente s' , que ofrece la aplicación del mismo algoritmo sobre el ejemplar inverso e' , sería el que recoge la tabla 9.10.

H*	T*	H*	T*	W*
0	0	1	29	0
2	63	3	83	29
1	89	2	109	0
11	122	12	142	0
10	171	11	191	23
9	197	10	217	0
8	223	9	243	0
7	249	8	269	0
6	395	7	415	120
5	421	6	441	0
3	448	4	468	0
4	488	5	508	20
0	526			

Tabla 9.10. Programación óptima de la grúa 1 (11 primeros baños), en el caso real 20 operaciones y 29 baños. Solución s' del ejemplar inverso e' .

9.7.2. Aplicación al caso de la grúa 1 con pivote en el baño 12

Ejemplar directo

- Restricciones de las ventanas temporales en los baños

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	100	30	30	90	180	90	30	20	30	30	60	480
b_i					360			35			180	

Tabla 9.13. Ventanas temporales en los baños de la línea del caso real 1B,1F/1/1/U, \cup (grúa 1). Ejemplar de problema directo.

- Restricciones de tiempos de movimientos de la grúa

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	25	26
1	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	24	25
2	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	23	24
3	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12	22	23
4	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11	21	22
5	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10	20	21
6	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9	19	20
7	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8	18	19
8	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7	17	18
9	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6	16	17
10	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5	15	16
11	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	14	15
12	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	0	14
13	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	0

Tabla 9.11. Tiempos de traslado sin carga entre dos baños cualesquiera en el caso real (grúa 1). Ejemplar de problema directo.

Se recogen los tiempos (en segundos) de movimiento de la grúa de traslado entre dos estaciones i y j cualesquiera, y en la siguiente tabla, de movimiento de la grúa con carga.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	29	29

Tabla 9.12. Tiempos de traslado con carga en el caso real (grúa 1). Ejemplar de problema directo.

Ejemplar inverso

- Restricciones de las ventanas temporales en los baños

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	480	60	30	30	20	30	90	180	90	30	30	100
b_i		180			35			360				

Tabla 9.14. Ventanas temporales en los baños de la línea del caso real 1B,1F/1/1/U,∪ (grúa 1). Ejemplar de problema inverso.

- Restricciones de tiempos de movimientos de la grúa

Se recogen los tiempos (en segundos) de movimiento de la grúa de traslado entre dos estaciones i y j cualesquiera, y en la siguiente tabla, de movimiento de la grúa con carga.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	14	0	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	15	14	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	16	15	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	17	16	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	18	17	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11	12
6	19	18	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10	11
7	20	19	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9	10
8	21	20	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8	9
9	22	21	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7	8
10	23	22	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6	7
11	24	23	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5	6
12	25	24	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	5
13	26	25	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0

Tabla 9.15. Tiempos de traslado sin carga entre dos baños cualesquiera en el caso real (grúa 1). Ejemplar de problema inverso.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	29	29	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Tabla 9.16. Tiempos de traslado con carga en el caso real (grúa 1). Ejemplar de problema inverso.

Resolución del ejemplar inverso

Si se aplica un *branch and bound* de baños (BBb) a los datos del ejemplar inverso del problema de las tablas 9.14, 9.15 y 9.16, el vértice raíz en el nivel 1 está formado por la secuencia $\mathbf{H} = \langle h_0, h_1 \rangle$. Dicho vector supone que la grúa sólo visite el primer tanque.

Se trata, pues, de resolver el siguiente programa lineal, asociado a la subsecuencia \mathbf{H} anterior:

$$\begin{aligned}
 &[\text{MIN}] \text{ TC} \\
 &t_1 \geq 480 + 29 = 519 \\
 &t_1 \geq 29 + 0 = 29 \\
 &\text{TC} - t_1 \geq 29 + 15 = 44
 \end{aligned}$$

Incluso, sin necesidad de resolver el problema mediante cualquier procedimiento, puede observarse como sumando la primera y tercera inecuaciones (la segunda inecuación está dominada por la primera), el tiempo de ciclo TC tiene que ser: $\text{TC} \geq 563$

En definitiva, el árbol de búsqueda de la solución en dicho problema se limitaría al vértice raíz, dado que las cotas inferior y superior para el tiempo de ciclo previamente (cuando el baño pivote era el baño 12) se habían fijado en 480" (máximo de las duraciones mínimas de las operaciones) y 526" (óptimo con el pivote en el baño 12).

9.8. Evaluación del número de grafos resueltos para el caso multi-grúa (1B,1F/1/2/U,∪)

En la tabla siguiente, tal como se realizó en el capítulo 8 se compara el número de secuencias planteadas y resueltas finalmente, mediante grafos con Tiempo de Ciclo Acotado en caso de aprovechar las propiedades de las cotas en la resolución con grafos TCA. La aplicación estricta del algoritmo MCC, de Lei y Wang (1991), comportaba un tiempo de ejecución muy elevado.

		Algoritmo MCC con TCA	
		Secuencias planteadas (grafos planteados)	Secuencias evaluadas (grafos resueltos)
Número de grafos	329	316	

Tabla 9.17. Comparación del número de grafos planteados y resueltos en el algoritmo MCC con TCA.

El análisis de estos datos permite concluir que nuevamente la utilización del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado permite obtener el resultado óptimo con una mínima cantidad de grafos evaluados.

9.9. Recomendaciones de diseño de la línea de producción

La línea de producción descrita cuenta actualmente con tres grúas, que realizan las operaciones de un ciclo de movimientos en 595". Los objetos se desplazan indistintamente de izquierda a derecha o a la inversa. En caso de aplicar la distribución en planta de los tanques de proceso desarrollada en el apartado 9.4, se ha estudiado el uso de una o dos grúas.

En el caso de una grúa, se ha conseguido alcanzar un ciclo de 725", mientras que utilizando una segunda grúa se puede lograr pasar a un ciclo de 526". Por tanto, se observa que la duración del ciclo se ha reducido en 69", con la manipulación de objetos por parte de una grúa menos.

No obstante, debe considerarse que en la actualidad las barras de las cuales están colgados los objetos o placas que reciben tratamientos en los baños van a parar cuando finalizan el proceso productivo al punto de entrada a éste. Con la nueva distribución de baños esto no ocurre, pues las barras tienen como destino la punta de la línea que no es el lugar de carga. Por lo tanto, debería evaluarse si la inversión en el sistema mecánico que devolviera las barras del lugar de descarga al lugar de carga se viese compensado por el incremento de productividad previsto.

Otra posibilidad, consistente en que las grúas devolvieran las barras a la estación de carga, no se contempla, dado que ambas grúas comparten un mismo carril y no pueden cruzarse.

10. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

10.1. Conclusiones

10.1.1. La situación real analizada

En sistemas de fabricación flexible, como aquéllos en que una grúa realiza las operaciones de transporte de los objetos o piezas a lo largo de una línea de producción, es necesario coordinar los instantes de tiempo en la realización de dichos movimientos de grúa, con el objetivo de maximizar la producción. Además, en las líneas de producción de objetos como placas de circuito impreso, que se someten a tratamientos químicos, el tiempo de duración de estas operaciones debe encontrarse entre unos valores mínimo y máximo, que configuran las llamadas ventanas temporales.

En este contexto productivo, pueden realizarse diversas clasificaciones según las características de los elementos de la línea de producción. Otro factor que permite diferenciar los tipos de problemas es la variedad de los objetos que sean trasladados por la grúa a lo largo de la misma. En caso que todos los objetos sean idénticos, el problema se convierte en establecer una secuencia de movimientos para la grúa, que deberá repetirse cuantas veces sea necesario.

10.1.2. Estructura del trabajo

El trabajo desarrollado en la presente Tesis Doctoral ha seguido el siguiente esquema, tal como se puede observar a lo largo de la memoria realizada.

1. En primer lugar, se ha enmarcado el problema en el contexto de la producción, al situarlo en el ámbito de la dirección de operaciones productivas, concretamente en la planificación y la programación de la producción.
2. Para situar al lector sobre la variante más extensamente tratada y algunas otras variantes del problema, derivadas de ésta, se ha presentado una clasificación con los diferentes tipos de problema.
3. Algunos de los algoritmos propuestos en artículos han sido analizados en mayor medida y a la hora de implementar nuevos algoritmos se han considerado como una referencia en sus puntos fuertes. Se ha procurado que las incorporaciones propuestas sobre el esquema basado en la utilización de grafos provocaran un incremento en la eficiencia de los algoritmos.
4. Para comprobar y demostrar la validez de los procedimientos propuestos y sus propiedades, se ha optado por la creación de juegos de datos. Además, se han utilizado algunos problemas estándares para validar la efectividad de los algoritmos aquí reseñados en un ámbito real.
5. Se ha enlazado las ideas reflejadas en los algoritmos diseñados con posibles casos reales, en una primera aproximación.

10.1.3. Los algoritmos utilizados

Alguno de los algoritmos planteados, el algoritmo de *branch and bound* basado en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado, permite alcanzar la solución óptima para un determinado ejemplar de problema, siempre que la dimensión (número de baños de la línea) no sea muy elevada.

Otros algoritmos utilizados, como es el caso del algoritmo de *branch and bound* basado en el grafo secuencial o el algoritmo de exploración de soluciones basado en el número inicial por ciclo de objetos en el sistema, aportan a menudo mayor rapidez en obtener una solución, si bien no garantizan la condición de óptimo para la solución obtenida. No obstante, por ejemplo, en el algoritmo del grafo secuencial se garantizan resultados muy próximos al resultado deseado. En ambos casos, las programaciones de los instantes relativos por ciclo para cada operación son perfectamente factibles en un sistema productivo con dos tipos de restricciones: una ventana temporal para cada baño y unos tiempos para distintos desplazamientos de la grúa, cargada o vacía.

10.1.4. La aportación de los grafos con Tiempo de Ciclo Acotado

El problema de obtener un ciclo de movimientos de grúas, en caso de objetos idénticos, presenta $m+2$ variables inicialmente, correspondientes a los $m+1$ elementos del vector de tiempos \mathbf{T} más el tiempo de ciclo, que correspondería al inicio del siguiente movimiento, primero del siguiente ciclo. Dado que todas las restricciones indican una diferencia entre dos de las variables, el problema puede expresarse en forma de grafo de manera equivalente. No obstante, la última de las variables a determinar (el tiempo de ciclo) deberá aparecer en el valor de los arcos que enlazan los diversos vértices del grafo.

En primer lugar, puede ser que el conjunto de las restricciones asociadas a una cierta secuencia prefijada de movimientos de grúa comporte una solución de movimientos factible o infactible. Dentro del grupo de soluciones factibles, interesará aquella que minimice la duración del ciclo. Por tanto, sin ninguna otra información el rango de valores del tiempo de ciclo a explorar es infinito.

No obstante, una solución siempre posible consiste en tener un solo objeto en la línea, lo cual facilita una cota superior para el tiempo de ciclo. Por otro lado, una cota inferior del tiempo de ciclo asociado a una secuencia o subsecuencia de movimientos de grúa también resulta bastante inmediata, como suma de los tiempos para cada uno de ellos.

Además, si se aplica la condición de no permitir la presencia de circuitos en el grafo con valores no positivos, pueden aparecer nuevas cotas inferiores y superiores. Esto comporta que se evalúe el grafo sobre un rango de valores del tiempo de ciclo mucho más reducido. Por eso, al grafo utilizado se le llama con el nombre de grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

Aún más, en caso que la cota inferior sea mayor que la cota superior puede establecerse inmediatamente que se trata de una secuencia infactible. Esta es la Primera prueba, de Infactibilidad. La Segunda prueba, de factibilidad, se lleva a cabo al aplicar un algoritmo de obtención de camino máximo en un grafo, como el algoritmo de Ford.

10.1.5. La aplicación de grafos con Tiempo de Ciclo Acotado al caso C2HSP

No cabe olvidar que nos hallamos ante un problema combinatorio NP-completo, lo cual comporta que si la dimensión del problema, número de tanques en la línea, aumenta en gran medida es difícil asegurar que se alcanza el óptimo en un tiempo razonable.

Una de las posibles configuraciones de la línea de producción, con dos puentes-grúa compartiendo un mismo carril en lugar de uno solo, ha demostrado la gran utilidad del grafo propuesto. Gracias a la aplicación de las cotas sobre los grafos, se pueden garantizar, en tiempos bastante más reducidos que con el algoritmo propuesto por Lei y Wang (1991), soluciones óptimas a problemas complejos (cuando se dispone de 20 tanques bajo la utilización de 2 grúas). Dichas cotas se aprovechan para reducir sensiblemente el número de cálculos realizados que garantizan el resultado óptimo.

10.1.6. Evaluación de objetivos

Una vez finalizado el trabajo, y analizando cuál ha sido la respuesta a los objetivos inicialmente planteados, puede considerarse que se han materializado de diversa manera.

1. Para empezar, se ha podido utilizar conjuntamente las aportaciones realizadas por diversos autores, debido a diferentes enfoques o visiones del problema. En primer lugar, porque la mayoría de los autores han partido del problema básico, que en este caso también se ha desarrollado. En segundo lugar, el cálculo de cotas es un aspecto vital para la resolución rápida de los ejemplares del problema.
2. Aunque en los procedimientos propuestos se utilicen técnicas, como la teoría de grafos o métodos arborescentes, ya aplicadas en los artículos reseñados, se ha introducido la explotación de algunas propiedades características, como la acotación del resultado del tiempo de ciclo en el grafo.
3. En alguno de los algoritmos, se ha empleado técnicas de exploración de entornos para hallar una solución. No obstante, la posible gran cantidad de secuencias infactibles, que crea grandes zonas sin soluciones posibles, se debería intentar evitar para una mejora en la eficiencia del sistema. Así pues, queda pendiente un estudio más profundizado de las consecuencias de otras búsquedas alternativas a la planteada.

10.2. Líneas futuras de investigación

10.2.1. Casos directamente relacionados con la variante del problema tratada

A pesar que las principales aportaciones de este trabajo se han centrado en casos de circulación en la línea de objetos homogéneos, algunas de sus conclusiones se pueden aplicar a estados transitorios entre dos programaciones de la fabricación de objetos homogéneos, o bien a la programación de lotes finitos de objetos heterogéneos. Esta puede ser la tendencia lógica que se siga en la realidad conforme se implante una mayor flexibilidad en la producción.

Los algoritmos planteados también se han aplicado a un problema real, como la fabricación de placas de circuitos impresos (*Printed Circuit Boards*), si bien los sistemas reales suelen corresponder a variantes bastante complejas en la clasificación de este tipo de problemas.

10.2.2. Variantes del problema basadas en el grafo con Tiempo de Ciclo Acotado

El aprovechamiento de las propiedades de las cotas sobre el tiempo de ciclo, en los grafos con Tiempo de Ciclo Acotado, permite pensar en el desarrollo eficiente de algoritmos para otras variantes, como el caso de los n -ciclos, cuando en un ciclo entran y salen del sistema n objetos o productos, en lugar de uno solo.

De manera similar, la información de las cotas se supone que puede ser válida para los casos multi-baño o multi-función, los cuales son más fáciles de encontrar en sistemas productivos reales.

10.2.3. Resolución simultánea de los ejemplares directo e inverso

A lo largo del presente trabajo, en el capítulo 9, se ha planteado la conveniencia de utilizar la resolución sobre el ejemplar directo o sobre el ejemplar inverso, asociado a un cierto ejemplar de problema. La posibilidad de resolver ambos ejemplares a la vez puede comportar importantes mejoras en la eficiencia de los algoritmos, como se demuestra en Companys, Bautista y Mateo (2000). Esto daría lugar a un procedimiento de tipo pendular, una vez determinadas las propiedades en la resolución de ambos ejemplares y cómo intercambiar dicha información.

10.2.4. Estudio del caso con objetos heterogéneos

Un vasto campo, pendiente de un estudio detallado, es el problema en una línea con objetos heterogéneos. La variante con objetos heterogéneos, trasladados por una sola grúa, con un número finito de piezas y cierta cantidad de unidades por cada tipo, en el caso mono-baño (capacidad para un solo objeto) y mono-función, da lugar a secuencias finitas.

En dicho caso, el objetivo se centra en hallar una ordenación de objetos y de movimientos de grúas, e intentar la reducción al máximo del tiempo total de proceso sin violar las restricciones propias del problema (de tiempos en los tanques y de movimientos de la grúa).

10.2.5. Otros problemas de ingeniería posiblemente relacionados con HSP

Finalmente, se ha recabado bibliografía en problemas que podrían relacionarse con el tema tratado, encontrando algunas situaciones de temática parecida en el campo de la ingeniería química. Éste es el caso de las plantas de proceso por lotes sin tuberías, *Pipeless Batch Plants*, tratado por González y Realff (1998a) y (1998b), unas plantas químicas de producción que evitan la presencia de tuberías basándose en el transporte de los tanques que contienen los productos en curso de fabricación. Su relación aún no está perfectamente definida, lo que implica que deban analizarse con más extensión en las posibles analogías.

REFERENCIAS

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Armstrong, R.; Lei, L.; Gu, S. (1994). A bounding scheme for deriving the minimal cycle time of a single-transporter N-stage process with time-window constraints, *European Journal of Operational Research* 78 (1994), pp. 130-140.

Baena, V.M.; Bautista, J.; Mateo, M. (1998). *Aplicación de los algoritmos genéticos a la resolución del Hoist Scheduling Problem*. Documento Interno de Trabajo (D.I.T.) 98/32, Departamento Organización Empresas, Universitat Politècnica Catalunya.

Baptiste, P.; Legnard, B.; Manier, M.-A.; Varnier, C. (1993). Optimization with constraint logic programming: the hoist scheduling problem solved with various solvers. *Proceedings of the 8th International Conference on Applications of Artificial Intelligence in Engineering*, pp. 599-614.

Baptiste, P.; Legnard, B.; Varnier, C. (1992). Hoist scheduling problem: an approach based on constraints logic programming. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1139-1144.

Bautista, J.; Companys, R. (2000). Logística y dirección de operaciones. Una visión sobre su evolución convergente. *Manutención y almacenaje* 347, pp. 60-70.

Buffa, E.S.; Sarin, R.K. (1992). *Administración de la producción y de las operaciones*. 8ª edición. Mexico: Limusa.

Chase, R.B.; Aquilano, N.J. (1994). *Dirección y administración de la producción y de las operaciones*. Traducción de la 6ª edición. Addison Wesley Iberoamericana.

Chen, H.; Chu, C.; Proth, J.-M. (1995). Cyclic hoist scheduling based on graph theory. *IEEE 0-7803-2535-4/95*, pp. 451-459.

Chen, H.; Chu, C.; Proth, J.-M. (1998). Cyclic scheduling of a hoist with time window constraints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, nº 1, pp. 144-152.

Cheng, C.-C.; Smith, S.F. (1995). A constraint-posting framework for scheduling under complex constraints. *Proceedings 1995 INRIA/IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation ETFA'95*, vol. 1, pp. 269-280.

Collart, S.; Denat J.-P. (1998). P-time Petri nets and the Hoist Scheduling Problem, *IEEE 0-7803-4778-1/98*, pp. 558-563.

Companys, R. (2000). *Programación dinámica*. Barcelona: CPDA.

Companys, R.; Bautista, J.; Mateo M. (2000). Los algoritmos EXAPENTA (Exploración Arborescente Pendular con transformación y Acotación). *1er Workshop de Organización Industrial*, pp. 399-404. Bilbao: Escuela Superior Ingenieros.

Companys, R.; Corominas, A. (1993). *Organización de la Producción I: Diseño de sistemas productivos I*. Barcelona: Edicions UPC.

Companys, R.; Corominas, A. (1995). *Organización de la Producción II: Dirección de Operaciones I*. Barcelona: Edicions UPC.

Crama, Y. (1997). Combinatorial optimization models for production scheduling in automated manufacturing systems. *European Journal of Operational Research* 99, pp. 136-153.

Dengiz, B.; Akbay, K.S. (2000). Computer simulation of a PCB production line: metamodeling approach, *International Journal of Production Economics*, vol. 63, nº 2, pp. 195-205.

Dervitsiotis, K.N. (1981). *Operations Management*. McGraw-Hill.

Domínguez Machuca, J.A.; Álvarez Gil, M.J.; García González, S.; Domínguez Machuca, M.A.; Ruiz Jiménez, A. (1995). *Dirección de operaciones: aspectos estratégicos en la producción y los servicios*. Madrid: McGraw-Hill.

Fernández, R. (1995). *Métodos para hallar el tiempo de ciclo mínimo en un proceso de N etapas con un robot transportador y restricciones ventana*. Proyecto Final de Carrera, ETS Enginyers Industrials Barcelona. Universitat Politècnica Catalunya.

Fleury, G.; Goujon, J.-Y.; Gourgand, M.; Lacomme, P. (1996a). Multi-agents approach for manufacturing systems optimization. *PAAM 96. Proceedings of the First International Conference on the Practical Application of Intelligent Agents and Multi-Agent Technology*, pp. 225-244.

Fleury, G.; Goujon, J.-Y.; Gourgand, M.; Lacomme, P. (1996b). A hoist scheduling problem, containing a fixed number of carriers, solved with an opportunistic approach. *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems. CESA'96 IMACS Multiconference. Computational Engineering in Systems Applications*, pp. 473-478.

Fogarty, D. W.; Hoffmann, T. R. (1983). *Production and Inventory Management*. South-Western Publishing Co.

Garey, M.R.; Johnson, D.S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman and Compagny.

González, R.; Realff, M.J. (1998). Operation of pipeless batch plants – I. MILP schedules. *Computers Chemical Engineering*, vol. 22, nº 7-8, pp. 841-855.

González, R.; Realff, M.J. (1998). Operation of pipeless batch plants – II. Vessel dispatch rules. *Computers Chemical Engineering*, vol. 22, nº 7-8, pp. 857-866.

Goujon, J.-Y.; Lacomme, P; Norre, S.; Traore, M. K. (1996). Computerized industrial surface treatment line control: resolution of a Hoist Scheduling Problem. *ESS96. Simulation in Industry: 8th European Simulation Symposium*, pp. 377-382.

Goujon, J.-Y.; Lacomme, P; Traore, M. K. (1996). A multi-agent simulation methodology for manufacturing systems. *ESM96. Modelling and Simulation*, pp. 183-187.

Ignall, E.; Schrage, L. (1965). Application of the Branch and Bound Technique to Some Flow Shop Scheduling Problems", *Operational Research* 13 (4), pp. 400-412.

Lamothe, J.; Correge, M.; Delmas, J. (1995). A dynamic heuristic for the real time hoist scheduling problem. *IEEE 0-7803-2535-4/95*, pp. 161-168.

Larrubia, A.; Mengual, A. (2000). *Estudio de la programación de tareas en una línea de producción con múltiples grúas para trasladar piezas homogéneas*. Proyecto Final de Carrera, ETS Ingeniería Industrial Barcelona. Universitat Politècnica Catalunya.

Leal, V.; Bautista, J.; Mateo, M. (1998). *Hoist Scheduling Problem: problema de secuenciación de movimientos con N tanques y una grúa transportadora*. Documento Interno de Trabajo (D.I.T.) 98/33, Departamento Organización Empresas, Universitat Politècnica Catalunya.

Lei L.; Wang, T.-J. (1989a). A proof: the cyclic hoist scheduling problem is NP-complete. Working paper #89-0016. Rutgers University.

Lei, L.; Wang T.-J. (1991). The minimum common-cycle algorithm for cyclic scheduling of two material handling hoists with time window constraints. *Management Science*, vol. 37, n° 12, pp. 1629-1639.

Lieberman, R.W.; Turksen, I.B. (1981). Crane Scheduling Problems. *AIIE Transactions*, vol. 13, n° 4.

Lieberman, R.W.; Turksen, I.B. (1982). Two-operation Crane Scheduling Problems. *AIIE Transactions*, vol. 14, n° 4.

Lomnicki, Z.A. (1965). A "branch-and-bound" algorithm for the exact solution of the three-machine scheduling problem, *Operational Research Quart.*, vol. 16, n° 1.

Manier, M.A.; Baptiste, P. (1994). État de l'art: ordonnancement de robots de manutention en galvanoplastie, *APII*, vol. 28, n° 1/1994.

Matsuo, H.; Shang, J.S.; Sullivan, R.S. (1991). A Crane Scheduling Problem in a Computer-Integrates Manufacturing environment, *Management Science*, vol 37, n° 5, pp. 587-606.

Méndez, G.; Cespón, R. (1999). Logística de producción: El "scheduling" como eslabón esencial. *Manutención y almacenaje* 336, pp. 51-54.

Ng, W.C. (1996). A branch and bound algorithm for hoist scheduling of a circuit board production line. *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, vol. 8, pp. 45-65.

Phillips, L.W.; Unger, P.S. (1976). Mathematical programming solution of a hoist scheduling program. *AIIE Transactions*, vol. 8, n° 2, pp. 219-225.

Shapiro, G.W.; Nuttle, H.W. (1988). Hoist Scheduling for a PCB electroplating facility, *IEE Transactions*, vol. 20, n° 2 (junio 1988), pp. 157-167.

Sethi, A. K.; Sethi, S.P. (1994). Flexibility in manufacturing: A survey. *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems* 2, pp. 289-328.

Song, W.; Storch, R.L.; Zabinsky, Z.B. (1995). An example for scheduling a chemical processing tank line, *IEEE 0-7803-2535-4/95*, pp. 475-482.

Thesen, A.; Lei, L. (1990). An expert scheduling system for material handling hoists. *Journal of Manufacturing System*, vol. 9, n° 3, pp. 247-252.

Varnier, C.; Grunder, O.; Baptiste, P. (1995). Improving the productivity of electroplating lines by changing the layout of the tanks, *IEEE 0-7803-2535-4/95*. pp. 441-450.

Varnier, C.; Bachelu, A.; Baptiste, P. (1997). Resolution of the cyclic multi-hoists scheduling problem with overlapping partitions, *INFOR*, vol. 35, n° 4, pp. 309-324.

Vollmann, T.E.; Berry, W.L.; Whybark, D.C. (1995). *Sistemas de Planificación y Control de la Fabricación*. 4ª edición. Irwin.

Widmer, M. (1991). *Modèles mathématiques pour une gestion efficace des ateliers flexibles*. Paris: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Yih, Y. (1994). An algorithm for hoist scheduling problems, *International Journal of Production Research*, vol. 32, n° 3, pp. 501-516.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

Aranda, S.; Serra, A. (1999). *Resolución del problema del robot transportador en un proceso con N etapas y restricciones temporales (Hoist Scheduling Problem) mediante un procedimiento de búsqueda tabú*. Proyecto Final de Carrera, ETS Ingeniería Industrial Barcelona. Universitat Politècnica Catalunya.

Baptiste, P.; Grunder, O.; Chappe, D. (1995). A branch and bound procedure for the optimal layout of a saturated production line fed with a single hoist. *International Conference on Industrial Engineering and Production Management*, vol. 1, p. 372-381.

Bracker, W.E.; Chapman, W. (1985). Optimization of a programable hoist using linear programming. *Printed Circuit Fabrication*, vol. 8 (febrero 1985), pp. 39-42.

Cannard, J.-A. (1988). La flexibilité par l'ordonnancement appliqué. *Revue d'automatique et de productivité appliquées*, vol. 1, n° 3, pp. 15-19.

Derid, J. (1978). CITEC (Circuits imprimés): des bains chimiques assurés par palans programmés. *Manutention*, vol. 7, n° 4, pp. 10-15.

Gross, Pison, Koechlin (1981). Conduite par automates programmables d'une chaîne flexible de galvanoplastie sur matière plastique, *Technique Moderne*, vol. 73, n° 11-12, pp. 51-55.

Lei, L.; Wang T.-J. (1989b). *On the optimal cyclic schedules of single hoist electroplating processes*. Working paper #89-0006, Rutgers University.

Liu, R.; McGreavy, C. (1996). A framework for operations strategy of Pipeless Batch Plants. *Computers Chemical Engineering*, vol. 20 Suppl., pp. S1161-S1166.

Magee, J. F. (1968). *Industrial logistics*. McGraw Hill.

Mur (1999). *Estudio de la programación de un robot transportador en un proceso con N etapas, con múltiples tanques por etapa y restricciones temporales*. Proyecto Final de Carrera, ETS Ingeniería Industrial Barcelona. Universitat Politècnica Catalunya.

Nasarre, R. (1996). *Métodos para hallar el tiempo de ciclo mínimo en un proceso de N etapas con un robot transportador, restricciones ventana y órdenes no homogéneas*. Proyecto Final de Carrera, ETS Ingenieros Industriales Barcelona. Universitat Politècnica Catalunya.

Ricci, J.J.; Brousson, P. (1989). Chaîne automatisée de traitement de surface –Progiciel de pilotage et d'ordonnancement pour chaîne de galvanoplastie, *Galvano-Organo-Traitements de Surface/593*, pp. 217-218.

Shapiro, G.W. (1985). *Hoist Scheduling for a PCB electroplating facility*. Thesis for the Degree of Master Science (Program in Operations Research), Graduate Faculty of North Carolina State University.

Thesen, A., Lei, L. (1986). "An expert system for scheduling robots in a Flexible Electroplating System with Dynamically Changing Workloads", *Proc. Second Flexible Manufacturing Systems: Operations Research Models and Applications*. Stecke and Suri (eds.).

Varnier, C. (1995). *Extensions du Hoist Scheduling Problem cyclique - Resolution basée sur un traitement des contraintes disjonctives en Programmation Logique avec Contraintes*. Thesis of the Franche-Comté university.

ANEXO 1

Ejemplares de la experiencia computacional básica (de 5 a 10 baños)

Estructura de los datos:

	código	
	a_i	b_i
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
4	a_4	b_4
5	a_5	b_5
	f_i $i=0, \dots, m$	
	$e_{i,i+1}$ $i=0, \dots, m$	

ANEXO 2

Resultados (por series) de las variables tiempo de ciclo y vector de instantes de tiempo **T** para los 540 ejemplares de la experiencia computacional básica.

Estructura de los datos:

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
código ejemplar	nº baños	tiempo de ciclo óptimo	valores del vector T para un tiempo de ciclo óptimo									

SERIE 1

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
10105	5	214	37	85	57	117	154	0	0	0	0	0
10205	5	185	89	17	106	140	41	0	0	0	0	0
10305	5	240	129	200	89	160	49	0	0	0	0	0
10405	5	198	62	34	118	90	138	0	0	0	0	0
10505	5	158	103	17	120	65	41	0	0	0	0	0
10605	5	172	69	141	86	31	103	0	0	0	0	0
10705	5	195	131	20	151	40	79	0	0	0	0	0
10805	5	123	60	12	72	33	84	0	0	0	0	0
10905	5	252	35	115	152	70	177	0	0	0	0	0
11005	5	348	148	204	293	45	83	0	0	0	0	0
11106	6	220	120	20	140	40	160	60	0	0	0	0
11206	6	413	86	122	194	240	284	328	0	0	0	0
11306	6	410	47	107	151	186	276	325	0	0	0	0
11406	6	137	98	14	110	33	66	45	0	0	0	0
11506	6	451	68	107	144	231	282	366	0	0	0	0
11606	6	171	39	144	123	60	96	75	0	0	0	0
11706	6	189	63	15	117	30	90	138	0	0	0	0
11806	6	162	45	15	60	123	102	81	0	0	0	0
11906	6	194	75	113	21	128	36	143	0	0	0	0
12006	6	144	127	56	17	100	29	78	0	0	0	0
12107	7	479	56	138	171	253	292	334	394	0	0	0
12207	7	166	149	78	17	122	29	100	41	0	0	0
12307	7	208	160	33	175	48	94	63	109	0	0	0
12407	7	200	29	173	44	92	140	65	113	0	0	0
12507	7	371	89	178	322	40	129	218	264	0	0	0
12607	7	471	66	112	149	216	260	343	386	0	0	0
12707	7	480	36	79	155	216	259	298	385	0	0	0
12807	7	216	87	189	21	108	156	42	129	0	0	0
12907	7	232	48	122	21	137	187	81	158	0	0	0
13007	7	220	103	17	120	34	137	51	154	0	0	0
13108	8	330	171	240	24	132	202	271	55	87	0	0
13208	8	378	69	184	267	31	100	139	222	305	0	0
13308	8	407	137	177	211	294	355	45	78	249	0	0
13408	8	569	144	196	283	323	381	445	493	68	0	0
13508	8	323	147	292	25	171	254	49	88	202	0	0
13608	8	416	80	260	372	36	116	152	200	312	0	0
13708	8	368	69	143	257	31	100	174	208	295	0	0
13808	8	225	94	12	72	111	188	34	128	161	0	0
13908	8	238	81	162	211	22	103	184	39	120	0	0
14008	8	374	83	191	336	31	114	146	229	284	0	0
14109	9	479	120	162	238	268	307	339	374	416	57	0
14209	9	664	52	132	186	238	281	341	386	470	561	0
14309	9	475	97	194	291	388	423	45	142	239	336	0
14409	9	610	55	134	183	217	259	304	385	458	507	0
14509	9	677	55	101	175	219	299	385	463	517	585	0
14609	9	659	62	116	187	242	321	364	440	511	556	0
14709	9	605	73	140	205	271	304	339	380	426	513	0
14809	9	482	97	175	258	388	430	45	213	296	336	0
14909	9	248	195	12	99	212	33	72	153	50	131	0
15009	9	436	97	131	198	345	384	45	229	261	293	0
15110	10	771	78	156	217	306	361	434	475	530	581	659
15210	10	532	53	189	286	383	480	91	137	234	331	428
15310	10	653	45	91	167	238	277	322	377	463	510	566
15410	10	653	38	94	142	209	262	328	407	449	526	578
15510	10	486	120	204	288	372	33	75	159	243	327	411
15610	10	689	35	123	157	206	256	318	385	443	494	577
15710	10	268	131	246	17	50	153	214	67	170	79	182
15810	10	770	73	129	217	269	352	410	491	557	609	645
15910	10	448	84	168	252	372	403	39	123	207	291	321
16010	10	456	53	137	181	253	333	405	92	214	294	366

SERIE 2

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
20105	5	346	48	108	154	203	266	0	0	0	0	0
20205	5	224	112	184	32	144	56	0	0	0	0	0
20305	5	140	60	40	20	105	85	0	0	0	0	0
20405	5	182	44	18	62	94	134	0	0	0	0	0
20505	5	224	136	24	96	168	56	0	0	0	0	0
20605	5	182	119	21	140	77	49	0	0	0	0	0
20705	5	224	136	24	96	168	56	0	0	0	0	0
20805	5	196	98	161	28	126	49	0	0	0	0	0
20905	5	201	82	166	103	35	124	0	0	0	0	0
21005	5	280	140	230	40	180	70	0	0	0	0	0
21106	6	499	57	140	236	323	365	418	0	0	0	0
21206	6	293	128	173	245	40	205	64	0	0	0	0
21306	6	287	47	124	201	238	82	159	0	0	0	0
21406	6	245	63	161	28	91	189	112	0	0	0	0
21506	6	351	99	198	297	45	144	243	0	0	0	0
21606	6	342	44	189	288	80	135	234	0	0	0	0
21706	6	331	187	286	36	133	232	72	0	0	0	0
21806	6	286	158	246	38	110	198	70	0	0	0	0
21906	6	231	119	21	84	147	49	168	0	0	0	0
22006	6	351	99	198	297	45	144	243	0	0	0	0
22107	7	180	85	15	100	30	115	45	130	0	0	0
22207	7	593	85	162	221	300	385	429	493	0	0	0
22307	7	403	148	296	355	40	92	196	232	0	0	0
22407	7	577	153	228	280	352	448	496	72	0	0	0
22507	7	400	40	139	238	337	85	184	283	0	0	0
22607	7	217	147	15	162	65	177	40	102	0	0	0
22707	7	256	148	18	76	172	42	100	196	0	0	0
22807	7	322	126	203	280	35	161	238	63	0	0	0
22907	7	429	99	198	375	45	144	243	312	0	0	0
23007	7	504	117	313	358	441	54	171	241	0	0	0
23108	8	648	63	118	203	293	367	411	486	560	0	0
23208	8	532	40	106	159	212	307	345	396	444	0	0
23308	8	623	84	133	180	242	322	394	467	513	0	0
23408	8	619	86	141	220	295	333	391	465	531	0	0
23508	8	718	63	158	249	344	404	497	550	608	0	0
23608	8	498	73	111	196	269	301	333	378	432	0	0
23708	8	344	79	112	178	302	37	142	227	260	0	0
23808	8	412	37	73	189	241	294	358	109	141	0	0
23908	8	342	66	132	240	30	96	162	195	276	0	0
24008	8	307	71	102	172	227	36	127	197	252	0	0
24109	9	386	78	114	180	246	36	144	210	276	314	0
24209	9	435	83	161	249	327	36	119	200	285	363	0
24309	9	683	60	138	184	233	325	386	434	522	587	0
24409	9	684	40	107	197	245	322	385	425	493	588	0
24509	9	560	78	120	159	213	259	305	372	412	476	0
24609	9	652	81	152	199	249	286	337	429	489	556	0
24709	9	446	138	228	360	404	36	90	180	270	306	0
24809	9	360	75	150	190	255	320	35	110	220	285	0
24909	9	787	96	187	232	276	362	435	511	600	667	0
25009	9	662	42	101	187	281	350	399	446	492	566	0
25110	10	347	100	132	222	25	152	242	297	50	177	267
25210	10	771	73	168	208	304	359	397	476	560	596	667
25310	10	357	100	142	232	322	30	167	257	50	187	277
25410	10	687	41	139	187	271	334	385	429	471	525	570
25510	10	828	87	167	224	321	414	455	506	569	611	698
25610	10	494	90	180	226	312	446	42	132	262	348	398
25710	10	885	42	129	177	272	345	435	499	596	674	768
25810	10	831	64	103	193	265	321	378	475	572	629	714
25910	10	405	33	122	153	226	295	360	68	184	256	325
26010	10	571	105	169	260	410	515	49	211	302	354	459

SERIE 3

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
30105	5	314	161	260	53	206	89	0	0	0	0	0
30205	5	192	90	24	114	48	138	0	0	0	0	0
30305	5	160	75	20	95	40	115	0	0	0	0	0
30405	5	409	135	204	278	337	63	0	0	0	0	0
30505	5	262	77	164	35	112	199	0	0	0	0	0
30605	5	310	99	256	45	144	193	0	0	0	0	0
30705	5	250	159	28	117	194	63	0	0	0	0	0
30805	5	192	90	24	114	48	138	0	0	0	0	0
30905	5	284	136	236	40	176	72	0	0	0	0	0
31005	5	323	153	195	274	42	97	0	0	0	0	0
31106	6	491	92	163	255	314	364	411	0	0	0	0
31206	6	207	92	20	112	167	52	137	0	0	0	0
31306	6	350	91	250	301	42	133	194	0	0	0	0
31406	6	602	96	178	262	367	442	502	0	0	0	0
31506	6	472	45	116	185	286	347	392	0	0	0	0
31606	6	383	42	83	142	184	264	313	0	0	0	0
31706	6	294	105	252	133	210	49	168	0	0	0	0
31806	6	284	42	116	242	72	146	200	0	0	0	0
31906	6	421	80	127	192	243	292	351	0	0	0	0
32006	6	266	66	146	30	218	102	182	0	0	0	0
32107	7	529	84	135	197	295	339	386	441	0	0	0
32207	7	595	95	173	237	298	362	434	496	0	0	0
32307	7	658	93	160	258	310	372	468	548	0	0	0
32407	7	236	121	206	31	146	51	166	71	0	0	0
32507	7	589	58	137	238	315	372	442	490	0	0	0
32607	7	519	89	149	228	281	329	377	442	0	0	0
32707	7	260	95	190	25	120	215	50	145	0	0	0
32807	7	473	120	189	361	409	56	237	297	0	0	0
32907	7	590	94	149	200	300	371	425	502	0	0	0
33007	7	250	145	20	75	170	45	100	195	0	0	0
33108	8	628	66	264	332	383	472	548	130	184	0	0
33208	8	392	170	260	350	36	122	212	302	72	0	0
33308	8	527	56	121	168	228	303	354	402	455	0	0
33408	8	443	102	204	306	346	389	48	150	252	0	0
33508	8	603	68	203	338	473	522	131	266	401	0	0
33608	8	544	120	240	360	480	56	176	296	416	0	0
33708	8	601	52	188	249	369	443	521	116	305	0	0
33808	8	410	90	180	270	362	42	132	222	312	0	0
33908	8	609	44	114	185	245	290	355	451	513	0	0
34008	8	289	103	259	33	128	184	58	153	209	0	0
34109	9	606	57	171	229	331	423	494	540	111	277	0
34209	9	861	92	150	207	298	391	461	562	622	731	0
34309	9	818	49	144	233	335	403	477	540	606	701	0
34409	9	461	46	109	187	278	407	145	223	320	359	0
34509	9	580	105	160	335	440	49	202	279	384	489	0
34609	9	715	52	99	183	231	291	367	453	544	624	0
34709	9	344	39	134	229	64	159	254	89	184	279	0
34809	9	700	147	294	336	384	440	540	623	70	217	0
34909	9	424	83	174	249	384	35	118	209	284	339	0
35009	9	880	80	178	267	353	449	496	597	675	776	0
35110	10	737	93	180	240	284	361	447	524	563	604	653
35210	10	559	102	204	306	459	505	48	150	252	354	399
35310	10	825	86	159	245	339	384	443	507	602	649	727
35410	10	693	43	123	164	227	288	341	380	476	544	609
35510	10	934	48	137	222	304	360	426	530	620	710	808
35610	10	856	79	132	188	287	378	439	538	615	661	758
35710	10	804	96	142	215	279	378	419	499	551	644	706
35810	10	866	99	149	234	291	375	442	526	594	677	754
35910	10	752	78	119	180	277	329	415	489	539	625	668
36010	10	571	102	204	306	475	517	48	150	252	354	415

SERIE 4

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
40105	5	138	117	96	75	54	33	0	0	0	0	0
40205	5	194	166	20	84	122	48	0	0	0	0	0
40305	5	230	105	25	130	50	155	0	0	0	0	0
40405	5	138	117	96	75	54	33	0	0	0	0	0
40505	5	254	64	25	89	134	179	0	0	0	0	0
40605	5	144	120	17	89	65	41	0	0	0	0	0
40705	5	184	84	20	104	40	124	0	0	0	0	0
40805	5	214	183	22	143	44	103	0	0	0	0	0
40905	5	155	131	17	100	34	69	0	0	0	0	0
41005	5	138	117	96	48	27	63	0	0	0	0	0
41106	6	211	142	17	111	166	41	73	0	0	0	0
41206	6	266	177	22	137	208	53	88	0	0	0	0
41306	6	244	213	22	93	164	53	124	0	0	0	0
41406	6	316	89	178	267	40	129	218	0	0	0	0
41506	6	287	49	84	155	229	115	186	0	0	0	0
41606	6	221	64	185	28	92	141	112	0	0	0	0
41706	6	165	144	69	21	84	36	99	0	0	0	0
41806	6	160	139	118	97	27	70	47	0	0	0	0
41906	6	211	30	116	173	54	140	71	0	0	0	0
42006	6	236	208	108	172	36	136	56	0	0	0	0
42107	7	204	117	15	90	138	36	153	51	0	0	0
42207	7	282	100	246	28	128	48	148	186	0	0	0
42307	7	423	65	165	317	358	110	210	252	0	0	0
42407	7	204	87	15	102	165	117	42	132	0	0	0
42507	7	288	116	252	28	144	208	56	172	0	0	0
42607	7	249	149	17	211	34	180	51	90	0	0	0
42707	7	220	38	189	55	127	72	144	89	0	0	0
42807	7	431	73	210	376	108	155	255	311	0	0	0
42907	7	304	64	160	28	180	244	108	208	0	0	0
43007	7	361	36	125	214	303	76	165	254	0	0	0
43108	8	370	83	124	193	262	38	155	224	297	0	0
43208	8	537	192	317	442	479	49	125	250	375	0	0
43308	8	532	38	79	139	211	263	307	342	427	0	0
43408	8	244	102	136	21	151	36	166	51	181	0	0
43508	8	265	124	238	21	145	205	42	73	172	0	0
43608	8	273	33	132	240	105	153	207	72	174	0	0
43708	8	208	39	110	17	176	61	132	73	144	0	0
43808	8	194	33	106	45	118	57	130	69	142	0	0
43908	8	250	139	169	21	184	36	199	51	82	0	0
44008	8	188	171	78	17	90	29	134	41	112	0	0
44109	9	357	75	243	21	216	36	108	140	177	288	0
44209	9	254	152	15	167	30	182	45	197	60	89	0
44309	9	401	69	138	244	31	100	169	199	282	321	0
44409	9	497	44	140	236	332	369	88	184	280	405	0
44509	9	546	107	285	454	488	49	156	218	343	378	0
44609	9	509	137	281	465	37	85	181	221	333	397	0
44709	9	524	111	295	329	366	415	465	52	163	229	0
44809	9	602	73	105	160	194	261	339	425	466	510	0
44909	9	384	84	114	186	258	288	39	147	219	315	0
45009	9	310	180	217	21	147	238	81	253	54	102	0
45110	10	677	82	148	180	226	308	392	429	484	536	577
45210	10	825	39	119	181	258	330	395	451	533	618	700
45310	10	459	191	369	24	153	222	400	55	108	253	296
45410	10	451	37	106	225	406	68	137	180	263	304	347
45510	10	320	103	246	293	22	71	130	177	44	147	194
45610	10	748	67	148	198	258	345	383	438	492	555	636
45710	10	312	191	226	285	22	71	154	253	44	93	122
45810	10	568	112	149	289	334	508	52	193	229	378	448
45910	10	376	177	217	343	27	87	244	304	54	114	271
46010	10	643	37	162	287	335	533	567	95	220	384	466

SERIE 5

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
50105	5	156	132	78	24	96	42	0	0	0	0	0
50205	5	294	99	198	240	45	144	0	0	0	0	0
50305	5	300	90	180	40	130	220	0	0	0	0	0
50405	5	130	110	65	20	80	35	0	0	0	0	0
50505	5	270	81	162	36	117	198	0	0	0	0	0
50605	5	208	96	24	120	48	144	0	0	0	0	0
50705	5	175	147	21	112	42	76	0	0	0	0	0
50805	5	156	132	108	84	60	36	0	0	0	0	0
50905	5	130	110	90	70	50	30	0	0	0	0	0
51005	5	261	171	30	201	60	101	0	0	0	0	0
51106	6	217	189	21	84	147	49	112	0	0	0	0
51206	6	408	55	107	199	238	276	327	0	0	0	0
51306	6	406	50	100	140	234	280	325	0	0	0	0
51406	6	319	44	94	175	256	130	211	0	0	0	0
51506	6	174	120	18	138	36	78	54	0	0	0	0
51606	6	186	102	18	120	36	138	54	0	0	0	0
51706	6	155	85	15	100	30	115	45	0	0	0	0
51806	6	297	153	27	108	189	63	216	0	0	0	0
51906	6	382	55	204	280	319	100	141	0	0	0	0
52006	6	206	32	98	170	116	62	134	0	0	0	0
52107	7	216	72	18	90	36	138	114	156	0	0	0
52207	7	266	154	21	175	42	105	203	70	0	0	0
52307	7	317	63	126	28	91	157	192	247	0	0	0
52407	7	374	88	176	326	40	128	216	270	0	0	0
52507	7	180	160	140	70	25	85	40	100	0	0	0
52607	7	266	112	231	133	35	154	56	175	0	0	0
52707	7	442	154	271	388	45	91	208	325	0	0	0
52807	7	499	64	107	186	248	295	341	409	0	0	0
52907	7	349	119	272	307	35	70	161	216	0	0	0
53007	7	525	60	110	158	237	278	368	435	0	0	0
53108	8	541	44	95	150	199	278	346	407	453	0	0
53208	8	297	183	267	26	207	141	225	56	105	0	0
53308	8	301	43	139	265	67	163	229	91	187	0	0
53408	8	472	104	208	312	416	48	152	256	360	0	0
53508	8	301	133	21	154	252	49	182	70	203	0	0
53608	8	385	210	287	28	105	245	322	63	140	0	0
53708	8	530	185	230	401	467	54	113	284	329	0	0
53808	8	384	79	265	342	37	223	300	128	181	0	0
53908	8	364	126	189	322	35	217	280	63	245	0	0
54008	8	616	59	123	184	277	323	381	474	517	0	0
54109	9	384	108	174	264	30	138	288	54	216	312	0
54209	9	288	162	18	180	36	120	204	60	222	78	0
54309	9	601	74	119	164	222	267	344	410	449	493	0
54409	9	366	34	130	288	58	154	312	82	178	234	0
54509	9	271	56	151	20	76	231	91	181	106	196	0
54609	9	542	70	158	366	486	110	198	234	302	422	0
54709	9	350	69	186	24	93	150	296	117	228	260	0
54809	9	393	45	165	231	297	75	195	261	327	105	0
54909	9	457	90	216	415	35	125	167	258	308	352	0
55009	9	258	113	233	28	133	203	48	153	63	168	0
55110	10	762	83	152	200	243	315	376	438	509	601	645
55210	10	553	189	294	399	504	42	133	238	343	448	84
55310	10	825	70	132	204	278	371	453	509	579	630	695
55410	10	750	135	270	468	543	678	63	198	333	387	606
55510	10	445	37	198	249	396	72	149	284	347	107	312
55610	10	744	57	142	191	239	327	412	493	546	587	627
55710	10	586	52	204	267	371	522	100	140	315	419	458
55810	10	607	64	119	223	327	431	535	167	271	375	479
55910	10	437	191	293	401	155	317	42	119	239	347	83
56010	10	591	37	141	217	305	439	85	257	345	383	487

SERIE 6

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
60105	5	160	75	20	95	40	115	0	0	0	0	0
60205	5	207	141	24	165	48	93	0	0	0	0	0
60305	5	160	135	110	55	30	75	0	0	0	0	0
60405	5	354	117	234	291	54	171	0	0	0	0	0
60505	5	252	77	154	35	112	189	0	0	0	0	0
60605	5	238	147	28	105	182	63	0	0	0	0	0
60705	5	197	54	24	114	84	143	0	0	0	0	0
60805	5	368	67	112	199	249	296	0	0	0	0	0
60905	5	170	65	140	85	30	105	0	0	0	0	0
61005	5	272	104	224	136	48	168	0	0	0	0	0
61106	6	228	66	36	186	96	150	120	0	0	0	0
61206	6	412	67	166	349	112	211	286	0	0	0	0
61306	6	405	117	171	270	54	216	315	0	0	0	0
61406	6	414	54	114	224	334	164	274	0	0	0	0
61506	6	279	78	156	237	36	114	195	0	0	0	0
61606	6	442	78	195	312	370	132	249	0	0	0	0
61706	6	360	189	36	135	234	81	270	0	0	0	0
61806	6	382	156	222	326	48	92	270	0	0	0	0
61906	6	307	48	125	202	83	160	237	0	0	0	0
62006	6	395	55	143	339	95	183	283	0	0	0	0
62107	7	252	186	24	210	48	138	108	78	0	0	0
62207	7	233	138	20	158	40	98	183	65	0	0	0
62307	7	400	232	32	120	272	72	160	312	0	0	0
62407	7	518	185	320	455	54	113	248	383	0	0	0
62507	7	448	104	208	312	48	152	256	360	0	0	0
62607	7	324	102	240	126	204	270	48	162	0	0	0
62707	7	435	59	163	267	371	107	211	315	0	0	0
62807	7	334	52	130	208	286	88	166	244	0	0	0
62907	7	502	58	193	249	366	421	121	303	0	0	0
63007	7	692	84	189	259	351	428	511	582	0	0	0
63108	8	697	76	171	246	321	405	461	522	601	0	0
63208	8	548	214	276	396	48	92	142	332	452	0	0
63308	8	603	135	270	341	531	63	198	395	459	0	0
63408	8	629	211	413	566	54	139	274	332	485	0	0
63508	8	453	55	184	404	90	135	226	299	341	0	0
63608	8	622	77	145	203	290	359	412	463	526	0	0
63708	8	774	80	160	225	320	418	525	579	666	0	0
63808	8	703	210	262	318	387	442	506	593	100	0	0
63908	8	544	120	240	360	480	56	176	296	416	0	0
64008	8	755	51	148	243	306	388	468	556	635	0	0
64109	9	455	90	180	270	407	42	132	222	312	353	0
64209	9	754	97	180	262	319	384	431	485	589	650	0
64309	9	548	105	210	373	492	49	154	259	310	429	0
64409	9	558	73	221	326	502	115	165	270	375	439	0
64509	9	496	57	182	272	448	93	134	224	314	394	0
64609	9	739	62	140	208	295	346	403	504	559	622	0
64709	9	370	43	87	192	230	285	117	255	310	142	0
64809	9	785	184	269	328	378	482	563	616	689	88	0
64909	9	603	44	89	153	215	266	320	366	454	499	0
65009	9	851	105	153	240	335	420	515	598	668	734	0
65110	10	350	155	210	25	180	235	50	105	260	75	280
65210	10	538	194	308	351	394	484	48	134	248	436	84
65310	10	867	75	166	229	293	362	454	513	561	663	755
65410	10	732	47	100	145	189	265	340	400	457	534	620
65510	10	751	68	111	210	252	323	415	467	514	580	653
65610	10	718	66	151	218	263	316	368	414	462	517	606
65710	10	812	70	151	209	291	340	388	443	543	619	686
65810	10	899	106	168	243	340	423	485	587	638	693	759
65910	10	582	147	261	375	489	528	48	87	201	315	429
66010	10	536	53	235	278	380	482	95	136	175	326	428

SERIE 7

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
70105	5	126	105	84	21	57	36	0	0	0	0	0
70205	5	158	134	110	86	62	38	0	0	0	0	0
70305	5	126	105	84	21	57	36	0	0	0	0	0
70405	5	168	140	112	28	76	48	0	0	0	0	0
70505	5	210	175	25	130	95	60	0	0	0	0	0
70605	5	210	175	25	130	95	60	0	0	0	0	0
70705	5	154	130	17	99	65	41	0	0	0	0	0
70805	5	127	106	85	22	58	37	0	0	0	0	0
70905	5	129	108	18	81	60	39	0	0	0	0	0
71005	5	211	176	26	131	96	61	0	0	0	0	0
71106	6	175	120	17	137	34	75	51	0	0	0	0
71206	6	255	220	185	150	45	105	70	0	0	0	0
71306	6	153	132	111	21	84	63	42	0	0	0	0
71406	6	130	113	18	69	30	81	42	0	0	0	0
71506	6	226	195	164	31	124	93	62	0	0	0	0
71606	6	257	62	25	87	192	157	122	0	0	0	0
71706	6	161	140	119	98	27	71	50	0	0	0	0
71806	6	204	176	20	140	76	48	96	0	0	0	0
71906	6	188	160	20	124	40	88	60	0	0	0	0
72006	6	124	107	90	17	68	51	34	0	0	0	0
72107	7	180	159	138	21	111	90	69	48	0	0	0
72207	7	206	182	158	134	31	103	79	55	0	0	0
72307	7	224	196	20	160	40	124	96	68	0	0	0
72407	7	224	196	168	28	132	48	96	68	0	0	0
72507	7	203	179	155	35	124	52	93	69	0	0	0
72607	7	226	198	170	28	134	48	98	70	0	0	0
72707	7	195	171	147	24	116	41	85	61	0	0	0
72807	7	224	196	20	160	40	124	96	68	0	0	0
72907	7	206	182	158	24	127	103	79	55	0	0	0
73007	7	248	217	22	177	146	53	106	75	0	0	0
73108	8	229	174	17	191	34	129	51	98	74	0	0
73208	8	322	222	20	242	40	262	60	96	146	0	0
73308	8	223	199	175	24	144	41	113	89	65	0	0
73408	8	207	186	165	21	84	36	99	51	114	0	0
73508	8	190	169	22	142	37	115	52	88	67	0	0
73608	8	209	185	17	154	34	123	51	92	68	0	0
73708	8	299	64	22	86	241	108	201	170	139	0	0
73808	8	270	239	22	199	44	159	66	119	88	0	0
73908	8	277	213	21	233	41	161	133	105	77	0	0
74008	8	394	41	349	66	194	294	101	139	239	0	0
74109	9	254	41	17	216	65	185	82	154	130	106	0
74209	9	311	247	20	267	40	195	60	159	80	123	0
74309	9	378	343	27	65	288	90	128	188	153	213	0
74409	9	222	201	180	159	27	132	42	105	84	63	0
74509	9	323	34	283	56	243	78	203	100	163	132	0
74609	9	222	201	180	21	153	36	126	105	84	63	0
74709	9	422	105	25	130	50	155	337	180	215	282	0
74809	9	254	230	206	24	175	151	48	120	96	72	0
74909	9	322	49	97	69	270	125	234	145	198	170	0
75009	9	365	330	25	285	250	60	205	85	160	125	0
75110	10	202	185	168	151	22	129	34	107	90	73	56
75210	10	321	297	25	142	42	159	245	66	183	83	200
75310	10	364	192	20	212	40	232	60	252	80	272	100
75410	10	249	228	207	186	27	159	42	132	111	90	69
75510	10	202	185	168	151	22	129	34	107	90	73	56
75610	10	352	50	20	308	78	272	98	148	118	168	212
75710	10	425	390	28	293	335	63	238	88	193	158	123
75810	10	264	243	222	21	195	36	96	162	111	63	129
75910	10	340	309	22	269	44	229	66	189	88	149	118
76010	10	210	193	176	25	154	37	132	115	98	81	64

SERIE 8

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
80105	5	145	121	97	24	67	43	0	0	0	0	0
80205	5	208	56	24	160	128	96	0	0	0	0	0
80305	5	168	140	21	105	77	49	0	0	0	0	0
80405	5	240	70	30	100	170	130	0	0	0	0	0
80505	5	234	63	27	180	144	108	0	0	0	0	0
80605	5	192	160	24	120	88	56	0	0	0	0	0
80705	5	130	110	90	70	50	30	0	0	0	0	0
80805	5	120	100	80	20	55	35	0	0	0	0	0
80905	5	156	132	108	84	60	36	0	0	0	0	0
81005	5	234	198	162	126	90	54	0	0	0	0	0
81106	6	261	225	189	36	144	108	72	0	0	0	0
81206	6	186	162	108	24	126	72	48	0	0	0	0
81306	6	232	200	168	32	128	96	64	0	0	0	0
81406	6	203	175	21	140	112	84	56	0	0	0	0
81506	6	203	175	147	28	112	84	56	0	0	0	0
81606	6	261	63	27	90	153	117	180	0	0	0	0
81706	6	170	146	18	116	36	86	54	0	0	0	0
81806	6	261	225	27	135	54	162	81	0	0	0	0
81906	6	248	136	24	160	48	184	72	0	0	0	0
82006	6	261	225	189	36	99	63	126	0	0	0	0
82107	7	180	160	90	20	105	35	120	50	0	0	0
82207	7	273	241	209	72	40	96	153	121	0	0	0
82307	7	170	150	130	20	105	85	65	45	0	0	0
82407	7	244	216	188	28	153	84	56	111	0	0	0
82507	7	268	236	204	32	164	56	124	92	0	0	0
82607	7	224	196	168	28	133	49	98	70	0	0	0
82707	7	204	180	156	24	126	102	78	54	0	0	0
82807	7	170	35	15	50	135	90	70	105	0	0	0
82907	7	224	196	168	28	133	49	98	70	0	0	0
83007	7	242	214	186	28	151	84	56	109	0	0	0
83108	8	200	180	160	140	25	115	90	70	50	0	0
83208	8	300	36	260	60	220	84	180	148	116	0	0
83308	8	338	302	32	257	59	212	176	140	104	0	0
83408	8	277	46	242	67	207	88	172	144	116	0	0
83508	8	358	318	38	268	68	218	98	168	128	0	0
83608	8	296	264	232	32	192	56	152	120	88	0	0
83708	8	336	300	30	93	57	120	228	192	156	0	0
83808	8	195	175	155	27	130	42	105	85	65	0	0
83908	8	372	332	292	40	242	70	142	100	172	0	0
84008	8	257	229	33	194	54	159	75	124	96	0	0
84109	9	331	41	79	289	100	184	121	205	142	226	0
84209	9	251	227	19	197	37	167	143	61	113	89	0
84309	9	338	306	26	266	50	146	74	170	98	194	0
84409	9	363	96	24	120	48	144	291	168	205	243	0
84509	9	475	63	107	415	137	207	167	237	278	325	0
84609	9	252	42	18	216	66	186	84	156	132	108	0
84709	9	381	345	72	36	99	138	273	165	228	192	0
84809	9	257	203	23	221	41	161	59	131	107	83	0
84909	9	251	227	29	197	47	167	65	137	113	89	0
85009	9	390	40	345	67	300	94	134	174	237	201	0
85110	10	272	248	224	26	194	44	164	62	134	110	86
85210	10	238	38	15	208	58	183	73	133	88	148	103
85310	10	235	215	195	175	25	150	40	125	105	85	65
85410	10	510	370	460	40	410	70	140	100	220	180	250
85510	10	270	246	222	24	192	42	162	138	66	108	84
85610	10	317	72	18	90	36	269	114	197	132	167	221
85710	10	234	214	24	189	39	164	144	59	119	99	79
85810	10	531	54	101	171	131	201	341	431	241	381	271
85910	10	329	266	21	287	42	217	63	182	119	91	140
86010	10	415	379	27	66	325	93	280	120	235	147	190

SERIE 9

código	m	TC	t(1)	t(2)	t(3)	t(4)	t(5)	t(6)	t(7)	t(8)	t(9)	t(10)
90105	5	320	50	260	150	100	190	0	0	0	0	0
90205	5	186	156	126	36	90	60	0	0	0	0	0
90305	5	240	200	160	40	112	72	0	0	0	0	0
90405	5	270	225	180	45	126	81	0	0	0	0	0
90505	5	210	175	28	133	98	63	0	0	0	0	0
90605	5	210	175	28	133	98	63	0	0	0	0	0
90705	5	263	223	32	120	167	72	0	0	0	0	0
90805	5	251	211	171	40	123	83	0	0	0	0	0
90905	5	160	135	110	85	60	35	0	0	0	0	0
91005	5	256	216	176	88	48	120	0	0	0	0	0
91106	6	368	47	260	83	296	119	188	0	0	0	0
91206	6	216	186	156	30	120	90	60	0	0	0	0
91306	6	297	49	249	81	153	113	185	0	0	0	0
91406	6	288	248	32	200	112	72	144	0	0	0	0
91506	6	252	217	182	35	140	105	70	0	0	0	0
91606	6	216	186	24	150	120	90	60	0	0	0	0
91706	6	190	165	140	115	90	65	40	0	0	0	0
91806	6	293	253	37	157	69	189	101	0	0	0	0
91906	6	252	63	28	91	154	119	182	0	0	0	0
92006	6	204	174	24	138	48	102	72	0	0	0	0
92107	7	210	155	20	175	40	115	90	65	0	0	0
92207	7	240	210	180	30	144	54	108	78	0	0	0
92307	7	200	175	150	25	120	45	90	65	0	0	0
92407	7	401	243	293	45	329	81	162	117	0	0	0
92507	7	420	90	40	130	340	230	180	270	0	0	0
92607	7	210	185	160	25	130	105	80	55	0	0	0
92707	7	360	315	36	261	216	81	162	117	0	0	0
92807	7	291	256	39	214	67	172	137	102	0	0	0
92907	7	320	280	240	40	192	72	144	104	0	0	0
93007	7	352	312	272	40	128	216	80	168	0	0	0
93108	8	275	245	24	209	48	173	72	137	96	0	0
93208	8	230	175	20	195	40	135	60	105	80	0	0
93308	8	365	64	28	92	309	214	127	172	253	0	0
93408	8	360	320	39	272	71	224	103	176	136	0	0
93508	8	462	345	36	291	390	81	131	219	174	0	0
93608	8	455	53	134	89	170	230	365	320	275	0	0
93708	8	450	81	36	117	306	153	252	351	198	0	0
93808	8	322	287	252	35	210	63	168	133	98	0	0
93908	8	288	90	24	114	48	234	144	198	168	0	0
94008	8	400	360	176	40	208	72	240	104	272	0	0
94109	9	416	56	368	88	320	120	272	152	224	184	0
94209	9	455	271	32	303	64	335	96	367	128	175	0
94309	9	312	282	252	30	216	54	144	78	168	102	0
94409	9	483	59	429	384	104	330	140	222	176	258	0
94509	9	270	245	20	215	40	145	120	65	170	85	0
94609	9	350	315	28	273	238	63	196	91	154	119	0
94709	9	454	49	400	85	346	121	292	157	238	193	0
94809	9	445	88	141	40	173	373	333	213	285	245	0
94909	9	320	290	32	254	56	110	80	206	176	146	0
95009	9	392	273	28	301	56	329	210	133	98	161	0
95110	10	434	133	392	161	42	189	70	217	322	287	252
95210	10	608	59	284	545	104	329	140	365	464	185	410
95310	10	599	63	113	320	149	356	185	392	491	230	437
95410	10	464	120	32	152	64	392	192	344	224	296	256
95510	10	384	126	24	90	156	54	216	186	276	246	300
95610	10	654	90	40	130	240	564	180	290	357	419	474
95710	10	372	342	24	306	48	138	264	162	228	90	192
95810	10	336	306	24	270	48	234	72	198	168	138	108
95910	10	423	388	70	35	98	332	126	290	154	196	241
96010	10	432	45	108	73	136	369	164	243	320	199	278

ANEXO 3

Comparación de resultados del algoritmo de *branch and bound* utilizando el Grafo Secuencial para resolver secuencias o subsecuencias:

Resultados (por series) al aplicar el *branch and bound* mediante tiempos (BBt) y el *branch and bound* mediante baños (BBb) utilizando exploración en profundidad (1), en anchura (2) y de máxima ocupación (3).

Estructura de los datos:

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
Código de un ejemplar y número de baños.		Exploración en profundidad: número de iteraciones, tamaño máximo de la lista de vértices abiertos y tiempo de ciclo obtenido.			Exploración en anchura: número de iteraciones, tamaño máximo de la lista de vértices abiertos y tiempo de ciclo obtenido.			Exploración de máxima ocupación: número de iteraciones, tamaño máximo de la lista de vértices abiertos y tiempo de ciclo obtenido.			Valor del tiempo de ciclo óptimo.

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (Bbt), SERIE 1

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
10105	5	15	7	214	18	11	214	23	8	214	214
10205	5	17	7	185	17	9	185	23	8	185	185
10305	5	16	6	240	15	11	240	21	8	240	240
10405	5	14	8	198	13	11	198	24	8	198	198
10505	5	12	8	158	10	10	158	23	8	158	158
10605	5	10	8	172	8	11	172	12	8	172	172
10705	5	13	7	195	16	10	195	24	8	195	195
10805	5	13	7	130	12	8	130	21	8	130	123
10905	5	19	7	252	17	11	252	20	8	252	252
11005	5	20	7	348	20	9	348	20	8	348	348
11106	6	36	12	220	28	37	220	51	12	220	220
11206	6	24	6	413	24	8	413	24	10	413	413
11306	6	34	9	410	34	18	410	34	12	410	410
11406	6	31	9	137	29	16	137	52	12	137	137
11506	6	27	6	451	27	11	451	27	9	451	451
11606	6	51	9	171	32	30	171	54	12	171	171
11706	6	47	9	189	49	27	189	64	12	189	189
11806	6	25	9	162	20	15	162	41	12	162	162
11906	6	52	10	194	51	31	194	64	12	196	194
12006	6	22	11	144	19	20	144	32	12	172	144
12107	7	53	8	479	53	17	479	53	15	479	479
12207	7	53	12	166	51	37	166	103	17	166	166
12307	7	99	13	208	88	45	208	165	17	208	208
12407	7	58	15	200	52	38	200	95	17	200	200
12507	7	106	10	371	96	38	371	112	17	371	371
12607	7	39	7	471	39	12	471	39	13	471	471
12707	7	44	11	480	44	12	480	44	15	480	480
12807	7	76	11	216	51	40	216	81	17	216	216
12907	7	191	13	232	151	71	232	173	17	232	232
13007	7	63	13	220	40	48	220	96	17	220	220
13108	8	173	12	330	159	46	330	205	23	330	330
13208	8	222	13	378	218	57	378	249	23	378	378
13308	8	88	9	407	88	22	407	91	19	407	407
13408	8	117	9	569	117	28	569	117	21	569	569
13508	8	251	13	323	224	73	323	288	23	323	323
13608	8	130	9	416	129	26	416	150	23	416	416
13708	8	148	10	368	147	31	368	167	23	368	368
13808	8	207	13	225	197	61	225	293	23	225	225
13908	8	209	11	238	206	69	238	245	23	238	238
14008	8	201	12	374	193	45	374	222	23	374	374
14109	9	120	9	479	120	22	479	120	27	479	479
14209	9	105	13	664	105	22	664	105	26	664	664
14309	9	265	11	475	260	60	475	276	30	475	475
14409	9	89	12	610	89	21	610	89	24	610	610
14509	9	279	12	677	279	65	677	279	26	677	677
14609	9	115	14	659	115	25	659	115	27	659	659
14709	9	118	9	605	118	20	605	118	27	605	605
14809	9	294	11	482	289	61	482	303	30	482	482
14909	9	479	18	250	479	166	250	687	30	250	248
15009	9	274	11	570	274	55	570	274	25	570	436
15110	10	223	15	771	223	35	771	223	37	771	771
15210	10	630	13	532	606	101	532	645	38	532	532
15310	10	293	13	653	293	51	653	293	34	653	653
15410	10	792	15	653	792	129	653	792	38	653	653
15510	10	317	12	486	316	50	486	333	38	486	486
15610	10	117	16	689	117	23	689	117	30	689	689
15710	10	714	19	268	288	191	719	787	36	268	268
15810	10	141	13	770	141	27	770	141	31	770	770
15910	10	534	13	448	497	91	448	537	36	448	448
16010	10	893	15	456	829	153	456	868	38	456	456

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 2

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
20105	5	14	7	346	14	8	346	14	8	346	346
20205	5	12	7	224	13	9	224	19	8	224	224
20305	5	7	8	140	7	8	140	23	8	140	140
20405	5	16	7	182	16	8	182	22	8	182	182
20505	5	16	7	224	17	11	224	23	8	224	224
20605	5	8	8	182	7	9	182	16	8	182	182
20705	5	16	6	224	16	10	224	23	8	224	224
20805	5	13	7	196	12	10	196	15	8	196	196
20905	5	16	8	201	16	8	201	20	8	201	201
21005	5	13	7	280	14	11	280	20	8	280	280
21106	6	53	9	499	53	20	499	53	12	499	499
21206	6	34	7	293	33	17	293	37	11	293	293
21306	6	37	8	287	36	14	287	37	12	287	287
21406	6	46	8	245	43	22	245	57	12	245	245
21506	6	42	8	351	41	20	351	46	12	351	351
21606	6	43	8	342	45	19	342	52	12	342	342
21706	6	42	10	331	40	17	331	47	12	331	331
21806	6	43	10	286	40	19	286	48	12	286	286
21906	6	26	11	231	28	23	231	45	12	231	231
22006	6	45	8	351	44	19	351	51	12	351	351
22107	7	63	15	180	32	60	180	89	17	180	180
22207	7	59	9	593	59	20	593	59	17	593	593
22307	7	71	8	403	70	22	403	75	17	403	403
22407	7	72	10	577	72	26	577	72	16	577	577
22507	7	95	9	400	80	31	400	91	17	400	400
22607	7	104	12	217	97	47	217	131	17	217	217
22707	7	91	11	256	92	36	256	129	17	256	256
22807	7	71	8	322	70	25	322	81	17	322	322
22907	7	69	9	429	68	25	429	73	17	429	429
23007	7	85	8	504	84	26	504	87	15	504	504
23108	8	130	10	648	130	33	648	130	22	648	648
23208	8	102	12	532	101	25	532	102	23	532	532
23308	8	39	10	623	39	11	623	39	16	623	623
23408	8	95	9	619	95	20	619	95	21	619	619
23508	8	145	12	718	145	33	718	145	23	718	718
23608	8	133	15	498	133	30	498	133	21	498	498
23708	8	179	12	344	172	49	344	188	20	344	344
23808	8	193	11	412	189	51	412	191	20	412	412
23908	8	176	12	342	173	50	342	200	23	342	342
24008	8	183	12	307	177	48	307	196	21	307	307
24109	9	213	12	386	203	53	386	232	27	386	386
24209	9	426	14	435	407	78	435	442	30	435	435
24309	9	125	12	683	125	24	683	125	26	683	683
24409	9	144	16	684	144	29	684	144	29	684	684
24509	9	69	10	560	69	14	560	69	23	560	560
24609	9	74	10	652	74	18	652	74	24	652	652
24709	9	431	13	446	416	109	446	443	30	446	446
24809	9	310	15	360	293	66	360	325	30	360	360
24909	9	84	12	787	84	18	787	84	23	787	787
25009	9	172	14	662	172	32	662	172	29	662	662
25110	10	535	15	347	473	111	347	590	34	347	347
25210	10	174	14	771	174	28	771	174	32	771	771
25310	10	522	16	357	429	116	357	544	36	357	357
25410	10	117	16	687	117	23	687	117	31	687	687
25510	10	124	15	828	124	25	828	124	29	828	828
25610	10	416	13	494	387	78	494	418	36	494	494
25710	10	248	15	885	248	51	885	248	34	885	885
25810	10	166	15	831	166	39	831	166	31	831	831
25910	10	681	15	405	652	127	405	685	35	405	405
26010	10	379	14	571	373	73	571	397	35	571	571

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 3

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
30105	5	20	8	314	17	14	314	22	8	314	314
30205	5	16	8	192	15	14	192	24	8	192	192
30305	5	10	8	160	9	10	160	24	8	160	160
30405	5	17	6	409	17	7	409	17	8	409	409
30505	5	20	7	283	20	11	283	24	8	283	262
30605	5	17	7	310	15	12	310	21	8	310	310
30705	5	17	7	250	17	9	250	23	8	250	250
30805	5	14	7	192	14	14	192	24	8	192	192
30905	5	20	7	284	20	16	284	26	8	284	284
31005	5	18	6	323	18	10	323	19	7	323	323
31106	6	33	7	491	33	11	491	33	12	491	491
31206	6	43	11	207	40	26	207	58	12	207	207
31306	6	46	8	350	45	20	350	49	12	350	350
31406	6	33	7	602	33	12	602	33	12	602	602
31506	6	39	8	472	39	13	472	39	12	472	472
31606	6	27	9	383	27	13	383	27	10	383	383
31706	6	32	8	294	37	25	294	52	12	294	294
31806	6	46	9	284	56	23	284	54	12	284	284
31906	6	27	7	421	27	10	421	27	11	421	421
32006	6	63	10	296	67	40	266	74	12	266	266
32107	7	36	9	529	36	10	529	36	13	529	529
32207	7	43	11	595	43	14	595	43	17	595	595
32307	7	33	9	658	33	10	658	33	13	658	658
32407	7	93	12	236	85	44	236	129	17	236	236
32507	7	44	12	589	44	13	589	44	17	589	589
32607	7	46	10	519	46	12	519	46	17	519	519
32707	7	105	10	260	112	42	260	130	17	260	260
32807	7	67	10	473	65	25	473	70	16	473	473
32907	7	38	8	590	38	11	590	38	13	590	590
33007	7	49	11	250	49	27	250	93	17	250	250
33108	8	114	11	628	113	30	628	114	22	628	628
33208	8	84	10	392	82	24	392	103	23	392	392
33308	8	102	11	527	102	30	527	102	22	527	527
33408	8	123	10	443	118	32	443	126	22	443	443
33508	8	74	12	603	75	26	603	77	20	603	603
33608	8	159	10	544	152	43	544	169	23	544	544
33708	8	72	13	601	72	21	601	72	22	601	601
33808	8	185	11	410	162	47	410	184	23	410	410
33908	8	60	14	609	60	18	609	60	21	609	609
34008	8	229	13	289	209	89	289	288	23	289	289
34109	9	266	14	606	266	52	606	267	30	606	606
34209	9	61	12	861	61	14	861	61	21	861	861
34309	9	126	17	818	126	26	818	126	30	818	818
34409	9	353	14	462	334	83	462	371	30	462	461
34509	9	224	11	580	223	50	580	238	27	580	580
34609	9	127	15	715	127	34	715	127	24	715	715
34709	9	338	14	344	332	111	344	447	30	344	344
34809	9	120	12	700	120	27	700	120	24	700	700
34909	9	609	14	424	579	127	424	623	30	424	424
35009	9	188	13	880	188	38	880	188	29	880	880
35110	10	302	13	737	302	66	737	302	36	737	737
35210	10	416	15	559	386	76	559	434	37	559	559
35310	10	217	13	825	217	43	825	217	35	825	825
35410	10	206	17	693	206	43	693	206	34	693	693
35510	10	118	18	934	118	21	934	118	31	934	934
35610	10	189	12	856	189	35	856	189	31	856	856
35710	10	154	14	804	154	26	804	154	31	804	804
35810	10	104	13	866	104	19	866	104	30	866	866
35910	10	254	14	752	254	42	752	254	33	752	752
36010	10	485	15	571	450	115	571	475	36	571	571

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 4

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
40105	5	7	8	138	7	8	138	18	8	138	138
40205	5	15	6	194	15	9	194	20	8	194	194
40305	5	12	8	230	14	11	230	23	8	230	230
40405	5	9	8	138	9	8	138	20	8	138	138
40505	5	14	5	254	14	7	254	20	8	254	254
40605	5	8	7	144	9	14	144	11	8	172	144
40705	5	14	8	184	12	11	184	21	8	184	184
40805	5	14	6	214	14	13	214	20	8	214	214
40905	5	14	7	155	12	12	155	19	8	155	155
41005	5	10	8	138	10	11	138	24	8	138	138
41106	6	49	11	211	49	33	211	70	12	211	211
41206	6	51	11	266	49	33	266	65	12	266	266
41306	6	28	8	244	17	10	244	31	11	244	244
41406	6	63	11	316	60	26	316	67	12	316	316
41506	6	55	9	287	56	31	287	57	11	287	287
41606	6	27	9	221	23	17	221	42	12	221	221
41706	6	17	11	165	20	21	165	48	12	165	165
41806	6	15	11	160	15	22	160	40	12	160	160
41906	6	54	11	211	62	35	211	60	12	211	211
42006	6	27	9	236	27	17	236	44	12	236	236
42107	7	85	12	204	78	51	204	131	17	204	204
42207	7	83	10	282	82	44	282	115	17	282	282
42307	7	113	11	423	109	47	423	116	17	423	423
42407	7	141	13	204	98	93	204	167	17	204	204
42507	7	60	8	288	66	29	288	94	17	288	288
42607	7	108	13	249	101	56	249	164	17	249	249
42707	7	64	12	220	69	75	220	145	17	220	220
42807	7	108	12	431	107	40	431	122	17	431	431
42907	7	94	11	304	93	39	304	117	17	304	304
43007	7	106	12	361	98	47	361	106	17	361	361
43108	8	166	12	370	162	52	370	169	22	370	370
43208	8	187	11	537	187	47	537	190	22	537	537
43308	8	79	13	532	79	20	532	79	20	532	532
43408	8	279	14	244	265	136	244	323	22	244	244
43508	8	229	15	265	213	93	265	277	22	265	265
43608	8	300	14	273	291	112	273	349	23	273	273
43708	8	448	19	208	213	192	489	508	23	208	208
43808	8	248	16	194	120	193	194	400	23	194	194
43908	8	303	17	250	308	146	250	376	21	250	250
44008	8	234	19	188	103	194	188	564	23	188	188
44109	9	846	18	357	800	184	357	883	30	357	357
44209	9	593	21	254	128	196	665	825	30	254	254
44309	9	383	15	401	373	93	401	409	28	401	401
44409	9	274	13	497	270	68	497	280	29	497	497
44509	9	196	10	546	193	46	546	210	27	546	546
44609	9	279	13	509	279	55	509	304	30	509	509
44709	9	287	14	524	287	63	524	287	27	524	524
44809	9	212	12	602	212	54	602	212	24	602	602
44909	9	387	17	384	381	92	384	395	27	384	384
45009	9	670	17	310	218	192	646	806	28	310	310
45110	10	240	15	677	240	42	677	240	33	677	677
45210	10	295	17	825	295	56	825	295	37	825	825
45310	10	695	17	459	690	176	459	854	37	459	459
45410	10	1424	20	451	247	196	674	1436	37	451	451
45510	10	1255	19	320	377	194	565	1440	38	320	320
45610	10	238	15	748	237	47	748	238	35	748	748
45710	10	731	17	312	683	185	312	786	37	312	312
45810	10	450	15	568	447	86	568	468	32	568	568
45910	10	773	19	376	380	193	677	869	37	376	376
46010	10	382	14	643	369	76	643	382	34	643	643

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 5

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
50105	5	8	7	156	8	10	156	21	8	156	156
50205	5	18	6	294	18	10	294	18	8	294	294
50305	5	22	6	300	22	12	300	24	8	300	300
50405	5	8	8	130	8	8	130	20	8	130	130
50505	5	20	6	270	20	13	270	23	8	270	270
50605	5	23	8	208	13	16	208	22	8	208	208
50705	5	12	7	190	14	14	175	22	8	175	175
50805	5	9	8	156	9	11	156	21	8	156	156
50905	5	6	8	130	6	8	130	18	8	130	130
51005	5	24	7	261	17	14	261	23	8	261	261
51106	6	17	8	217	17	13	217	38	12	217	217
51206	6	35	7	408	35	10	408	35	12	408	408
51306	6	32	8	406	32	14	406	32	11	406	406
51406	6	34	10	319	35	20	319	35	12	319	319
51506	6	29	7	174	19	14	174	38	12	174	174
51606	6	27	11	186	24	34	186	54	12	186	186
51706	6	33	12	155	28	26	155	37	12	172	155
51806	6	27	9	297	27	22	297	39	12	297	297
51906	6	63	10	382	62	23	382	64	12	382	382
52006	6	63	10	206	49	36	206	59	12	206	206
52107	7	83	14	216	72	67	216	170	17	216	216
52207	7	77	12	266	77	51	266	143	17	266	266
52307	7	69	10	317	68	27	317	77	15	317	317
52407	7	102	9	374	100	35	374	110	17	374	374
52507	7	29	15	180	30	26	180	100	17	180	180
52607	7	132	15	266	137	124	266	193	17	266	266
52707	7	85	9	442	85	25	442	91	17	442	442
52807	7	54	8	499	54	16	499	54	15	499	499
52907	7	70	9	349	70	23	349	74	17	349	349
53007	7	56	11	525	56	20	525	56	15	525	525
53108	8	145	12	541	145	47	541	145	23	541	541
53208	8	291	14	297	284	128	297	397	23	297	297
53308	8	359	14	301	338	136	301	398	23	301	301
53408	8	310	13	472	305	98	472	314	23	472	472
53508	8	219	14	301	143	110	301	277	23	301	301
53608	8	280	15	385	276	89	385	309	23	385	385
53708	8	140	11	530	139	39	530	146	20	530	530
53808	8	228	18	384	209	72	384	246	23	384	384
53908	8	188	13	364	177	75	364	214	23	364	364
54008	8	121	14	616	121	34	616	121	22	616	616
54109	9	645	17	384	634	178	384	703	30	384	384
54209	9	384	15	288	184	193	746	704	30	288	288
54309	9	66	14	601	66	16	601	66	23	601	601
54409	9	830	17	366	194	194	619	893	29	366	366
54509	9	1559	22	271	123	194	654	1871	30	271	271
54609	9	331	13	542	330	74	542	351	29	542	542
54709	9	719	16	350	253	193	629	846	30	350	350
54809	9	348	13	393	336	97	393	374	30	393	393
54909	9	669	14	457	641	168	457	692	30	457	457
55009	9	864	19	258	176	194	642	1082	30	258	258
55110	10	120	15	762	120	24	762	120	30	762	762
55210	10	637	15	553	624	112	553	689	38	553	553
55310	10	204	17	825	204	41	825	204	33	825	825
55410	10	536	14	750	535	114	750	543	36	750	750
55510	10	490	15	445	422	119	445	566	38	445	445
55610	10	310	16	744	310	68	744	310	32	744	744
55710	10	559	17	586	543	106	586	599	37	586	586
55810	10	601	15	607	584	124	607	611	36	607	607
55910	10	1466	20	437	161	193	784	1636	37	437	437
56010	10	603	15	591	582	128	591	625	37	591	591

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 6

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
60105	5	8	7	160	7	8	160	20	8	160	160
60205	5	14	7	207	17	14	207	24	8	207	207
60305	5	9	8	160	9	11	160	19	8	160	160
60405	5	17	6	354	17	9	354	18	8	354	354
60505	5	18	6	252	18	12	252	23	8	252	252
60605	5	16	6	238	18	11	238	25	8	238	238
60705	5	20	8	197	18	15	197	23	8	197	197
60805	5	17	5	368	17	8	368	17	7	368	368
60905	5	15	8	170	14	16	170	21	8	170	170
61005	5	19	8	272	21	19	272	23	8	272	272
61106	6	31	10	228	30	21	228	58	12	228	228
61206	6	56	9	412	56	27	412	63	12	412	412
61306	6	36	8	405	35	19	405	40	11	405	405
61406	6	19	9	414	20	12	414	21	10	414	414
61506	6	32	8	279	29	13	279	33	12	279	279
61606	6	38	9	442	38	17	442	39	12	442	442
61706	6	31	7	360	28	16	360	43	12	360	360
61806	6	38	8	382	38	14	382	41	12	382	382
61906	6	45	9	307	43	23	307	52	12	307	307
62006	6	44	8	395	47	20	395	49	11	395	395
62107	7	84	10	252	38	35	252	110	17	252	252
62207	7	90	13	233	88	56	233	134	17	233	233
62307	7	80	10	400	64	29	400	81	16	400	400
62407	7	72	8	518	72	21	518	79	17	518	518
62507	7	98	12	448	99	38	448	110	17	448	448
62607	7	104	12	324	104	40	324	126	17	324	324
62707	7	116	10	435	114	39	435	118	17	435	435
62807	7	122	12	334	117	52	334	126	17	334	334
62907	7	54	10	502	54	18	502	56	16	502	502
63007	7	66	10	692	66	21	692	66	17	692	692
63108	8	143	13	697	143	35	697	143	23	697	697
63208	8	93	10	548	93	20	548	103	22	548	548
63308	8	120	12	603	119	36	603	132	23	603	603
63408	8	153	13	629	153	38	629	166	23	629	629
63508	8	209	12	453	202	61	453	227	23	453	453
63608	8	82	13	622	82	21	622	82	22	622	622
63708	8	137	12	774	137	42	774	137	23	774	774
63808	8	35	11	703	35	10	703	35	14	703	703
63908	8	123	12	544	123	31	544	134	23	544	544
64008	8	79	14	755	79	19	755	79	22	755	755
64109	9	470	17	455	451	133	455	498	30	455	455
64209	9	127	13	754	127	33	754	127	29	754	754
64309	9	230	13	548	229	51	548	251	30	548	548
64409	9	300	15	558	296	76	558	321	30	558	558
64509	9	477	17	496	474	112	496	495	30	496	496
64609	9	105	15	739	105	29	739	105	26	739	739
64709	9	469	16	370	411	138	370	451	29	370	370
64809	9	155	14	785	155	38	785	155	27	785	785
64909	9	64	16	603	64	20	603	64	23	603	603
65009	9	135	11	851	135	27	851	135	24	851	851
65110	10	429	16	350	399	158	350	614	37	350	350
65210	10	321	16	538	310	80	538	336	34	538	538
65310	10	169	18	867	169	33	867	169	36	867	867
65410	10	80	19	732	80	17	732	80	25	732	732
65510	10	223	16	751	223	50	751	223	30	751	751
65610	10	92	20	718	92	21	718	92	30	718	718
65710	10	97	19	812	97	22	812	97	28	812	812
65810	10	97	15	899	97	18	899	97	29	899	899
65910	10	205	14	582	204	37	582	213	35	582	582
66010	10	528	15	536	521	104	536	565	35	536	536

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 7

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
70105	5	5	7	126	5	7	126	23	8	126	126
70205	5	11	8	158	12	11	158	10	8	172	158
70305	5	6	8	126	6	11	126	19	8	126	126
70405	5	16	7	168	13	20	168	26	8	168	168
70505	5	9	8	210	10	14	210	26	8	210	210
70605	5	9	8	210	10	19	210	25	8	210	210
70705	5	12	8	154	12	11	154	11	8	172	154
70805	5	9	8	127	9	11	127	20	8	127	127
70905	5	11	8	129	13	14	129	27	8	129	129
71005	5	22	8	211	14	22	211	27	8	211	211
71106	6	22	12	175	25	54	175	67	12	175	175
71206	6	27	12	255	29	49	255	76	12	255	255
71306	6	26	12	153	25	43	153	77	12	153	153
71406	6	24	12	130	25	26	130	18	12	172	130
71506	6	28	12	226	22	46	226	71	12	226	226
71606	6	54	12	257	44	61	257	71	12	257	257
71706	6	29	12	161	29	50	161	60	12	165	161
71806	6	52	12	204	26	44	204	88	12	204	204
71906	6	37	10	188	15	32	188	51	12	188	188
72006	6	11	12	124	11	23	124	33	12	124	124
72107	7	44	17	180	36	109	180	144	17	180	180
72207	7	52	17	206	55	132	206	234	17	206	206
72307	7	110	14	224	37	86	224	182	17	224	224
72407	7	43	17	224	27	77	224	199	17	224	224
72507	7	57	17	203	58	146	203	171	17	203	203
72607	7	117	16	226	63	93	226	189	17	226	226
72707	7	88	14	205	53	148	195	149	17	195	195
72807	7	114	14	224	37	90	224	194	17	224	224
72907	7	83	17	206	65	172	206	192	17	206	206
73007	7	157	14	248	43	77	248	238	17	248	248
73108	8	100	23	229	90	196	237	443	23	229	229
73208	8	983	19	322	96	194	477	1048	23	322	322
73308	8	125	20	223	66	193	223	513	23	223	223
73408	8	325	20	207	157	158	207	643	23	207	207
73508	8	121	18	190	48	103	190	317	23	190	190
73608	8	150	17	209	53	150	209	588	23	209	209
73708	8	787	20	299	98	197	299	705	23	299	299
73808	8	141	15	270	61	194	270	362	23	270	270
73908	8	310	21	277	100	195	277	568	23	277	277
74008	8	630	16	394	106	195	587	727	23	394	394
74109	9	649	25	254	104	195	577	1078	30	254	254
74209	9	2078	24	311	108	195	651	2185	30	311	311
74309	9	522	26	378	266	156	378	665	30	378	378
74409	9	449	27	222	94	197	228	1147	30	222	222
74509	9	395	22	323	109	195	680	713	30	323	323
74609	9	304	27	222	112	197	270	2424	30	222	222
74709	9	3034	25	422	102	195	695	3731	30	422	422
74809	9	675	28	254	108	198	319	1689	30	254	254
74909	9	865	22	322	120	194	639	1101	30	322	322
75009	9	550	18	365	112	196	779	1182	30	365	365
75110	10	388	28	202	99	195	292	3263	38	202	202
75210	10	1894	23	321	146	193	611	2795	38	321	321
75310	10	12844	32	364	102	197	692	15149	38	364	364
75410	10	1734	37	249	117	196	302	5502	38	249	249
75510	10	445	38	202	111	197	242	5027	38	202	202
75610	10	3648	31	352	150	193	362	6012	37	352	352
75710	10	2525	27	425	123	197	783	2334	38	425	425
75810	10	2462	30	264	102	194	328	4423	38	264	264
75910	10	3618	25	340	98	197	658	3963	37	340	340
76010	10	1451	36	210	105	194	687	4317	38	210	210

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 8

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
80105	5	10	8	145	10	11	145	22	8	145	145
80205	5	17	8	208	17	18	208	24	8	208	208
80305	5	14	8	168	10	22	168	23	8	168	168
80405	5	21	8	240	17	19	240	19	8	240	240
80505	5	16	8	234	17	17	234	28	8	234	234
80605	5	17	8	192	15	25	192	27	8	192	192
80705	5	7	8	130	8	11	130	19	8	130	130
80805	5	6	8	120	6	11	120	19	8	120	120
80905	5	14	8	156	12	16	156	19	8	156	156
81005	5	14	8	234	14	11	234	25	8	234	234
81106	6	50	12	261	29	62	261	84	12	261	261
81206	6	33	11	186	30	31	186	57	12	186	186
81306	6	30	12	232	25	46	232	64	12	232	232
81406	6	42	12	203	24	58	203	72	12	203	203
81506	6	22	12	203	22	50	203	63	12	203	203
81606	6	44	10	261	18	30	261	48	12	261	261
81706	6	49	12	170	23	56	170	82	12	170	170
81806	6	55	10	261	27	37	261	64	12	261	261
81906	6	39	12	248	37	26	248	52	12	248	248
82006	6	62	11	261	35	27	261	80	12	261	261
82107	7	52	17	180	45	65	180	104	17	180	180
82207	7	77	13	273	69	119	273	154	17	273	273
82307	7	24	17	170	27	71	170	142	17	170	170
82407	7	154	17	244	122	129	244	244	17	244	244
82507	7	99	17	268	75	124	268	197	17	268	268
82607	7	44	13	224	26	62	224	140	17	224	224
82707	7	47	15	204	43	63	204	148	17	204	204
82807	7	133	16	180	54	137	170	159	17	170	170
82907	7	52	17	224	28	87	224	181	17	224	224
83007	7	168	17	242	113	117	242	266	17	242	242
83108	8	122	23	200	79	196	205	366	23	200	200
83208	8	357	21	300	103	195	316	460	23	300	300
83308	8	337	23	338	98	198	338	817	23	338	338
83408	8	450	23	277	96	195	649	690	23	277	277
83508	8	323	18	358	123	193	358	587	23	358	358
83608	8	304	19	296	129	168	296	443	23	296	296
83708	8	342	21	336	178	125	336	469	23	336	336
83808	8	183	18	195	89	195	202	528	23	195	195
83908	8	332	18	372	91	195	372	662	23	372	372
84008	8	193	17	257	86	195	257	323	23	257	257
84109	9	1056	23	331	116	197	633	1389	29	331	331
84209	9	347	19	251	110	195	253	1043	30	251	251
84309	9	1953	25	338	106	194	690	2793	30	338	338
84409	9	1772	23	363	108	198	633	2089	30	363	363
84509	9	1594	20	475	92	194	477	1814	28	475	475
84609	9	559	25	252	95	195	337	1180	30	252	252
84709	9	255	17	381	171	177	381	568	27	381	381
84809	9	646	21	257	89	197	264	915	30	257	257
84909	9	337	25	251	98	195	264	769	30	252	251
85009	9	696	22	390	127	194	644	1067	30	390	390
85110	10	1080	31	272	118	195	750	2702	38	272	272
85210	10	1781	27	238	105	197	303	3486	38	238	238
85310	10	1725	38	235	122	195	368	5943	38	235	235
85410	10	1120	27	510	124	194	822	1551	34	510	510
85510	10	1021	28	270	109	196	341	4140	38	270	270
85610	10	7412	28	317	112	194	632	9963	38	317	317
85710	10	918	27	234	104	195	282	3039	38	234	234
85810	10	3743	27	531	108	195	803	4135	37	531	531
85910	10	1318	27	329	105	196	355	3652	38	329	329
86010	10	2913	25	415	118	198	780	3250	37	415	415

BRANCH AND BOUND MEDIANTE TIEMPOS (BBt), SERIE 9

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
90105	5	22	8	320	22	22	320	27	8	320	320
90205	5	12	8	186	12	11	186	23	8	186	186
90305	5	23	8	240	14	21	240	23	8	240	240
90405	5	11	8	270	11	14	270	26	8	270	270
90505	5	18	8	210	10	22	210	25	8	210	210
90605	5	9	8	210	10	22	210	27	8	210	210
90705	5	22	6	263	21	11	263	24	8	263	263
90805	5	18	8	251	17	19	251	25	8	251	251
90905	5	9	8	160	9	11	160	19	8	160	160
91005	5	19	8	256	18	22	256	26	8	256	256
91106	6	87	11	368	90	46	368	90	12	368	368
91206	6	13	11	216	18	37	216	58	12	216	216
91306	6	48	12	297	51	38	297	81	12	297	297
91406	6	54	11	288	34	41	288	74	12	288	288
91506	6	55	12	252	29	41	252	77	12	252	252
91606	6	41	12	216	28	55	216	75	12	216	216
91706	6	29	12	190	30	27	190	53	12	190	190
91806	6	52	11	293	37	59	293	73	12	293	293
91906	6	43	10	252	32	27	252	63	12	252	252
92006	6	19	7	204	11	19	204	48	12	204	204
92107	7	142	16	210	65	97	210	219	17	210	210
92207	7	42	15	240	24	58	240	133	17	240	240
92307	7	116	15	210	32	90	200	157	17	200	200
92407	7	107	12	401	73	59	401	101	17	401	401
92507	7	218	16	420	110	132	420	231	17	420	420
92607	7	104	17	210	47	147	210	161	17	210	210
92707	7	103	13	360	57	101	360	193	17	360	360
92807	7	121	16	291	71	99	291	242	17	291	291
92907	7	70	16	320	67	193	320	183	17	324	320
93007	7	209	15	352	115	70	352	216	17	352	352
93108	8	488	23	275	83	195	276	706	23	275	275
93208	8	166	23	230	73	195	230	405	23	231	230
93308	8	958	19	365	105	194	390	1038	23	365	365
93408	8	543	20	360	108	197	375	687	23	360	360
93508	8	310	16	462	173	195	728	348	23	462	462
93608	8	274	19	455	226	143	455	274	22	455	455
93708	8	622	17	450	117	195	713	730	23	450	450
93808	8	349	22	322	88	194	322	749	23	322	322
93908	8	448	21	288	95	197	611	597	23	288	288
94008	8	618	21	400	113	194	651	770	23	400	400
94109	9	650	24	416	105	196	690	1077	30	416	416
94209	9	2550	24	455	99	195	775	2748	30	455	455
94309	9	1546	28	312	174	193	369	1934	30	312	312
94409	9	1605	27	483	109	195	794	2178	30	483	483
94509	9	1448	28	270	114	194	312	2380	30	270	270
94609	9	382	22	350	106	196	350	619	27	350	350
94709	9	910	21	454	95	197	825	2031	30	454	454
94809	9	1440	26	445	107	196	763	1812	30	445	445
94909	9	1493	23	320	108	195	701	1682	30	320	320
95009	9	1719	25	392	110	194	775	1924	30	392	392
95110	10	3022	28	434	94	196	848	3856	38	434	434
95210	10	4372	32	608	121	195	895	4794	38	608	608
95310	10	3848	28	599	97	195	887	4306	35	599	599
95410	10	2494	28	464	93	194	920	2745	38	464	464
95510	10	2553	27	384	106	194	793	3512	38	384	384
95610	10	6588	26	654	106	194	915	6684	37	654	654
95710	10	3437	24	372	111	196	734	4565	38	372	372
95810	10	1745	31	336	114	196	360	3146	38	336	336
95910	10	3138	29	423	104	196	469	4911	38	423	423
96010	10	2888	32	432	128	193	717	4323	37	432	432

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 1

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
10105	5	15	7	214	18	11	214	23	8	214	214
10205	5	17	7	185	17	9	185	23	8	185	185
10305	5	16	6	240	15	11	240	21	8	240	240
10405	5	14	8	198	13	11	198	24	8	198	198
10505	5	12	8	158	10	10	158	23	8	158	158
10605	5	10	8	172	8	11	172	12	8	172	172
10705	5	13	7	195	16	10	195	24	8	195	195
10805	5	13	7	130	12	8	130	21	8	130	123
10905	5	19	7	252	17	11	252	20	8	252	252
11005	5	20	7	348	20	9	348	20	8	348	348
11106	6	36	12	220	28	37	220	51	12	220	220
11206	6	24	6	413	24	8	413	24	10	413	413
11306	6	34	9	410	34	18	410	34	12	410	410
11406	6	31	9	137	29	16	137	52	12	137	137
11506	6	27	6	451	27	11	451	27	9	451	451
11606	6	51	9	171	32	30	171	54	12	171	171
11706	6	47	9	189	49	27	189	64	12	189	189
11806	6	25	9	162	20	15	162	41	12	162	162
11906	6	52	10	194	51	31	194	64	12	196	194
12006	6	22	11	144	19	20	144	32	12	172	144
12107	7	53	8	479	53	17	479	53	15	479	479
12207	7	53	12	166	51	37	166	103	17	166	166
12307	7	99	13	208	88	45	208	165	17	208	208
12407	7	58	15	200	52	38	200	95	17	200	200
12507	7	106	10	371	96	38	371	112	17	371	371
12607	7	39	7	471	39	12	471	39	13	471	471
12707	7	44	11	480	44	12	480	44	15	480	480
12807	7	76	11	216	51	40	216	81	17	216	216
12907	7	191	13	232	151	71	232	173	17	232	232
13007	7	63	13	220	40	48	220	96	17	220	220
13108	8	173	12	330	159	46	330	205	23	330	330
13208	8	222	13	378	218	57	378	249	23	378	378
13308	8	88	9	407	88	22	407	91	19	407	407
13408	8	117	9	569	117	28	569	117	21	569	569
13508	8	251	13	323	224	73	323	288	23	323	323
13608	8	130	9	416	129	26	416	150	23	416	416
13708	8	148	10	368	147	31	368	167	23	368	368
13808	8	207	13	225	197	61	225	293	23	225	225
13908	8	209	11	238	206	69	238	245	23	238	238
14008	8	201	12	374	193	45	374	222	23	374	374
14109	9	120	9	479	120	22	479	120	27	479	479
14209	9	105	13	664	105	22	664	105	26	664	664
14309	9	265	11	475	260	60	475	276	30	475	475
14409	9	89	12	610	89	21	610	89	24	610	610
14509	9	279	12	677	279	65	677	279	26	677	677
14609	9	115	14	659	115	25	659	115	27	659	659
14709	9	118	9	605	118	20	605	118	27	605	605
14809	9	294	11	482	289	61	482	303	30	482	482
14909	9	479	18	250	479	166	250	687	30	250	248
15009	9	274	11	570	274	55	570	274	25	570	436
15110	10	223	15	771	223	35	771	223	37	771	771
15210	10	630	13	532	606	101	532	645	38	532	532
15310	10	293	13	653	293	51	653	293	34	653	653
15410	10	792	15	653	792	129	653	792	38	653	653
15510	10	317	12	486	316	50	486	333	38	486	486
15610	10	117	16	689	117	23	689	117	30	689	689
15710	10	714	19	268	288	191	719	787	36	268	268
15810	10	141	13	770	141	27	770	141	31	770	770
15910	10	534	13	448	497	91	448	537	36	448	448
16010	10	893	15	456	829	153	456	868	38	456	456

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 2

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
20105	5	14	7	346	14	8	346	14	8	346	346
20205	5	12	7	224	13	9	224	19	8	224	224
20305	5	7	8	140	7	8	140	23	8	140	140
20405	5	16	7	182	16	8	182	22	8	182	182
20505	5	16	7	224	17	11	224	23	8	224	224
20605	5	8	8	182	7	9	182	16	8	182	182
20705	5	16	6	224	16	10	224	23	8	224	224
20805	5	13	7	196	12	10	196	15	8	196	196
20905	5	16	8	201	16	8	201	20	8	201	201
21005	5	13	7	280	14	11	280	20	8	280	280
21106	6	53	9	499	53	20	499	53	12	499	499
21206	6	34	7	293	33	17	293	37	11	293	293
21306	6	37	8	287	36	14	287	37	12	287	287
21406	6	46	8	245	43	22	245	57	12	245	245
21506	6	42	8	351	41	20	351	46	12	351	351
21606	6	43	8	342	45	19	342	52	12	342	342
21706	6	42	10	331	40	17	331	47	12	331	331
21806	6	43	10	286	40	19	286	48	12	286	286
21906	6	26	11	231	28	23	231	45	12	231	231
22006	6	45	8	351	44	19	351	51	12	351	351
22107	7	63	15	180	32	60	180	89	17	180	180
22207	7	59	9	593	59	20	593	59	17	593	593
22307	7	71	8	403	70	22	403	75	17	403	403
22407	7	72	10	577	72	26	577	72	16	577	577
22507	7	95	9	400	80	31	400	91	17	400	400
22607	7	104	12	217	97	47	217	131	17	217	217
22707	7	91	11	256	92	36	256	129	17	256	256
22807	7	71	8	322	70	25	322	81	17	322	322
22907	7	69	9	429	68	25	429	73	17	429	429
23007	7	85	8	504	84	26	504	87	15	504	504
23108	8	130	10	648	130	33	648	130	22	648	648
23208	8	102	12	532	101	25	532	102	23	532	532
23308	8	39	10	623	39	11	623	39	16	623	623
23408	8	95	9	619	95	20	619	95	21	619	619
23508	8	145	12	718	145	33	718	145	23	718	718
23608	8	133	15	498	133	30	498	133	21	498	498
23708	8	179	12	344	172	49	344	188	20	344	344
23808	8	193	11	412	189	51	412	191	20	412	412
23908	8	176	12	342	173	50	342	200	23	342	342
24008	8	183	12	307	177	48	307	196	21	307	307
24109	9	213	12	386	203	53	386	232	27	386	386
24209	9	426	14	435	407	78	435	442	30	435	435
24309	9	125	12	683	125	24	683	125	26	683	683
24409	9	144	16	684	144	29	684	144	29	684	684
24509	9	69	10	560	69	14	560	69	23	560	560
24609	9	74	10	652	74	18	652	74	24	652	652
24709	9	431	13	446	416	109	446	443	30	446	446
24809	9	310	15	360	293	66	360	325	30	360	360
24909	9	84	12	787	84	18	787	84	23	787	787
25009	9	172	14	662	172	32	662	172	29	662	662
25110	10	535	15	347	473	111	347	590	34	347	347
25210	10	174	14	771	174	28	771	174	32	771	771
25310	10	522	16	357	429	116	357	544	36	357	357
25410	10	117	16	687	117	23	687	117	31	687	687
25510	10	124	15	828	124	25	828	124	29	828	828
25610	10	416	13	494	387	78	494	418	36	494	494
25710	10	248	15	885	248	51	885	248	34	885	885
25810	10	166	15	831	166	39	831	166	31	831	831
25910	10	681	15	405	652	127	405	685	35	405	405
26010	10	379	14	571	373	73	571	397	35	571	571

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 3

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
30105	5	20	8	314	17	14	314	22	8	314	314
30205	5	16	8	192	15	14	192	24	8	192	192
30305	5	10	8	160	9	10	160	24	8	160	160
30405	5	17	6	409	17	7	409	17	8	409	409
30505	5	20	7	283	20	11	283	24	8	283	262
30605	5	17	7	310	15	12	310	21	8	310	310
30705	5	17	7	250	17	9	250	23	8	250	250
30805	5	14	7	192	14	14	192	24	8	192	192
30905	5	20	7	284	20	16	284	26	8	284	284
31005	5	18	6	323	18	10	323	19	7	323	323
31106	6	33	7	491	33	11	491	33	12	491	491
31206	6	43	11	207	40	26	207	58	12	207	207
31306	6	46	8	350	45	20	350	49	12	350	350
31406	6	33	7	602	33	12	602	33	12	602	602
31506	6	39	8	472	39	13	472	39	12	472	472
31606	6	27	9	383	27	13	383	27	10	383	383
31706	6	32	8	294	37	25	294	52	12	294	294
31806	6	46	9	284	56	23	284	54	12	284	284
31906	6	27	7	421	27	10	421	27	11	421	421
32006	6	63	10	296	67	40	266	74	12	266	266
32107	7	36	9	529	36	10	529	36	13	529	529
32207	7	43	11	595	43	14	595	43	17	595	595
32307	7	33	9	658	33	10	658	33	13	658	658
32407	7	93	12	236	85	44	236	129	17	236	236
32507	7	44	12	589	44	13	589	44	17	589	589
32607	7	46	10	519	46	12	519	46	17	519	519
32707	7	105	10	260	112	42	260	130	17	260	260
32807	7	67	10	473	65	25	473	70	16	473	473
32907	7	38	8	590	38	11	590	38	13	590	590
33007	7	49	11	250	49	27	250	93	17	250	250
33108	8	114	11	628	113	30	628	114	22	628	628
33208	8	84	10	392	82	24	392	103	23	392	392
33308	8	102	11	527	102	30	527	102	22	527	527
33408	8	123	10	443	118	32	443	126	22	443	443
33508	8	74	12	603	75	26	603	77	20	603	603
33608	8	159	10	544	152	43	544	169	23	544	544
33708	8	72	13	601	72	21	601	72	22	601	601
33808	8	185	11	410	162	47	410	184	23	410	410
33908	8	60	14	609	60	18	609	60	21	609	609
34008	8	229	13	289	209	89	289	288	23	289	289
34109	9	266	14	606	266	52	606	267	30	606	606
34209	9	61	12	861	61	14	861	61	21	861	861
34309	9	126	17	818	126	26	818	126	30	818	818
34409	9	353	14	462	334	83	462	371	30	462	461
34509	9	224	11	580	223	50	580	238	27	580	580
34609	9	127	15	715	127	34	715	127	24	715	715
34709	9	338	14	344	332	111	344	447	30	344	344
34809	9	120	12	700	120	27	700	120	24	700	700
34909	9	609	14	424	579	127	424	623	30	424	424
35009	9	188	13	880	188	38	880	188	29	880	880
35110	10	302	13	737	302	66	737	302	36	737	737
35210	10	416	15	559	386	76	559	434	37	559	559
35310	10	217	13	825	217	43	825	217	35	825	825
35410	10	206	17	693	206	43	693	206	34	693	693
35510	10	118	18	934	118	21	934	118	31	934	934
35610	10	189	12	856	189	35	856	189	31	856	856
35710	10	154	14	804	154	26	804	154	31	804	804
35810	10	104	13	866	104	19	866	104	30	866	866
35910	10	254	14	752	254	42	752	254	33	752	752
36010	10	485	15	571	450	115	571	475	36	571	571

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 4

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
40105	5	7	8	138	7	8	138	18	8	138	138
40205	5	15	6	194	15	9	194	20	8	194	194
40305	5	12	8	230	14	11	230	23	8	230	230
40405	5	9	8	138	9	8	138	20	8	138	138
40505	5	14	5	254	14	7	254	20	8	254	254
40605	5	8	7	144	9	14	144	11	8	172	144
40705	5	14	8	184	12	11	184	21	8	184	184
40805	5	14	6	214	14	13	214	20	8	214	214
40905	5	14	7	155	12	12	155	19	8	155	155
41005	5	10	8	138	10	11	138	24	8	138	138
41106	6	49	11	211	49	33	211	70	12	211	211
41206	6	51	11	266	49	33	266	65	12	266	266
41306	6	28	8	244	17	10	244	31	11	244	244
41406	6	63	11	316	60	26	316	67	12	316	316
41506	6	55	9	287	56	31	287	57	11	287	287
41606	6	27	9	221	23	17	221	42	12	221	221
41706	6	17	11	165	20	21	165	48	12	165	165
41806	6	15	11	160	15	22	160	40	12	160	160
41906	6	54	11	211	62	35	211	60	12	211	211
42006	6	27	9	236	27	17	236	44	12	236	236
42107	7	85	12	204	78	51	204	131	17	204	204
42207	7	83	10	282	82	44	282	115	17	282	282
42307	7	113	11	423	109	47	423	116	17	423	423
42407	7	141	13	204	98	93	204	167	17	204	204
42507	7	60	8	288	66	29	288	94	17	288	288
42607	7	108	13	249	101	56	249	164	17	249	249
42707	7	64	12	220	69	75	220	145	17	220	220
42807	7	108	12	431	107	40	431	122	17	431	431
42907	7	94	11	304	93	39	304	117	17	304	304
43007	7	106	12	361	98	47	361	106	17	361	361
43108	8	166	12	370	162	52	370	169	22	370	370
43208	8	187	11	537	187	47	537	190	22	537	537
43308	8	79	13	532	79	20	532	79	20	532	532
43408	8	279	14	244	265	136	244	323	22	244	244
43508	8	229	15	265	213	93	265	277	22	265	265
43608	8	300	14	273	291	112	273	349	23	273	273
43708	8	448	19	208	213	192	489	508	23	208	208
43808	8	248	16	194	120	193	194	400	23	194	194
43908	8	303	17	250	308	146	250	376	21	250	250
44008	8	234	19	188	103	194	188	564	23	188	188
44109	9	846	18	357	800	184	357	883	30	357	357
44209	9	593	21	254	128	196	665	825	30	254	254
44309	9	383	15	401	373	93	401	409	28	401	401
44409	9	274	13	497	270	68	497	280	29	497	497
44509	9	196	10	546	193	46	546	210	27	546	546
44609	9	279	13	509	279	55	509	304	30	509	509
44709	9	287	14	524	287	63	524	287	27	524	524
44809	9	212	12	602	212	54	602	212	24	602	602
44909	9	387	17	384	381	92	384	395	27	384	384
45009	9	670	17	310	218	192	646	806	28	310	310
45110	10	240	15	677	240	42	677	240	33	677	677
45210	10	295	17	825	295	56	825	295	37	825	825
45310	10	695	17	459	690	176	459	854	37	459	459
45410	10	1424	20	451	247	196	674	1436	37	451	451
45510	10	1255	19	320	377	194	565	1440	38	320	320
45610	10	238	15	748	237	47	748	238	35	748	748
45710	10	731	17	312	683	185	312	786	37	312	312
45810	10	450	15	568	447	86	568	468	32	568	568
45910	10	773	19	376	380	193	677	869	37	376	376
46010	10	382	14	643	369	76	643	382	34	643	643

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 5

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
50105	5	8	7	156	8	10	156	21	8	156	156
50205	5	18	6	294	18	10	294	18	8	294	294
50305	5	22	6	300	22	12	300	24	8	300	300
50405	5	8	8	130	8	8	130	20	8	130	130
50505	5	20	6	270	20	13	270	23	8	270	270
50605	5	23	8	208	13	16	208	22	8	208	208
50705	5	12	7	190	14	14	175	22	8	175	175
50805	5	9	8	156	9	11	156	21	8	156	156
50905	5	6	8	130	6	8	130	18	8	130	130
51005	5	24	7	261	17	14	261	23	8	261	261
51106	6	17	8	217	17	13	217	38	12	217	217
51206	6	35	7	408	35	10	408	35	12	408	408
51306	6	32	8	406	32	14	406	32	11	406	406
51406	6	34	10	319	35	20	319	35	12	319	319
51506	6	29	7	174	19	14	174	38	12	174	174
51606	6	27	11	186	24	34	186	54	12	186	186
51706	6	33	12	155	28	26	155	37	12	172	155
51806	6	27	9	297	27	22	297	39	12	297	297
51906	6	63	10	382	62	23	382	64	12	382	382
52006	6	63	10	206	49	36	206	59	12	206	206
52107	7	83	14	216	72	67	216	170	17	216	216
52207	7	77	12	266	77	51	266	143	17	266	266
52307	7	69	10	317	68	27	317	77	15	317	317
52407	7	102	9	374	100	35	374	110	17	374	374
52507	7	29	15	180	30	26	180	100	17	180	180
52607	7	132	15	266	137	124	266	193	17	266	266
52707	7	85	9	442	85	25	442	91	17	442	442
52807	7	54	8	499	54	16	499	54	15	499	499
52907	7	70	9	349	70	23	349	74	17	349	349
53007	7	56	11	525	56	20	525	56	15	525	525
53108	8	145	12	541	145	47	541	145	23	541	541
53208	8	291	14	297	284	128	297	397	23	297	297
53308	8	359	14	301	338	136	301	398	23	301	301
53408	8	310	13	472	305	98	472	314	23	472	472
53508	8	219	14	301	143	110	301	277	23	301	301
53608	8	280	15	385	276	89	385	309	23	385	385
53708	8	140	11	530	139	39	530	146	20	530	530
53808	8	228	18	384	209	72	384	246	23	384	384
53908	8	188	13	364	177	75	364	214	23	364	364
54008	8	121	14	616	121	34	616	121	22	616	616
54109	9	645	17	384	634	178	384	703	30	384	384
54209	9	384	15	288	184	193	746	704	30	288	288
54309	9	66	14	601	66	16	601	66	23	601	601
54409	9	830	17	366	194	194	619	893	29	366	366
54509	9	1559	22	271	123	194	654	1871	30	271	271
54609	9	331	13	542	330	74	542	351	29	542	542
54709	9	719	16	350	253	193	629	846	30	350	350
54809	9	348	13	393	336	97	393	374	30	393	393
54909	9	669	14	457	641	168	457	692	30	457	457
55009	9	864	19	258	176	194	642	1082	30	258	258
55110	10	120	15	762	120	24	762	120	30	762	762
55210	10	637	15	553	624	112	553	689	38	553	553
55310	10	204	17	825	204	41	825	204	33	825	825
55410	10	536	14	750	535	114	750	543	36	750	750
55510	10	490	15	445	422	119	445	566	38	445	445
55610	10	310	16	744	310	68	744	310	32	744	744
55710	10	559	17	586	543	106	586	599	37	586	586
55810	10	601	15	607	584	124	607	611	36	607	607
55910	10	1466	20	437	161	193	784	1636	37	437	437
56010	10	603	15	591	582	128	591	625	37	591	591

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 6

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
60105	5	8	7	160	7	8	160	20	8	160	160
60205	5	14	7	207	17	14	207	24	8	207	207
60305	5	9	8	160	9	11	160	19	8	160	160
60405	5	17	6	354	17	9	354	18	8	354	354
60505	5	18	6	252	18	12	252	23	8	252	252
60605	5	16	6	238	18	11	238	25	8	238	238
60705	5	20	8	197	18	15	197	23	8	197	197
60805	5	17	5	368	17	8	368	17	7	368	368
60905	5	15	8	170	14	16	170	21	8	170	170
61005	5	19	8	272	21	19	272	23	8	272	272
61106	6	31	10	228	30	21	228	58	12	228	228
61206	6	56	9	412	56	27	412	63	12	412	412
61306	6	36	8	405	35	19	405	40	11	405	405
61406	6	19	9	414	20	12	414	21	10	414	414
61506	6	32	8	279	29	13	279	33	12	279	279
61606	6	38	9	442	38	17	442	39	12	442	442
61706	6	31	7	360	28	16	360	43	12	360	360
61806	6	38	8	382	38	14	382	41	12	382	382
61906	6	45	9	307	43	23	307	52	12	307	307
62006	6	44	8	395	47	20	395	49	11	395	395
62107	7	84	10	252	38	35	252	110	17	252	252
62207	7	90	13	233	88	56	233	134	17	233	233
62307	7	80	10	400	64	29	400	81	16	400	400
62407	7	72	8	518	72	21	518	79	17	518	518
62507	7	98	12	448	99	38	448	110	17	448	448
62607	7	104	12	324	104	40	324	126	17	324	324
62707	7	116	10	435	114	39	435	118	17	435	435
62807	7	122	12	334	117	52	334	126	17	334	334
62907	7	54	10	502	54	18	502	56	16	502	502
63007	7	66	10	692	66	21	692	66	17	692	692
63108	8	143	13	697	143	35	697	143	23	697	697
63208	8	93	10	548	93	20	548	103	22	548	548
63308	8	120	12	603	119	36	603	132	23	603	603
63408	8	153	13	629	153	38	629	166	23	629	629
63508	8	209	12	453	202	61	453	227	23	453	453
63608	8	82	13	622	82	21	622	82	22	622	622
63708	8	137	12	774	137	42	774	137	23	774	774
63808	8	35	11	703	35	10	703	35	14	703	703
63908	8	123	12	544	123	31	544	134	23	544	544
64008	8	79	14	755	79	19	755	79	22	755	755
64109	9	470	17	455	451	133	455	498	30	455	455
64209	9	127	13	754	127	33	754	127	29	754	754
64309	9	230	13	548	229	51	548	251	30	548	548
64409	9	300	15	558	296	76	558	321	30	558	558
64509	9	477	17	496	474	112	496	495	30	496	496
64609	9	105	15	739	105	29	739	105	26	739	739
64709	9	469	16	370	411	138	370	451	29	370	370
64809	9	155	14	785	155	38	785	155	27	785	785
64909	9	64	16	603	64	20	603	64	23	603	603
65009	9	135	11	851	135	27	851	135	24	851	851
65110	10	429	16	350	399	158	350	614	37	350	350
65210	10	321	16	538	310	80	538	336	34	538	538
65310	10	169	18	867	169	33	867	169	36	867	867
65410	10	80	19	732	80	17	732	80	25	732	732
65510	10	223	16	751	223	50	751	223	30	751	751
65610	10	92	20	718	92	21	718	92	30	718	718
65710	10	97	19	812	97	22	812	97	28	812	812
65810	10	97	15	899	97	18	899	97	29	899	899
65910	10	205	14	582	204	37	582	213	35	582	582
66010	10	528	15	536	521	104	536	565	35	536	536

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 7

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
70105	5	5	7	126	5	7	126	23	8	126	126
70205	5	11	8	158	12	11	158	10	8	172	158
70305	5	6	8	126	6	11	126	19	8	126	126
70405	5	16	7	168	13	20	168	26	8	168	168
70505	5	9	8	210	10	14	210	26	8	210	210
70605	5	9	8	210	10	19	210	25	8	210	210
70705	5	12	8	154	12	11	154	11	8	172	154
70805	5	9	8	127	9	11	127	20	8	127	127
70905	5	11	8	129	13	14	129	27	8	129	129
71005	5	22	8	211	14	22	211	27	8	211	211
71106	6	22	12	175	25	54	175	67	12	175	175
71206	6	27	12	255	29	49	255	76	12	255	255
71306	6	26	12	153	25	43	153	77	12	153	153
71406	6	24	12	130	25	26	130	18	12	172	130
71506	6	28	12	226	22	46	226	71	12	226	226
71606	6	54	12	257	44	61	257	71	12	257	257
71706	6	29	12	161	29	50	161	60	12	165	161
71806	6	52	12	204	26	44	204	88	12	204	204
71906	6	37	10	188	15	32	188	51	12	188	188
72006	6	11	12	124	11	23	124	33	12	124	124
72107	7	44	17	180	36	109	180	144	17	180	180
72207	7	52	17	206	55	132	206	234	17	206	206
72307	7	110	14	224	37	86	224	182	17	224	224
72407	7	43	17	224	27	77	224	199	17	224	224
72507	7	57	17	203	58	146	203	171	17	203	203
72607	7	117	16	226	63	93	226	189	17	226	226
72707	7	88	14	205	53	148	195	149	17	195	195
72807	7	114	14	224	37	90	224	194	17	224	224
72907	7	83	17	206	65	172	206	192	17	206	206
73007	7	157	14	248	43	77	248	238	17	248	248
73108	8	100	23	229	90	196	237	443	23	229	229
73208	8	983	19	322	96	194	477	1048	23	322	322
73308	8	125	20	223	66	193	223	513	23	223	223
73408	8	325	20	207	157	158	207	643	23	207	207
73508	8	121	18	190	48	103	190	317	23	190	190
73608	8	150	17	209	53	150	209	588	23	209	209
73708	8	787	20	299	98	197	299	705	23	299	299
73808	8	141	15	270	61	194	270	362	23	270	270
73908	8	310	21	277	100	195	277	568	23	277	277
74008	8	630	16	394	106	195	587	727	23	394	394
74109	9	649	25	254	104	195	577	1078	30	254	254
74209	9	2078	24	311	108	195	651	2185	30	311	311
74309	9	522	26	378	266	156	378	665	30	378	378
74409	9	449	27	222	94	197	228	1147	30	222	222
74509	9	395	22	323	109	195	680	713	30	323	323
74609	9	304	27	222	112	197	270	2424	30	222	222
74709	9	3034	25	422	102	195	695	3731	30	422	422
74809	9	675	28	254	108	198	319	1689	30	254	254
74909	9	865	22	322	120	194	639	1101	30	322	322
75009	9	550	18	365	112	196	779	1182	30	365	365
75110	10	388	28	202	99	195	292	3263	38	202	202
75210	10	1894	23	321	146	193	611	2795	38	321	321
75310	10	12844	32	364	102	197	692	15149	38	364	364
75410	10	1734	37	249	117	196	302	5502	38	249	249
75510	10	445	38	202	111	197	242	5027	38	202	202
75610	10	3648	31	352	150	193	362	6012	37	352	352
75710	10	2525	27	425	123	197	783	2334	38	425	425
75810	10	2462	30	264	102	194	328	4423	38	264	264
75910	10	3618	25	340	98	197	658	3963	37	340	340
76010	10	1451	36	210	105	194	687	4317	38	210	210

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 8

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
80105	5	10	8	145	10	11	145	22	8	145	145
80205	5	17	8	208	17	18	208	24	8	208	208
80305	5	14	8	168	10	22	168	23	8	168	168
80405	5	21	8	240	17	19	240	19	8	240	240
80505	5	16	8	234	17	17	234	28	8	234	234
80605	5	17	8	192	15	25	192	27	8	192	192
80705	5	7	8	130	8	11	130	19	8	130	130
80805	5	6	8	120	6	11	120	19	8	120	120
80905	5	14	8	156	12	16	156	19	8	156	156
81005	5	14	8	234	14	11	234	25	8	234	234
81106	6	50	12	261	29	62	261	84	12	261	261
81206	6	33	11	186	30	31	186	57	12	186	186
81306	6	30	12	232	25	46	232	64	12	232	232
81406	6	42	12	203	24	58	203	72	12	203	203
81506	6	22	12	203	22	50	203	63	12	203	203
81606	6	44	10	261	18	30	261	48	12	261	261
81706	6	49	12	170	23	56	170	82	12	170	170
81806	6	55	10	261	27	37	261	64	12	261	261
81906	6	39	12	248	37	26	248	52	12	248	248
82006	6	62	11	261	35	27	261	80	12	261	261
82107	7	52	17	180	45	65	180	104	17	180	180
82207	7	77	13	273	69	119	273	154	17	273	273
82307	7	24	17	170	27	71	170	142	17	170	170
82407	7	154	17	244	122	129	244	244	17	244	244
82507	7	99	17	268	75	124	268	197	17	268	268
82607	7	44	13	224	26	62	224	140	17	224	224
82707	7	47	15	204	43	63	204	148	17	204	204
82807	7	133	16	180	54	137	170	159	17	170	170
82907	7	52	17	224	28	87	224	181	17	224	224
83007	7	168	17	242	113	117	242	266	17	242	242
83108	8	122	23	200	79	196	205	366	23	200	200
83208	8	357	21	300	103	195	316	460	23	300	300
83308	8	337	23	338	98	198	338	817	23	338	338
83408	8	450	23	277	96	195	649	690	23	277	277
83508	8	323	18	358	123	193	358	587	23	358	358
83608	8	304	19	296	129	168	296	443	23	296	296
83708	8	342	21	336	178	125	336	469	23	336	336
83808	8	183	18	195	89	195	202	528	23	195	195
83908	8	332	18	372	91	195	372	662	23	372	372
84008	8	193	17	257	86	195	257	323	23	257	257
84109	9	1056	23	331	116	197	633	1389	29	331	331
84209	9	347	19	251	110	195	253	1043	30	251	251
84309	9	1953	25	338	106	194	690	2793	30	338	338
84409	9	1772	23	363	108	198	633	2089	30	363	363
84509	9	1594	20	475	92	194	477	1814	28	475	475
84609	9	559	25	252	95	195	337	1180	30	252	252
84709	9	255	17	381	171	177	381	568	27	381	381
84809	9	646	21	257	89	197	264	915	30	257	257
84909	9	337	25	251	98	195	264	769	30	252	251
85009	9	696	22	390	127	194	644	1067	30	390	390
85110	10	1080	31	272	118	195	750	2702	38	272	272
85210	10	1781	27	238	105	197	303	3486	38	238	238
85310	10	1725	38	235	122	195	368	5943	38	235	235
85410	10	1120	27	510	124	194	822	1551	34	510	510
85510	10	1021	28	270	109	196	341	4140	38	270	270
85610	10	7412	28	317	112	194	632	9963	38	317	317
85710	10	918	27	234	104	195	282	3039	38	234	234
85810	10	3743	27	531	108	195	803	4135	37	531	531
85910	10	1318	27	329	105	196	355	3652	38	329	329
86010	10	2913	25	415	118	198	780	3250	37	415	415

BRANCH AND BOUND MEDIANTE BAÑOS (BBb), SERIE 9

código	m	ite(1)	maxl(1)	tc(1)	ite(2)	maxl(2)	tc(2)	ite(3)	maxl(3)	tc(3)	TC*
90105	5	22	8	320	22	22	320	27	8	320	320
90205	5	12	8	186	12	11	186	23	8	186	186
90305	5	23	8	240	14	21	240	23	8	240	240
90405	5	11	8	270	11	14	270	26	8	270	270
90505	5	18	8	210	10	22	210	25	8	210	210
90605	5	9	8	210	10	22	210	27	8	210	210
90705	5	22	6	263	21	11	263	24	8	263	263
90805	5	18	8	251	17	19	251	25	8	251	251
90905	5	9	8	160	9	11	160	19	8	160	160
91005	5	19	8	256	18	22	256	26	8	256	256
91106	6	87	11	368	90	46	368	90	12	368	368
91206	6	13	11	216	18	37	216	58	12	216	216
91306	6	48	12	297	51	38	297	81	12	297	297
91406	6	54	11	288	34	41	288	74	12	288	288
91506	6	55	12	252	29	41	252	77	12	252	252
91606	6	41	12	216	28	55	216	75	12	216	216
91706	6	29	12	190	30	27	190	53	12	190	190
91806	6	52	11	293	37	59	293	73	12	293	293
91906	6	43	10	252	32	27	252	63	12	252	252
92006	6	19	7	204	11	19	204	48	12	204	204
92107	7	142	16	210	65	97	210	219	17	210	210
92207	7	42	15	240	24	58	240	133	17	240	240
92307	7	116	15	210	32	90	200	157	17	200	200
92407	7	107	12	401	73	59	401	101	17	401	401
92507	7	218	16	420	110	132	420	231	17	420	420
92607	7	104	17	210	47	147	210	161	17	210	210
92707	7	103	13	360	57	101	360	193	17	360	360
92807	7	121	16	291	71	99	291	242	17	291	291
92907	7	70	16	320	67	193	320	183	17	324	320
93007	7	209	15	352	115	70	352	216	17	352	352
93108	8	488	23	275	83	195	276	706	23	275	275
93208	8	166	23	230	73	195	230	405	23	231	230
93308	8	958	19	365	105	194	390	1038	23	365	365
93408	8	543	20	360	108	197	375	687	23	360	360
93508	8	310	16	462	173	195	728	348	23	462	462
93608	8	274	19	455	226	143	455	274	22	455	455
93708	8	622	17	450	117	195	713	730	23	450	450
93808	8	349	22	322	88	194	322	749	23	322	322
93908	8	448	21	288	95	197	611	597	23	288	288
94008	8	618	21	400	113	194	651	770	23	400	400
94109	9	650	24	416	105	196	690	1077	30	416	416
94209	9	2550	24	455	99	195	775	2748	30	455	455
94309	9	1546	28	312	174	193	369	1934	30	312	312
94409	9	1605	27	483	109	195	794	2178	30	483	483
94509	9	1448	28	270	114	194	312	2380	30	270	270
94609	9	382	22	350	106	196	350	619	27	350	350
94709	9	910	21	454	95	197	825	2031	30	454	454
94809	9	1440	26	445	107	196	763	1812	30	445	445
94909	9	1493	23	320	108	195	701	1682	30	320	320
95009	9	1719	25	392	110	194	775	1924	30	392	392
95110	10	3022	28	434	94	196	848	3856	38	434	434
95210	10	4372	32	608	121	195	895	4794	38	608	608
95310	10	3848	28	599	97	195	887	4306	35	599	599
95410	10	2494	28	464	93	194	920	2745	38	464	464
95510	10	2553	27	384	106	194	793	3512	38	384	384
95610	10	6588	26	654	106	194	915	6684	37	654	654
95710	10	3437	24	372	111	196	734	4565	38	372	372
95810	10	1745	31	336	114	196	360	3146	38	336	336
95910	10	3138	29	423	104	196	469	4911	38	423	423
96010	10	2888	32	432	128	193	717	4323	37	432	432

ANEXO 4

Resultados óptimos al aplicar el algoritmo de *branch and bound* utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado para resolver las secuencias o subsecuencias.

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
------------------	---	---	----	----	---

Ejemplar: código de un ejemplar.

TC: tiempo de ciclo óptimo

H: secuencia óptima de movimientos de transporte para el puente-grúa (baño de extracción del objeto).

H': ídem (baño de deposición del objeto).

T: instantes óptimos de los correspondientes movimientos de transporte para el puente-grúa (extracción del objeto).

T': ídem (deposición del objeto).

W: vector del tiempo de espera del puente-grúa en el correspondiente baño en **H**.

SERIE 1 (VC/GR)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
10105 214	0	0	1	12	0
	1	37	2	49	25
	3	57	4	69	0
	2	85	3	97	0
	4	117	5	129	12
	5	154	6	166	25
10205 185	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	1	86	2	96	0
	3	106	4	116	3
	4	140	5	150	24
10305 240	0	0	1	13	0
	5	49	6	62	0
	3	89	4	102	0
	1	129	2	142	0
	4	160	5	173	0
	2	200	3	213	0
10405 198	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	1	62	2	74	14
	4	90	5	102	0
	3	118	4	130	0
	5	138	6	150	0
10505 158	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	4	65	5	75	0
	1	103	2	113	0
	3	120	4	130	0
10605 172	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	1	86	2	96	0
	4	110	5	120	0
	3	134	4	144	0
10705 195	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	5	79	6	91	27
	1	131	2	143	0
	3	151	4	163	0
10805 123	0	0	1	7	0
	2	12	3	19	0
	4	24	5	31	0
	1	51	2	58	0
	3	63	4	70	0
	5	75	6	82	0
10905 252	0	0	1	15	0
	1	35	2	50	20
	4	70	5	85	0
	2	115	3	130	0
	3	152	4	167	22
	5	177	6	192	0
11005 348	0	0	1	15	0
	4	45	5	60	0
	5	83	6	98	23
	1	148	2	163	0
	2	204	3	219	41
	3	293	4	308	74

11106 220	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	6	60	7	72	0
	1	120	2	132	0
	3	140	4	152	0
	5	160	6	172	0
11206 413	0	0	1	15	0
	1	86	2	101	71
	2	122	3	137	21
	3	194	4	209	57
	4	240	5	255	31
	5	284	6	299	29
	6	328	7	343	29
11306 410	0	0	1	15	0
	1	47	2	62	32
	2	107	3	122	45
	3	151	4	166	29
	4	186	5	201	20
	5	276	6	291	75
	6	325	7	340	34
11406 137	0	0	1	7	0
	2	12	3	19	0
	4	24	5	31	0
	6	36	7	43	0
	5	57	6	64	4
	1	89	2	96	0
	3	101	4	108	0
11506 451	0	0	1	15	0
	1	68	2	83	53
	2	107	3	122	24
	3	144	4	159	22
	4	231	5	246	72
	5	282	6	297	36
	6	366	7	381	69
11606 171	0	0	1	9	0
	1	39	2	48	30
	4	60	5	69	0
	6	75	7	84	0
	5	96	6	105	0
	3	123	4	132	0
	2	144	3	153	0
11706 189	0	0	1	9	0
	2	15	3	24	0
	4	30	5	39	0
	1	63	2	72	0
	5	90	6	99	0
	3	117	4	126	0
	6	138	7	147	0
11806 162	0	0	1	9	0
	2	15	3	24	0
	1	36	2	45	0
	3	60	4	69	9
	6	81	7	90	0
	5	102	6	111	0
	4	123	5	132	0
11906 194	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	1	75	2	84	0
	2	113	3	122	29
	4	128	5	137	0
	6	143	7	152	0

12006						12807					
144						216					
0	0	1	7	0	0	0	1	9	0		
3	17	4	24	0	3	21	4	30	0		
5	29	6	36	0	6	42	7	51	0		
2	56	3	63	0	1	87	2	96	0		
6	78	7	85	0	4	108	5	117	0		
4	100	5	107	0	7	129	8	138	0		
1	127	2	134	0	5	156	6	165	0		
12107						12907					
479						232					
0	0	1	13	0	0	0	1	9	0		
1	56	2	69	43	3	21	4	30	0		
2	138	3	151	69	1	48	2	57	0		
3	171	4	184	20	6	81	7	90	0		
4	253	5	266	69	2	122	3	131	2		
5	292	6	305	26	4	137	5	146	0		
6	334	7	347	29	7	158	8	167	0		
7	394	8	407	47	5	187	6	196	2		
12207						13007					
166						220					
0	0	1	7	0	0	0	1	10	0		
3	17	4	24	0	2	17	3	27	0		
5	29	6	36	0	4	34	5	44	0		
7	41	8	48	0	6	51	7	61	0		
2	78	3	85	0	1	103	2	113	0		
6	100	7	107	0	3	120	4	130	0		
4	122	5	129	0	5	137	6	147	0		
1	149	2	156	0	7	154	8	164	0		
12307						13108					
208						330					
0	0	1	9	0	0	0	1	10	0		
2	15	3	24	0	3	24	4	34	0		
4	30	5	39	0	7	55	8	65	0		
6	45	7	54	0	8	87	9	97	22		
5	76	6	85	10	4	132	5	142	0		
7	91	8	100	0	1	170	2	180	0		
1	142	2	151	0	5	202	6	212	1		
3	157	4	166	0	2	240	3	250	0		
12407						13208					
200						378					
0	0	1	9	0	0	0	1	10	0		
1	29	2	38	20	4	31	5	41	0		
3	44	4	53	0	1	69	2	79	0		
6	65	7	74	0	5	100	6	110	0		
4	92	5	101	0	6	139	7	149	29		
7	113	8	122	0	2	184	3	194	0		
5	140	6	149	0	7	222	8	232	0		
2	173	3	182	0	3	267	4	277	0		
12507						13308					
371						407					
0	0	1	13	0	0	0	1	10	0		
4	40	5	53	0	6	45	7	55	0		
1	89	2	102	0	7	78	8	88	23		
5	129	6	142	0	1	137	2	147	0		
2	178	3	191	0	2	177	3	187	30		
6	218	7	231	0	3	211	4	221	24		
7	264	8	277	33	8	249	9	259	0		
3	322	4	335	0	4	294	5	304	0		
12607						13408					
471						569					
0	0	1	13	0	0	0	1	12	0		
1	66	2	79	53	8	68	9	80	0		
2	112	3	125	33	1	144	2	156	0		
3	149	4	162	24	2	196	3	208	40		
4	216	5	229	54	3	283	4	295	75		
5	260	6	273	31	4	323	5	335	28		
6	343	7	356	70	5	381	6	393	46		
7	386	8	399	30	6	445	7	457	52		
12707						13408					
480						569					
0	0	1	15	0	0	0	1	12	0		
1	36	2	51	21	8	68	9	80	0		
2	79	3	94	28	1	144	2	156	0		
3	155	4	170	61	2	196	3	208	40		
4	216	5	231	46	3	283	4	295	75		
5	259	6	274	28	4	323	5	335	28		
6	298	7	313	24	5	381	6	393	46		
7	385	8	400	72	6	445	7	457	52		
					7	493	8	505	36		

13508						3	186	4	199	41
323	0	0	1	10	0	4	238	5	251	39
	3	24	4	34	0	5	281	6	294	30
	6	48	7	58	0	6	341	7	354	47
	7	87	8	97	29	7	386	8	399	32
	1	146	2	156	0	8	470	9	483	71
	4	170	5	180	0	9	561	10	574	78
	8	201	9	211	0					
	5	253	6	263	14					
	2	291	3	301	0					
13608										
416	0	0	1	12	0					
	4	36	5	48	0					
	1	80	2	92	0					
	5	116	6	128	0					
	6	152	7	164	24					
	7	200	8	212	36					
	2	260	3	272	0					
	8	312	9	324	0					
	3	372	4	384	0					
13708										
368	0	0	1	10	0					
	4	31	5	41	0					
	1	69	2	79	0					
	5	100	6	110	0					
	2	143	3	153	5					
	6	174	7	184	0					
	7	208	8	218	24					
	3	253	4	263	0					
	8	295	9	305	4					
13808										
225	0	0	1	7	0					
	2	12	3	19	0					
	6	34	7	41	0					
	3	72	4	79	11					
	1	94	2	101	0					
	4	111	5	118	0					
	7	128	8	135	0					
	8	161	9	168	26					
	5	188	6	195	0					
13908										
238	0	0	1	7	0					
	3	17	4	24	0					
	7	39	8	46	0					
	4	66	5	73	0					
	1	93	2	100	0					
	5	115	6	122	0					
	8	132	9	139	0					
	2	174	3	181	0					
	6	196	7	203	0					
14008										
374	0	0	1	10	0					
	4	31	5	41	0					
	1	83	2	93	14					
	5	114	6	124	0					
	6	146	7	156	22					
	2	191	3	201	0					
	7	229	8	239	0					
	8	284	9	294	45					
	3	336	4	346	0					
14109										
479	0	0	1	9	0					
	9	57	10	66	0					
	1	120	2	129	0					
	2	162	3	171	33					
	3	238	4	247	67					
	4	268	5	277	21					
	5	307	6	316	30					
	6	339	7	348	23					
	7	374	8	383	26					
	8	416	9	425	33					
14209										
664	0	0	1	13	0					
	1	52	2	65	39					
	2	132	3	145	67					
14309										
475	0	0	1	10	0					
	6	45	7	55	0					
	1	97	2	107	0					
	7	142	8	152	0					
	2	194	3	204	0					
	8	239	9	249	0					
	3	291	4	301	0					
	9	336	10	346	0					
	4	388	5	398	0					
	5	423	6	433	25					
14409										
610	0	0	1	13	0					
	1	55	2	68	42					
	2	134	3	147	66					
	3	183	4	196	36					
	4	217	5	230	21					
	5	259	6	272	29					
	6	304	7	317	32					
	7	385	8	398	68					
	8	458	9	471	60					
	9	507	10	520	36					
14509										
677	0	0	1	12	0					
	1	55	2	67	43					
	2	101	3	113	34					
	3	175	4	187	62					
	4	219	5	231	32					
	5	299	6	311	68					
	6	385	7	397	74					
	7	463	8	475	66					
	8	517	9	529	42					
	9	585	10	597	56					
14609										
659	0	0	1	13	0					
	1	62	2	75	49					
	2	116	3	129	41					
	3	187	4	200	58					
	4	242	5	255	42					
	5	321	6	334	66					
	6	364	7	377	30					
	7	440	8	453	63					
	8	511	9	524	58					
	9	556	10	569	32					
14709										
605	0	0	1	12	0					
	1	73	2	85	61					
	2	140	3	152	55					
	3	205	4	217	53					
	4	271	5	283	54					
	5	304	6	316	21					
	6	339	7	351	23					
	7	380	8	392	29					
	8	426	9	438	34					
	9	513	10	525	75					
14809										
482	0	0	1	10	0					
	6	45	7	55	0					
	1	97	2	107	0					
	2	175	3	185	68					
	7	213	8	223	0					
	3	258	4	268	0					
	8	296	9	306	0					
	9	336	10	346	30					
	4	388	5	398	0					
	5	430	6	440	32					

14909						7	159	8	168	0
248	0	0	1	7	0	2	204	3	213	0
	2	12	3	19	0	8	243	9	252	0
	5	29	6	36	0	3	288	4	297	0
	8	46	9	53	0	9	327	10	336	0
	6	68	7	75	0	4	372	5	381	0
	3	95	4	102	0	10	411	11	420	0
	9	127	10	134	0					
	7	149	8	156	0	15610				
	1	191	2	198	0	689	0	0	1	13
	4	208	5	215	0		1	35	2	48
							2	123	3	136
15009							3	157	4	170
436	0	0	1	10	0		4	206	5	219
	6	45	7	55	0		5	256	6	269
	1	97	2	107	0		6	318	7	331
	2	131	3	141	24		7	385	8	398
	3	198	4	208	57		8	443	9	456
	7	229	8	239	0		9	494	10	507
	8	261	9	271	22		10	577	11	590
	9	293	10	303	22					
	4	345	5	355	0	15710				
	5	384	6	394	29	268	0	0	1	7
							3	17	4	24
15110							4	50	5	57
771	0	0	1	13	0		7	67	8	74
	1	78	2	91	65		9	79	10	86
	2	156	3	169	65		1	131	2	138
	3	217	4	230	48		5	153	6	160
	4	306	5	319	76		8	170	9	177
	5	361	6	374	42		10	182	11	189
	6	434	7	447	60		6	214	7	221
	7	475	8	488	28		2	246	3	253
	8	530	9	543	42	15810				
	9	581	10	594	38	770	0	0	1	15
	10	659	11	672	65		1	73	2	88
							2	129	3	144
15210							3	217	4	232
532	0	0	1	10	0		4	269	5	284
	1	53	2	63	43		5	352	6	367
	6	91	7	101	0		6	410	7	425
	7	137	8	147	36		7	491	8	506
	2	189	3	199	0		8	557	9	572
	8	234	9	244	0		9	609	10	624
	3	286	4	296	0		10	645	11	660
	9	331	10	341	0	15910				
	4	383	5	393	0	448	0	0	1	9
	10	428	11	438	0		6	39	7	48
	5	480	6	490	0		1	84	2	93
							7	123	8	132
15310							2	168	3	177
653	0	0	1	10	0		8	207	9	216
	1	45	2	55	35		3	252	4	261
	2	91	3	101	36		9	291	10	300
	3	167	4	177	66		10	321	11	330
	4	238	5	248	61		4	372	5	381
	5	277	6	287	29		5	403	6	412
	6	322	7	332	35	16010				
	7	377	8	387	45	456	0	0	1	9
	8	463	9	473	76		1	53	2	62
	9	510	10	520	37		7	92	8	101
	10	566	11	576	46		2	137	3	146
							3	181	4	190
15410							8	214	9	223
653	0	0	1	9	0		4	253	5	262
	1	38	2	47	29		9	294	10	303
	2	94	3	103	47		5	333	6	342
	3	142	4	151	39		10	366	11	375
	4	209	5	218	58		6	405	7	414
	5	262	6	271	44					
	6	328	7	337	57					
	7	407	8	416	70					
	8	449	9	458	33					
	9	526	10	535	68					
	10	578	11	587	43					
15510										
486	0	0	1	9	0					
	5	33	6	42	0					
	6	75	7	84	33					
	1	120	2	129	0					

SERIE 2 (VC/GS)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
20105					
346	0	0	1	20	0
	1	48	2	68	28
	2	108	3	128	40
	3	154	4	174	26
	4	203	5	223	29
	5	266	6	286	43
20205					
224	0	0	1	16	0
	3	32	4	48	0
	5	56	6	72	0
	1	112	2	128	0
	4	144	5	160	0
	2	184	3	200	0
20305					
140	0	0	1	10	0
	3	20	4	30	0
	2	40	3	50	0
	1	60	2	70	0
	5	85	6	95	0
	4	105	5	115	0
20405					
182	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	1	44	2	56	2
	3	62	4	74	0
	4	94	5	106	20
	5	134	6	146	28
20505					
224	0	0	1	16	0
	2	24	3	40	0
	5	56	6	72	0
	3	96	4	112	0
	1	136	2	152	0
	4	168	5	184	0
20605					
182	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	5	49	6	63	0
	4	77	5	91	0
	1	119	2	133	0
	3	140	4	154	0
20705					
224	0	0	1	16	0
	2	24	3	40	0
	5	56	6	72	0
	3	96	4	112	0
	1	136	2	152	0
	4	168	5	184	0
20805					
196	0	0	1	14	0
	3	28	4	42	0
	5	49	6	63	0
	1	98	2	112	0
	4	126	5	140	0
	2	161	3	175	0
20905					
201	0	0	1	14	0
	4	35	5	49	0
	1	82	2	96	5
	3	103	4	117	0
	5	124	6	138	0
	2	166	3	180	0
21005					
280	0	0	1	20	0
	2	30	3	50	0
	5	70	6	90	0
	3	120	4	140	0
	1	170	2	190	0
	4	210	5	230	0

21106					
499	0	0	1	18	0
	1	57	2	75	39
	2	140	3	158	65
	3	236	4	254	78
	4	323	5	341	69
	5	365	6	383	24
	6	418	7	436	35
21206					
293	0	0	1	16	0
	4	40	5	56	0
	6	64	7	80	0
	1	128	2	144	0
	2	173	3	189	29
	5	205	6	221	0
	3	245	4	261	0
21306					
287	0	0	1	14	0
	1	47	2	61	33
	5	82	6	96	0
	2	124	3	138	0
	6	159	7	173	0
	3	201	4	215	0
	4	238	5	252	23
21406					
245	0	0	1	14	0
	3	28	4	42	0
	1	63	2	77	0
	4	91	5	105	0
	6	112	7	126	0
	2	161	3	175	0
	5	189	6	203	0
21506					
351	0	0	1	18	0
	4	45	5	63	0
	1	99	2	117	0
	5	144	6	162	0
	2	198	3	216	0
	6	243	7	261	0
	3	297	4	315	0
21606					
342	0	0	1	18	0
	1	44	2	62	26
	4	80	5	98	0
	5	135	6	153	37
	2	189	3	207	0
	6	234	7	252	0
	3	288	4	306	0
21706					
331	0	0	1	18	0
	3	36	4	54	0
	6	72	7	90	0
	4	133	5	151	16
	1	187	2	205	0
	5	232	6	250	0
	2	286	3	304	0
21806					
286	0	0	1	16	0
	3	32	4	48	0
	6	64	7	80	0
	4	104	5	120	0
	1	152	2	168	0
	5	192	6	208	0
	2	240	3	256	0
21906					
231	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	5	49	6	63	0
	3	84	4	98	0
	1	119	2	133	0
	4	147	5	161	0
	6	168	7	182	0

22006										
351	0	0	1	18	0					
	4	45	5	63	0					
	1	99	2	117	0					
	5	144	6	162	0					
	2	198	3	216	0					
	6	243	7	261	0					
	3	297	4	315	0					
22107										
180	0	0	1	10	0					
	2	15	3	25	0					
	4	30	5	40	0					
	6	45	7	55	0					
	1	85	2	95	0					
	3	100	4	110	0					
	5	115	6	125	0					
	7	130	8	140	0					
22207										
593	0	0	1	20	0					
	1	85	2	105	65					
	2	162	3	182	57					
	3	221	4	241	39					
	4	300	5	320	59					
	5	385	6	405	65					
	6	429	7	449	24					
	7	493	8	513	44					
22307										
403	0	0	1	16	0					
	4	40	5	56	0					
	5	92	6	108	36					
	1	148	2	164	0					
	6	196	7	212	0					
	7	232	8	248	20					
	2	296	3	312	0					
	3	355	4	371	43					
22407										
577	0	0	1	18	0					
	7	72	8	90	0					
	1	153	2	171	0					
	2	228	3	246	57					
	3	280	4	298	34					
	4	352	5	370	54					
	5	448	6	466	78					
	6	496	7	514	30					
22507										
400	0	0	1	18	0					
	1	40	2	58	22					
	5	85	6	103	0					
	2	139	3	157	0					
	6	184	7	202	0					
	3	238	4	256	0					
	7	283	8	301	0					
	4	337	5	355	0					
22607										
217	0	0	1	10	0					
	2	15	3	25	0					
	6	40	7	50	0					
	4	65	5	75	0					
	7	102	8	112	17					
	1	147	2	157	0					
	3	162	4	172	0					
	5	177	6	187	0					
22707										
256	0	0	1	12	0					
	2	18	3	30	0					
	5	42	6	54	0					
	3	76	4	88	4					
	6	100	7	112	0					
	1	148	2	160	0					
	4	172	5	184	0					
	7	196	8	208	0					
22807										
322	0	0	1	14	0					
	4	35	5	49	0					
	7	63	8	77	0					
	1	126	2	140	0					
	5	161	6	175	0					
	2	203	3	217	0					
	6	238	7	252	0					
	3	280	4	294	0					
22907										
429	0	0	1	18	0					
	4	45	5	63	0					
	1	99	2	117	0					
	5	144	6	162	0					
	2	198	3	216	0					
	6	243	7	261	0					
	7	312	8	330	51					
	3	375	4	393	0					
23007										
504	0	0	1	18	0					
	5	54	6	72	0					
	1	117	2	135	0					
	6	171	7	189	0					
	7	241	8	259	52					
	2	313	3	331	0					
	3	358	4	376	27					
	4	441	5	459	65					
23108										
648	0	0	1	16	0					
	1	63	2	79	47					
	2	118	3	134	39					
	3	203	4	219	69					
	4	293	5	309	74					
	5	367	6	383	58					
	6	411	7	427	28					
	7	486	8	502	59					
	8	560	9	576	58					
23208										
532	0	0	1	16	0					
	1	40	2	56	24					
	2	106	3	122	50					
	3	159	4	175	37					
	4	212	5	228	37					
	5	307	6	323	79					
	6	345	7	361	22					
	7	396	8	412	35					
	8	444	9	460	32					
23308										
623	0	0	1	20	0					
	1	84	2	104	64					
	2	133	3	153	29					
	3	180	4	200	27					
	4	242	5	262	42					
	5	322	6	342	60					
	6	394	7	414	52					
	7	467	8	487	53					
	8	513	9	533	26					
23408										
619	0	0	1	16	0					
	1	86	2	102	70					
	2	141	3	157	39					
	3	220	4	236	63					
	4	295	5	311	59					
	5	333	6	349	22					
	6	391	7	407	42					
	7	465	8	481	58					
	8	531	9	547	50					

23508						6	119	7	131	0
718	0	0	1	20	0	2	161	3	173	0
	1	63	2	83	43	7	200	8	212	3
	2	158	3	178	75	3	249	4	261	7
	3	249	4	269	71	8	285	9	297	0
	4	344	5	364	75	4	327	5	339	0
	5	404	6	424	40	9	363	10	375	0
	6	497	7	517	73					
	7	550	8	570	33					
	8	608	9	628	38					
23608						24309				
498	0	0	1	12	0	683	0	0	1	16
	1	73	2	85	61		1	60	2	76
	2	111	3	123	26		2	138	3	154
	3	196	4	208	73		3	184	4	200
	4	269	5	281	61		4	233	5	249
	5	301	6	313	20		5	325	6	341
	6	333	7	345	20		6	386	7	402
	7	378	8	390	33		7	434	8	450
	8	432	9	444	42		8	522	9	538
							9	587	10	603
23708						24409				
344	0	0	1	12	0	684	0	0	1	16
	5	36	6	48	0		1	40	2	56
	1	78	2	90	0		2	107	3	123
	2	111	3	123	21		3	197	4	213
	6	141	7	153	0		4	245	5	261
	3	177	4	189	0		5	322	6	338
	7	226	8	238	19		6	385	7	401
	8	259	9	271	21		7	425	8	441
	4	301	5	313	0		8	493	9	509
							9	588	10	604
23808						24509				
412	0	0	1	12	0	560	0	0	1	14
	1	37	2	49	25		1	78	2	92
	2	73	3	85	24		2	120	3	134
	7	109	8	121	0		3	159	4	173
	8	141	9	153	20		4	213	5	227
	3	189	4	201	0		5	259	6	273
	4	241	5	253	40		6	305	7	319
	5	294	6	306	41		7	372	8	386
	6	358	7	370	52		8	412	9	426
							9	476	10	490
23908						24609				
342	0	0	1	12	0	652	0	0	1	16
	4	30	5	42	0		1	81	2	97
	1	66	2	78	0		2	152	3	168
	5	96	6	108	0		3	199	4	215
	2	132	3	144	0		4	249	5	265
	6	162	7	174	0		5	286	6	302
	7	195	8	207	21		6	337	7	353
	3	237	4	249	0		7	429	8	445
	8	276	9	288	3		8	489	9	505
							9	556	10	572
24008						24709				
307	0	0	1	10	0	446	0	0	1	12
	5	30	6	40	0		5	36	6	48
	1	71	2	81	6		6	90	7	102
	2	102	3	112	21		1	138	2	150
	6	127	7	137	0		7	180	8	192
	3	172	4	182	15		2	228	3	240
	7	197	8	207	0		8	270	9	282
	4	227	5	237	0		9	306	10	318
	8	252	9	262	0		3	360	4	372
							4	404	5	416
24109						24809				
386	0	0	1	12	0	360	0	0	1	10
	5	36	6	48	0		6	35	7	45
	1	78	2	90	0		1	75	2	85
	2	114	3	126	24		7	110	8	120
	6	144	7	156	0		2	150	3	160
	3	180	4	192	0		3	190	4	200
	7	210	8	222	0		8	220	9	230
	4	246	5	258	0		4	255	5	265
	8	276	9	288	0		9	285	10	295
	9	314	10	326	26		5	320	6	330
24209										
435	0	0	1	12	0					
	5	36	6	48	0					
	1	83	2	95	5					

24909					4	321	5	341	77
787					5	414	6	434	73
0	0	1	20	0	6	455	7	475	21
1	96	2	116	76	7	506	8	526	31
2	187	3	207	71	8	569	9	589	43
3	232	4	252	25	9	611	10	631	22
4	276	5	296	24	10	698	11	718	67
5	362	6	382	66	25610				
6	435	7	455	53	494				
7	511	8	531	56	0	0	1	12	0
8	600	9	620	69	6	42	7	54	0
9	667	10	687	47	1	90	2	102	0
25009					7	132	8	144	0
662					2	180	3	192	0
0	0	1	16	0	3	226	4	238	34
1	42	2	58	26	8	262	9	274	0
2	101	3	117	43	4	304	5	316	0
3	187	4	203	70	9	348	10	360	8
4	281	5	297	78	10	398	11	410	38
5	350	6	366	53	5	446	6	458	0
6	399	7	415	33	25710				
7	446	8	462	31	885				
8	492	9	508	30	0	0	1	18	0
9	566	10	582	58	1	42	2	60	24
25110					2	129	3	147	69
347					3	177	4	195	30
0	0	1	10	0	4	272	5	290	77
4	25	5	35	0	5	345	6	363	55
8	50	9	60	0	6	435	7	453	72
1	100	2	110	0	7	499	8	517	46
2	132	3	142	22	8	596	9	614	79
5	152	6	162	0	9	674	10	692	60
9	177	10	187	0	10	768	11	786	76
3	222	4	232	0	25810				
6	242	7	252	0	831				
10	267	11	277	0	0	0	1	18	0
7	297	8	307	0	1	64	2	82	46
25210					2	103	3	121	21
771					3	193	4	211	72
0	0	1	16	0	4	265	5	283	54
1	73	2	89	57	5	321	6	339	38
2	168	3	184	79	6	378	7	396	39
3	208	4	224	24	7	475	8	493	79
4	304	5	320	80	8	572	9	590	79
5	359	6	375	39	9	629	10	647	39
6	397	7	413	22	10	714	11	732	67
7	476	8	492	63	25910				
8	560	9	576	68	405				
9	596	10	612	20	0	0	1	10	0
10	667	11	683	55	1	33	2	43	23
25310					7	68	8	78	0
357					2	122	3	132	14
0	0	1	10	0	3	153	4	163	21
5	30	6	40	0	8	184	9	194	1
8	50	9	60	0	4	226	5	236	7
1	100	2	110	0	9	256	10	266	0
2	142	3	152	32	5	295	6	305	4
6	167	7	177	0	10	325	11	335	0
9	187	10	197	0	6	360	7	370	0
3	232	4	242	0	26010				
7	257	8	267	0	571				
10	277	11	287	0	0	0	1	14	0
4	322	5	332	0	6	49	7	63	0
25410					1	105	2	119	0
687					2	169	3	183	50
0	0	1	18	0	7	211	8	225	0
1	41	2	59	23	3	260	4	274	0
2	139	3	157	80	8	302	9	316	0
3	187	4	205	30	9	354	10	368	38
4	271	5	289	66	4	410	5	424	0
5	334	6	352	45	10	459	11	473	0
6	385	7	403	33	5	515	6	529	0
7	429	8	447	26	26010				
8	471	9	489	24	571				
9	525	10	543	36	0	0	1	14	0
10	570	11	588	27	6	49	7	63	0
25510					1	105	2	119	0
828					2	169	3	183	50
0	0	1	20	0	7	211	8	225	0
1	87	2	107	67	3	260	4	274	0
2	167	3	187	60	8	302	9	316	0
3	224	4	244	37	9	354	10	368	38

SERIE 3 (VC/GL)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
30105					
314	0	0	1	27	0
	3	45	4	72	0
	5	81	6	108	0
	1	153	2	180	0
	4	198	5	225	0
	2	252	3	279	0
30205					
192	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	4	48	5	66	0
	1	90	2	108	0
	3	114	4	132	0
	5	138	6	156	0
30305					
160	0	0	1	15	0
	2	20	3	35	0
	4	40	5	55	0
	1	75	2	90	0
	3	95	4	110	0
	5	115	6	130	0
30405					
409	0	0	1	27	0
	5	63	6	90	0
	1	135	2	162	0
	2	204	3	231	42
	3	278	4	305	47
	4	337	5	364	32
30505					
262	0	0	1	21	0
	3	35	4	56	0
	1	77	2	98	0
	4	112	5	133	0
	2	164	3	185	10
	5	199	6	220	0
30605					
310	0	0	1	27	0
	3	45	4	72	0
	1	99	2	126	0
	4	144	5	171	0
	5	193	6	220	22
	2	256	3	283	0
30705					
250	0	0	1	21	0
	2	28	3	49	0
	5	63	6	84	0
	3	117	4	138	12
	1	159	2	180	0
	4	194	5	215	0
30805					
192	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	4	48	5	66	0
	1	90	2	108	0
	3	114	4	132	0
	5	138	6	156	0
30905					
284	0	0	1	24	0
	3	40	4	64	0
	5	72	6	96	0
	1	136	2	160	0
	4	176	5	200	0
	2	236	3	260	12
31005					
323	0	0	1	21	0
	4	42	5	63	0
	5	97	6	118	34
	1	153	2	174	0
	2	195	3	216	21
	3	274	4	295	58

31106					
491	0	0	1	24	0
	1	92	2	116	68
	2	163	3	187	47
	3	255	4	279	68
	4	314	5	338	35
	5	364	6	388	26
	6	411	7	435	23
31206					
207	0	0	1	15	0
	2	20	3	35	0
	5	45	6	60	0
	1	85	2	100	0
	3	105	4	120	0
	6	130	7	145	0
	4	160	5	175	0
31306					
350	0	0	1	21	0
	4	42	5	63	0
	1	91	2	112	0
	5	133	6	154	0
	6	194	7	215	40
	2	250	3	271	0
	3	301	4	322	30
31406					
602	0	0	1	30	0
	1	96	2	126	66
	2	178	3	208	52
	3	262	4	292	54
	4	367	5	397	75
	5	442	6	472	45
	6	502	7	532	30
31506					
472	0	0	1	24	0
	1	45	2	69	21
	2	116	3	140	47
	3	185	4	209	45
	4	286	5	310	77
	5	347	6	371	37
	6	392	7	416	21
31606					
383	0	0	1	21	0
	1	42	2	63	21
	2	83	3	104	20
	3	142	4	163	38
	4	184	5	205	21
	5	264	6	285	59
	6	313	7	334	28
31706					
294	0	0	1	21	0
	5	49	6	70	0
	1	105	2	126	0
	3	133	4	154	0
	6	168	7	189	0
	4	210	5	231	0
	2	252	3	273	0
31806					
284	0	0	1	18	0
	1	42	2	60	24
	4	72	5	90	0
	2	116	3	134	8
	5	146	6	164	0
	6	200	7	218	36
	3	242	4	260	0
31906					
421	0	0	1	21	0
	1	80	2	101	59
	2	127	3	148	26
	3	192	4	213	44
	4	243	5	264	30
	5	292	6	313	28
	6	351	7	372	38

32006 266	0	0	1	18	0
	3	30	4	48	0
	1	66	2	84	0
	5	102	6	120	0
	2	146	3	164	2
	6	182	7	200	0
	4	218	5	236	0
32107 529	0	0	1	24	0
	1	84	2	108	60
	2	135	3	159	27
	3	197	4	221	38
	4	295	5	319	74
	5	339	6	363	20
	6	386	7	410	23
	7	441	8	465	31
32207 595	0	0	1	27	0
	1	95	2	122	68
	2	173	3	200	51
	3	237	4	264	37
	4	298	5	325	34
	5	362	6	389	37
	6	434	7	461	45
	7	496	8	523	35
32307 658	0	0	1	30	0
	1	93	2	123	63
	2	160	3	190	37
	3	258	4	288	68
	4	310	5	340	22
	5	372	6	402	32
	6	468	7	498	66
	7	548	8	578	50
32407 236	0	0	1	15	0
	3	25	4	40	0
	5	45	6	60	0
	7	65	8	80	0
	1	115	2	130	0
	4	140	5	155	0
	6	160	7	175	0
	2	200	3	215	0
32507 589	0	0	1	27	0
	1	58	2	85	31
	2	137	3	164	52
	3	238	4	265	74
	4	315	5	342	50
	5	372	6	399	30
	6	442	7	469	43
	7	490	8	517	21
32607 519	0	0	1	21	0
	1	89	2	110	68
	2	149	3	170	39
	3	228	4	249	58
	4	281	5	302	32
	5	329	6	350	27
	6	377	7	398	27
	7	442	8	463	44
32707 260	0	0	1	15	0
	3	25	4	40	0
	6	50	7	65	0
	1	95	2	110	0
	4	120	5	135	0
	7	145	8	160	0
	2	190	3	205	0
	5	215	6	230	0

32807 473	0	0	1	24	0
	5	56	6	80	0
	1	120	2	144	0
	2	189	3	213	45
	6	237	7	261	0
	7	297	8	321	36
	3	361	4	385	0
	4	409	5	433	24
32907 590	0	0	1	24	0
	1	94	2	118	70
	2	149	3	173	31
	3	200	4	224	27
	4	300	5	324	76
	5	371	6	395	47
	6	425	7	449	30
	7	502	8	526	53
33007 250	0	0	1	15	0
	2	20	3	35	0
	5	45	6	60	0
	3	75	4	90	0
	6	100	7	115	0
	1	145	2	160	0
	4	170	5	185	0
	7	195	8	210	0
33108 628	0	0	1	24	0
	1	66	2	90	42
	7	130	8	154	0
	8	184	9	208	30
	2	264	3	288	0
	3	332	4	356	44
	4	383	5	407	27
	5	472	6	496	65
	6	548	7	572	52
33208 392	0	0	1	18	0
	4	36	5	54	0
	8	72	9	90	0
	5	122	6	140	8
	1	170	2	188	0
	6	212	7	230	0
	2	260	3	278	0
	7	302	8	320	0
	3	350	4	368	0
33308 527	0	0	1	18	0
	1	56	2	74	38
	2	121	3	139	47
	3	168	4	186	29
	4	228	5	246	42
	5	303	6	321	57
	6	354	7	372	33
	7	402	8	420	30
	8	455	9	473	35
33408 443	0	0	1	18	0
	6	48	7	66	0
	1	102	2	120	0
	7	150	8	168	0
	2	204	3	222	0
	8	252	9	270	0
	3	306	4	324	0
	4	346	5	364	22
	5	389	6	407	25

33508						3	207	4	237	27
603	0	0	1	27	0	4	298	5	328	61
	1	68	2	95	41	5	391	6	421	63
	6	131	7	158	0	6	461	7	491	40
	2	203	3	230	0	7	562	8	592	71
	7	266	8	293	0	8	622	9	652	30
	3	338	4	365	0	9	731	10	761	79
	8	401	9	428	0					
	4	473	5	500	0	34309				
	5	522	6	549	22	818	0	0	1	27
33608							1	49	2	76
544	0	0	1	24	0		2	144	3	171
	5	56	6	80	0		3	233	4	260
	1	120	2	144	0		4	335	5	362
	6	176	7	200	0		5	403	6	430
	2	240	3	264	0		6	477	7	504
	7	296	8	320	0		7	540	8	567
	3	360	4	384	0		8	606	9	633
	8	416	9	440	0		9	701	10	728
	4	480	5	504	0	34409				
33708						461	0	0	1	18
601	0	0	1	24	0		1	46	2	64
	1	52	2	76	28		2	109	3	127
	7	116	8	140	0		6	145	7	163
	2	188	3	212	0		3	187	4	205
	3	249	4	273	37		7	223	8	241
	8	305	9	329	0		4	278	5	296
	4	369	5	393	0		8	320	9	338
	5	443	6	467	50		9	359	10	377
	6	521	7	545	54		5	407	6	425
33808						34509				
410	0	0	1	18	0	580	0	0	1	21
	5	42	6	60	0		5	49	6	70
	1	90	2	108	0		1	105	2	126
	6	132	7	150	0		2	160	3	181
	2	180	3	198	0		6	202	7	223
	7	222	8	240	0		7	279	8	300
	3	270	4	288	0		3	335	4	356
	8	312	9	330	0		8	384	9	405
	4	362	5	380	2		4	440	5	461
							9	489	10	510
33908						34609				
609	0	0	1	24	0	715	0	0	1	21
	1	44	2	68	20		1	52	2	73
	2	114	3	138	46		2	99	3	120
	3	185	4	209	47		3	183	4	204
	4	245	5	269	36		4	231	5	252
	5	290	6	314	21		5	291	6	312
	6	355	7	379	41		6	367	7	388
	7	451	8	475	72		7	453	8	474
	8	513	9	537	38		8	544	9	565
							9	624	10	645
34008						34709				
289	0	0	1	15	0	344	0	0	1	15
	3	25	4	40	0		1	39	2	54
	6	50	7	65	0		4	64	5	79
	1	95	2	110	0		7	89	8	104
	4	120	5	135	0		2	134	3	149
	7	145	8	160	0		5	159	6	174
	5	176	6	191	1		8	184	9	199
	8	201	9	216	0		3	229	4	244
	2	251	3	266	0		6	254	7	269
							9	279	10	294
34109						34809				
606	0	0	1	18	0	700	0	0	1	21
	1	57	2	75	39		8	70	9	91
	8	111	9	129	0		1	147	2	168
	2	171	3	189	0		9	217	10	238
	3	229	4	247	40		2	294	3	315
	9	277	10	295	0		3	336	4	357
	4	331	5	349	0		4	384	5	405
	5	423	6	441	74		5	440	6	461
	6	494	7	512	53		6	540	7	561
	7	540	8	558	28		7	623	8	644
34209										
861	0	0	1	30	0					
	1	92	2	122	62					
	2	150	3	180	28					

34909						4	304	5	331	55
424	0	0	1	15	0	5	360	6	387	29
	5	35	6	50	0	6	426	7	453	39
	1	83	2	98	8	7	530	8	557	77
	6	118	7	133	0	8	620	9	647	63
	2	161	3	176	3	9	710	10	737	63
	7	209	8	224	13	10	808	11	835	71
	3	249	4	264	0	35610				
	8	284	9	299	0	856	0	0	1	21
	9	339	10	354	40		1	79	2	100
	4	384	5	399	0		2	132	3	153
35009							3	188	4	209
880	0	0	1	24	0		4	287	5	308
	1	80	2	104	56		5	378	6	399
	2	178	3	202	74		6	439	7	460
	3	267	4	291	65		7	538	8	559
	4	353	5	377	62		8	615	9	636
	5	449	6	473	72		9	661	10	682
	6	496	7	520	23		10	758	11	779
	7	597	8	621	77	35710				
	8	675	9	699	54	804	0	0	1	21
	9	776	10	800	77		1	96	2	117
35110							2	142	3	163
737	0	0	1	18	0		3	215	4	236
	1	93	2	111	75		4	279	5	300
	2	180	3	198	69		5	378	6	399
	3	240	4	258	42		6	419	7	440
	4	284	5	302	26		7	499	8	520
	5	361	6	379	59		8	551	9	572
	6	447	7	465	68		9	644	10	665
	7	524	8	542	59		10	706	11	727
	8	563	9	581	21	35810				
	9	604	10	622	23	866	0	0	1	24
	10	653	11	671	31		1	99	2	123
35210							2	149	3	173
559	0	0	1	18	0		3	234	4	258
	6	48	7	66	0		4	291	5	315
	1	102	2	120	0		5	375	6	399
	7	150	8	168	0		6	442	7	466
	2	204	3	222	0		7	526	8	550
	8	252	9	270	0		8	594	9	618
	3	306	4	324	0		9	677	10	701
	9	354	10	372	0		10	754	11	778
	10	399	11	417	27	35910				
	4	459	5	477	0	752	0	0	1	18
	5	505	6	523	28		1	78	2	96
35310							2	119	3	137
825	0	0	1	21	0		3	180	4	198
	1	86	2	107	65		4	277	5	295
	2	159	3	180	52		5	329	6	347
	3	245	4	266	65		6	415	7	433
	4	339	5	360	73		7	489	8	507
	5	384	6	405	24		8	539	9	557
	6	443	7	464	38		9	625	10	643
	7	507	8	528	43		10	668	11	686
	8	602	9	623	74	36010				
	9	649	10	670	26	571	0	0	1	18
	10	727	11	748	57		6	48	7	66
35410							1	102	2	120
693	0	0	1	18	0		7	150	8	168
	1	43	2	61	25		2	204	3	222
	2	123	3	141	62		8	252	9	270
	3	164	4	182	23		3	306	4	324
	4	227	5	245	45		9	354	10	372
	5	288	6	306	43		10	415	11	433
	6	341	7	359	35		4	475	5	493
	7	380	8	398	21		5	517	6	535
	8	476	9	494	78	36010				
	9	544	10	562	50	571	0	0	1	18
	10	609	11	627	47		6	48	7	66
35510							1	102	2	120
934	0	0	1	27	0		7	150	8	168
	1	48	2	75	21		2	204	3	222
	2	137	3	164	62		8	252	9	270
	3	222	4	249	58		3	306	4	324

SERIE 4 (VS/GR)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
40105					
138	0	0	1	9	0
	5	33	6	42	0
	4	54	5	63	0
	3	75	4	84	0
	2	96	3	105	0
	1	117	2	126	0
40205					
194	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	5	48	6	60	0
	3	84	4	96	0
	4	122	5	134	26
	1	166	2	178	0
40305					
230	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	4	50	5	65	0
	1	105	2	120	0
	3	130	4	145	0
	5	155	6	170	0
40405					
138	0	0	1	9	0
	5	33	6	42	0
	4	54	5	63	0
	3	75	4	84	0
	2	96	3	105	0
	1	117	2	126	0
40505					
254	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	1	64	2	79	4
	3	89	4	104	0
	4	134	5	149	30
	5	179	6	194	30
40605					
144	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	4	65	5	75	0
	3	89	4	99	0
	1	120	2	130	0
40705					
184	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	5	48	6	60	0
	4	76	5	88	0
	1	120	2	132	0
	3	140	4	152	0
40805					
214	0	0	1	13	0
	2	22	3	35	0
	4	44	5	57	0
	5	103	6	116	46
	3	143	4	156	0
	1	183	2	196	0
40905					
155	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	4	34	5	44	0
	5	69	6	79	25
	3	100	4	110	0
	1	131	2	141	0
41005					
138	0	0	1	9	0
	4	27	5	36	0
	3	48	4	57	0
	5	63	6	72	0
	2	96	3	105	0
	1	117	2	126	0

41106					
211	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	6	73	7	83	22
	3	111	4	121	0
	1	142	2	152	0
	4	166	5	176	0
41206					
266	0	0	1	13	0
	2	22	3	35	0
	5	53	6	66	0
	6	88	7	101	22
	3	137	4	150	0
	1	177	2	190	0
	4	208	5	221	0
41306					
244	0	0	1	13	0
	2	22	3	35	0
	5	53	6	66	0
	3	93	4	106	0
	6	124	7	137	0
	4	164	5	177	0
	1	213	2	226	0
41406					
316	0	0	1	13	0
	4	40	5	53	0
	1	89	2	102	0
	5	129	6	142	0
	2	178	3	191	0
	6	218	7	231	0
	3	267	4	280	0
41506					
287	0	0	1	13	0
	1	49	2	62	36
	2	84	3	97	22
	5	115	6	128	0
	3	155	4	168	0
	6	186	7	199	0
	4	229	5	242	3
41606					
221	0	0	1	12	0
	3	28	4	40	0
	1	64	2	76	0
	4	92	5	104	0
	6	112	7	124	0
	5	141	6	153	1
	2	185	3	197	0
41706					
165	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	2	69	3	78	0
	4	84	5	93	0
	6	99	7	108	0
	1	144	2	153	0
41806					
160	0	0	1	9	0
	4	27	5	36	0
	6	42	7	51	0
	5	70	6	79	7
	3	97	4	106	0
	2	118	3	127	0
	1	139	2	148	0
41906					
211	0	0	1	10	0
	1	30	2	40	20
	4	54	5	64	0
	6	71	7	81	0
	2	116	3	126	0
	5	140	6	150	0
	3	173	4	183	2

42006										
236	0	0	1	12	0					
	4	36	5	48	0					
	6	56	7	68	0					
	2	108	3	120	0					
	5	136	6	148	0					
	3	172	4	184	0					
	1	208	2	220	0					
42107										
204	0	0	1	9	0					
	2	15	3	24	0					
	5	36	6	45	0					
	7	51	8	60	0					
	3	90	4	99	0					
	1	117	2	126	0					
	4	138	5	147	0					
	6	153	7	162	0					
42207										
282	0	0	1	12	0					
	3	28	4	40	0					
	5	48	6	60	0					
	1	100	2	112	0					
	4	128	5	140	0					
	6	148	7	160	0					
	7	186	8	198	26					
	2	246	3	258	0					
42307										
423	0	0	1	15	0					
	1	65	2	80	50					
	5	110	6	125	0					
	2	165	3	180	0					
	6	210	7	225	0					
	7	252	8	267	27					
	3	317	4	332	0					
	4	358	5	373	26					
42407										
204	0	0	1	9	0					
	2	15	3	24	0					
	6	42	7	51	0					
	1	87	2	96	0					
	3	102	4	111	0					
	5	117	6	126	0					
	7	132	8	141	0					
	4	165	5	174	0					
42507										
288	0	0	1	12	0					
	3	28	4	40	0					
	6	56	7	68	0					
	1	116	2	128	0					
	4	144	5	156	0					
	7	172	8	184	0					
	5	208	6	220	0					
	2	252	3	264	0					
42607										
249	0	0	1	10	0					
	2	17	3	27	0					
	4	34	5	44	0					
	6	51	7	61	0					
	7	90	8	100	29					
	1	149	2	159	0					
	5	180	6	190	0					
	3	211	4	221	0					
42707										
220	0	0	1	10	0					
	1	38	2	48	28					
	3	55	4	65	0					
	5	72	6	82	0					
	7	89	8	99	0					
	4	127	5	137	0					
	6	144	7	154	0					
	2	189	3	199	0					
42807										
431	0	0	1	15	0					
	1	73	2	88	58					
	4	108	5	123	0					
	5	155	6	170	32					
	2	210	3	225	0					
	6	255	7	270	0					
	7	311	8	326	41					
	3	376	4	391	0					
42907										
304	0	0	1	12	0					
	3	28	4	40	0					
	1	64	2	76	0					
	6	108	7	120	0					
	2	160	3	172	0					
	4	180	5	192	0					
	7	208	8	220	0					
	5	244	6	256	0					
43007										
361	0	0	1	13	0					
	1	36	2	49	23					
	5	76	6	89	0					
	2	125	3	138	0					
	6	165	7	178	0					
	3	214	4	227	0					
	7	254	8	267	0					
	4	303	5	316	0					
43108										
370	0	0	1	10	0					
	5	38	6	48	0					
	1	83	2	93	0					
	2	124	3	134	31					
	6	155	7	165	0					
	3	193	4	203	0					
	7	224	8	234	0					
	4	262	5	272	0					
	8	297	9	307	4					
43208										
537	0	0	1	13	0					
	5	49	6	62	0					
	6	125	7	138	63					
	1	192	2	205	0					
	7	250	8	263	0					
	2	317	3	330	0					
	8	375	9	388	0					
	3	442	4	455	0					
	4	479	5	492	24					
43308										
532	0	0	1	15	0					
	1	38	2	53	23					
	2	79	3	94	26					
	3	139	4	154	45					
	4	211	5	226	57					
	5	263	6	278	37					
	6	307	7	322	29					
	7	342	8	357	20					
	8	427	9	442	70					
43408										
244	0	0	1	9	0					
	3	21	4	30	0					
	5	36	6	45	0					
	7	51	8	60	0					
	1	102	2	111	0					
	2	136	3	145	25					
	4	151	5	160	0					
	6	166	7	175	0					
	8	181	9	190	0					

43508					6	45	7	54	0	
265					8	60	9	69	0	
	0	0	1	9	0					
	3	21	4	30	0				20	
	6	42	7	51	0				0	
	7	73	8	82	22				0	
	1	124	2	133	0				0	
	4	145	5	154	0				0	
	8	172	9	181	0				0	
	5	205	6	214	0				0	
	2	238	3	247	0				0	
43608					44309					
273					401	0	0	1	10	0
	0	0	1	9	0					0
	3	21	4	30	0					0
	1	48	2	57	0					0
	7	87	8	96	0					0
	4	120	5	129	0					0
	2	147	3	156	0					0
	5	168	6	177	0					0
	8	189	9	198	0					20
	6	222	7	231	6					0
43708					44409					
208					497	0	0	1	12	0
	0	0	1	7	0					32
	3	17	4	24	0					0
	1	39	2	46	0					0
	5	61	6	68	0					0
	7	73	8	80	0					0
	2	110	3	117	0					0
	6	132	7	139	0					0
	8	144	9	151	0					25
	4	176	5	183	0					0
43808					44509					
194					546	0	0	1	13	0
	0	0	1	7	0					0
	1	33	2	40	26					0
	3	45	4	52	0					0
	5	57	6	64	0					49
	7	69	8	76	0					0
	2	106	3	113	0					0
	4	118	5	125	0					0
	6	130	7	137	0					22
	8	142	9	149	0					0
43908					44609					
250					509	0	0	1	12	0
	0	0	1	9	0					0
	3	21	4	30	0					0
	5	36	6	45	0					6
	7	51	8	60	0					0
	8	82	9	91	22					0
	1	139	2	148	0					0
	2	169	3	178	21					0
	4	184	5	193	0					28
	6	199	7	208	0					51
44008					44709					
188					524	0	0	1	10	0
	0	0	1	7	0					0
	3	17	4	24	0					0
	5	29	6	36	0					0
	7	41	8	48	0					0
	2	78	3	85	0					56
	4	90	5	97	0					0
	8	112	9	119	0					0
	6	134	7	141	0					24
	1	171	2	178	0					27
44109					44809					
357					602	0	0	1	12	0
	0	0	1	9	0					61
	3	21	4	30	0					20
	5	36	6	45	0					43
	1	75	2	84	0					22
	6	108	7	117	0					55
	7	140	8	149	23					66
	8	177	9	186	28					74
	4	216	5	225	0					29
	2	243	3	252	0					32
	9	288	10	297	0					
44209										
254										
	0	0	1	9	0					
	2	15	3	24	0					
	4	30	5	39	0					

44909						1	103	2	110	0
384	0	0	1	9	0	6	130	7	137	0
	6	39	7	48	0	9	147	10	154	0
	1	84	2	93	0	7	177	8	184	8
	2	114	3	123	21	10	194	11	201	0
	7	147	8	156	0	2	246	3	253	0
	3	186	4	195	0	3	293	4	300	40
	8	219	9	228	0					
	4	258	5	267	0	45610	0	0	1	13
	5	288	6	297	21	748	1	67	2	80
	9	315	10	324	0		2	148	3	161
45009							3	198	4	211
310	0	0	1	9	0		4	258	5	271
	3	21	4	30	0		5	345	6	358
	8	54	9	63	0		6	383	7	396
	6	81	7	90	0		7	438	8	451
	9	102	10	111	0		8	492	9	505
	4	147	5	156	0		9	555	10	568
	1	180	2	189	0		10	636	11	649
	2	217	3	226	28	45710				
	5	238	6	247	0	312	0	0	1	7
	7	253	8	262	0		4	22	5	29
45110							8	44	9	51
677	0	0	1	12	0		5	71	6	78
	1	82	2	94	70		9	93	10	100
	2	148	3	160	54		10	122	11	129
	3	180	4	192	20		6	154	7	161
	4	226	5	238	34		1	191	2	198
	5	308	6	320	70		2	226	3	233
	6	392	7	404	72		7	253	8	260
	7	429	8	441	25		3	285	4	292
	8	484	9	496	43	45810				
	9	536	10	548	40	568	0	0	1	12
	10	577	11	589	29		6	52	7	64
45210							1	112	2	124
825	0	0	1	15	0		2	149	3	161
	1	39	2	54	24		7	193	8	205
	2	119	3	134	65		8	229	9	241
	3	181	4	196	47		3	289	4	301
	4	258	5	273	62		4	334	5	346
	5	330	6	345	57		9	378	10	390
	6	395	7	410	50		10	448	11	460
	7	451	8	466	41		5	508	6	520
	8	533	9	548	67	45910				
	9	618	10	633	70	376	0	0	1	9
	10	700	11	715	67		4	27	5	36
45310							8	54	9	63
459	0	0	1	10	0		5	87	6	96
	3	24	4	34	0		9	114	10	123
	7	55	8	65	0		1	177	2	186
	8	108	9	118	43		2	217	3	226
	4	153	5	163	0		6	244	7	253
	1	191	2	201	0		10	271	11	280
	5	222	6	232	0		7	304	8	313
	9	253	10	263	0		3	343	4	352
	10	296	11	306	33	46010				
	2	369	3	379	0	643	0	0	1	13
	6	400	7	410	0		1	37	2	50
45410							7	95	8	108
451	0	0	1	10	0		2	162	3	175
	1	37	2	47	27		8	220	9	233
	5	68	6	78	0		3	287	4	300
	2	106	3	116	0		4	335	5	348
	6	137	7	147	0		9	384	10	397
	7	180	8	190	33		10	466	11	479
	3	225	4	235	0		5	533	6	546
	8	263	9	273	0		6	567	7	580
	9	304	10	314	31					
	10	347	11	357	33					
	4	406	5	416	0					
45510										
320	0	0	1	7	0					
	4	22	5	29	0					
	8	44	9	51	0					
	5	71	6	78	0					

SERIE 5 (VS/GS)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
50105					
156	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	5	42	6	54	0
	2	78	3	90	0
	4	96	5	108	0
	1	132	2	144	0
50205					
294	0	0	1	18	0
	4	45	5	63	0
	1	99	2	117	0
	5	144	6	162	0
	2	198	3	216	0
	3	240	4	258	24
50305					
300	0	0	1	20	0
	3	40	4	60	0
	1	90	2	110	0
	4	130	5	150	0
	2	180	3	200	0
	5	220	6	240	0
50405					
130	0	0	1	10	0
	3	20	4	30	0
	5	35	6	45	0
	2	65	3	75	0
	4	80	5	90	0
	1	110	2	120	0
50505					
270	0	0	1	18	0
	3	36	4	54	0
	1	81	2	99	0
	4	117	5	135	0
	2	162	3	180	0
	5	198	6	216	0
50605					
208	0	0	1	16	0
	2	24	3	40	0
	4	48	5	64	0
	1	96	2	112	0
	3	120	4	136	0
	5	144	6	160	0
50705					
190	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	4	42	5	56	0
	5	76	6	90	20
	1	125	2	139	0
	3	146	4	160	0
50805					
156	0	0	1	12	0
	5	36	6	48	0
	4	60	5	72	0
	3	84	4	96	0
	2	108	3	120	0
	1	132	2	144	0
50905					
130	0	0	1	10	0
	5	30	6	40	0
	4	50	5	60	0
	3	70	4	80	0
	2	90	3	100	0
	1	110	2	120	0
51005					
261	0	0	1	20	0
	2	30	3	50	0
	4	60	5	80	0
	5	101	6	121	21
	1	171	2	191	0
	3	201	4	221	0

51106

217	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	5	49	6	63	0
	3	84	4	98	0
	6	112	7	126	0
	4	147	5	161	0
	1	189	2	203	0
51206					
408	0	0	1	18	0
	1	55	2	73	37
	2	107	3	125	34
	3	199	4	217	74
	4	238	5	256	21
	5	276	6	294	20
	6	327	7	345	33
51306					
406	0	0	1	18	0
	1	50	2	68	32
	2	100	3	118	32
	3	140	4	158	22
	4	234	5	252	76
	5	280	6	298	28
	6	325	7	343	27
51406					
319	0	0	1	18	0
	1	44	2	62	26
	2	94	3	112	32
	5	130	6	148	0
	3	175	4	193	0
	6	211	7	229	0
	4	256	5	274	0
51506					
174	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	6	54	7	66	0
	5	78	6	90	0
	1	120	2	132	0
	3	138	4	150	0
51606					
186	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	6	54	7	66	0
	1	102	2	114	0
	3	120	4	132	0
	5	138	6	150	0
51706					
165	0	0	1	10	0
	3	20	4	30	0
	5	35	6	45	0
	2	65	3	75	0
	1	85	2	95	0
	4	105	5	115	0
	6	120	7	130	0
51806					
297	0	0	1	18	0
	2	27	3	45	0
	5	63	6	81	0
	3	108	4	126	0
	1	153	2	171	0
	4	189	5	207	0
	6	216	7	234	0
51906					
382	0	0	1	18	0
	1	55	2	73	37
	5	100	6	118	0
	6	141	7	159	23
	2	204	3	222	0
	3	280	4	298	58
	4	319	5	337	21

52006					
206	0	0	1	12	0
	1	32	2	44	20
	5	62	6	74	0
	2	98	3	110	0
	4	116	5	128	0
	6	134	7	146	0
	3	170	4	182	0
52107					
216	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	1	72	2	84	0
	3	90	4	102	0
	6	114	7	126	0
	5	138	6	150	0
	7	156	8	168	0
52207					
266	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	4	42	5	56	0
	7	70	8	84	0
	5	105	6	119	0
	1	154	2	168	0
	3	175	4	189	0
	6	203	7	217	0
52307					
317	0	0	1	14	0
	3	28	4	42	0
	1	63	2	77	0
	4	91	5	105	0
	2	126	3	140	0
	5	157	6	171	3
	6	192	7	206	21
	7	247	8	261	41
52407					
374	0	0	1	16	0
	4	40	5	56	0
	1	88	2	104	0
	5	128	6	144	0
	2	176	3	192	0
	6	216	7	232	0
	7	270	8	286	38
	3	326	4	342	0
52507					
180	0	0	1	10	0
	4	25	5	35	0
	6	40	7	50	0
	3	70	4	80	0
	5	85	6	95	0
	7	100	8	110	0
	2	140	3	150	0
	1	160	2	170	0
52607					
266	0	0	1	14	0
	4	35	5	49	0
	6	56	7	70	0
	1	112	2	126	0
	3	133	4	147	0
	5	154	6	168	0
	7	175	8	189	0
	2	231	3	245	0
52707					
442	0	0	1	18	0
	4	45	5	63	0
	5	91	6	109	28
	1	154	2	172	0
	6	208	7	226	0
	2	271	3	289	0
	7	325	8	343	0
	3	388	4	406	0

52807					
499	0	0	1	18	0
	1	64	2	82	46
	2	107	3	125	25
	3	186	4	204	61
	4	248	5	266	44
	5	295	6	313	29
	6	341	7	359	28
	7	409	8	427	50
52907					
349	0	0	1	14	0
	4	35	5	49	0
	5	70	6	84	21
	1	119	2	133	0
	6	161	7	175	0
	7	216	8	230	41
	2	272	3	286	0
	3	307	4	321	21
53007					
525	0	0	1	18	0
	1	60	2	78	42
	2	110	3	128	32
	3	158	4	176	30
	4	237	5	255	61
	5	278	6	296	23
	6	368	7	386	72
	7	435	8	453	49
53108					
541	0	0	1	16	0
	1	44	2	60	28
	2	95	3	111	35
	3	150	4	166	39
	4	199	5	215	33
	5	278	6	294	63
	6	346	7	362	52
	7	407	8	423	45
	8	453	9	469	30
53208					
297	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	7	54	8	66	0
	8	103	9	115	37
	5	139	6	151	0
	1	181	2	193	0
	4	205	5	217	0
	6	223	7	235	0
	2	265	3	277	0
53308					
301	0	0	1	12	0
	1	43	2	55	31
	4	67	5	79	0
	7	91	8	103	0
	2	139	3	151	0
	5	163	6	175	0
	8	187	9	199	0
	6	229	7	241	12
	3	265	4	277	0
53408					
472	0	0	1	16	0
	5	48	6	64	0
	1	104	2	120	0
	6	152	7	168	0
	2	208	3	224	0
	7	256	8	272	0
	3	312	4	328	0
	8	360	9	376	0
	4	416	5	432	0

54909						6	149	7	163	0
457	0	0	1	14	0	2	198	3	212	0
	4	35	5	49	0	3	249	4	263	37
	1	77	2	91	0	7	284	8	298	0
	5	125	6	139	13	10	312	11	326	0
	6	167	7	181	28	8	347	9	361	0
	2	216	3	230	0	4	396	5	410	0
	7	258	8	272	0					
	8	308	9	322	36	55610	0	0	1	18
	9	352	10	366	30	744	1	57	2	75
	3	415	4	429	0		2	142	3	160
55009							3	191	4	209
258	0	0	1	10	0		4	239	5	257
	3	20	4	30	0		5	327	6	345
	6	40	7	50	0		6	412	7	430
	8	55	9	65	0		7	493	8	511
	1	105	2	115	0		8	546	9	564
	4	125	5	135	0		9	587	10	605
	7	145	8	155	0		10	627	11	645
	9	160	10	170	0	55710				
	5	195	6	205	0	586	0	0	1	16
	2	225	3	235	0		1	52	2	68
55110							6	100	7	116
762	0	0	1	18	0		7	140	8	156
	1	83	2	101	65		2	204	3	220
	2	152	3	170	51		3	267	4	283
	3	200	4	218	30		8	315	9	331
	4	243	5	261	25		4	371	5	387
	5	315	6	333	54		9	419	10	435
	6	376	7	394	43		10	458	11	474
	7	438	8	456	44		5	522	6	538
	8	509	9	527	53	55810				
	9	601	10	619	74	607	0	0	1	16
	10	645	11	663	26		1	64	2	80
55210							2	119	3	135
553	0	0	1	14	0		7	167	8	183
	5	42	6	56	0		3	223	4	239
	10	84	11	98	0		8	271	9	287
	6	133	7	147	0		4	327	5	343
	1	189	2	203	0		9	375	10	391
	7	238	8	252	0		5	431	6	447
	2	294	3	308	0		10	479	11	495
	8	343	9	357	0		6	535	7	551
	3	399	4	413	0	55910				
	9	448	10	462	0	437	0	0	1	12
	4	504	5	518	0		6	42	7	54
55310							10	72	11	84
825	0	0	1	20	0		7	119	8	131
	1	70	2	90	50		4	155	5	167
	2	132	3	152	42		1	191	2	203
	3	204	4	224	52		8	239	9	251
	4	278	5	298	54		2	293	3	305
	5	371	6	391	73		5	317	6	329
	6	453	7	473	62		9	347	10	359
	7	509	8	529	36		3	401	4	413
	8	579	9	599	50	56010				
	9	630	10	650	31	591	0	0	1	16
	10	695	11	715	45		1	37	2	53
55410							6	85	7	101
750	0	0	1	18	0		2	141	3	157
	6	63	7	81	0		3	217	4	233
	1	135	2	153	0		7	257	8	273
	7	198	8	216	0		4	305	5	321
	2	270	3	288	0		8	345	9	361
	8	333	9	351	0		9	383	10	399
	9	387	10	405	36		5	439	6	455
	3	468	4	486	0		10	487	11	503
	4	543	5	561	57					
	10	606	11	624	0					
	5	678	6	696	0					
55510										
445	0	0	1	14	0					
	1	37	2	51	23					
	5	72	6	86	0					
	9	107	10	121	0					

SERIE 6 (VS/GL)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
60105					
160	0	0	1	15	0
	2	20	3	35	0
	4	40	5	55	0
	1	75	2	90	0
	3	95	4	110	0
	5	115	6	130	0
60205					
207	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	4	48	5	66	0
	5	93	6	111	27
	1	141	2	159	0
	3	165	4	183	0
60305					
160	0	0	1	15	0
	4	30	5	45	0
	3	55	4	70	0
	5	75	6	90	0
	2	110	3	125	0
	1	135	2	150	0
60405					
354	0	0	1	27	0
	4	54	5	81	0
	1	117	2	144	0
	5	171	6	198	0
	2	234	3	261	0
	3	291	4	318	30
60505					
252	0	0	1	21	0
	3	35	4	56	0
	1	77	2	98	0
	4	112	5	133	0
	2	154	3	175	0
	5	189	6	210	0
60605					
238	0	0	1	21	0
	2	28	3	49	0
	5	63	6	84	0
	3	105	4	126	0
	1	147	2	168	0
	4	182	5	203	0
60705					
197	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	1	54	2	72	0
	4	84	5	102	0
	3	114	4	132	0
	5	143	6	161	5
60805					
368	0	0	1	24	0
	1	67	2	91	43
	2	112	3	136	21
	3	199	4	223	63
	4	249	5	273	26
	5	296	6	320	23
60905					
170	0	0	1	15	0
	4	30	5	45	0
	1	65	2	80	0
	3	85	4	100	0
	5	105	6	120	0
	2	140	3	155	0
61005					
272	0	0	1	24	0
	4	48	5	72	0
	1	104	2	128	0
	3	136	4	160	0
	5	168	6	192	0
	2	224	3	248	0

61106					
228	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	1	66	2	84	12
	4	96	5	114	0
	6	120	7	138	0
	5	150	6	168	0
	3	186	4	204	0
61206					
412	0	0	1	27	0
	1	67	2	94	40
	4	112	5	139	0
	2	166	3	193	0
	5	211	6	238	0
	6	286	7	313	48
	3	349	4	376	0
61306					
405	0	0	1	27	0
	4	54	5	81	0
	1	117	2	144	0
	2	171	3	198	27
	5	216	6	243	0
	3	270	4	297	0
	6	315	7	342	0
61406					
414	0	0	1	30	0
	1	54	2	84	24
	2	114	3	144	30
	5	164	6	194	0
	3	224	4	254	0
	6	274	7	304	0
	4	334	5	364	0
61506					
279	0	0	1	18	0
	4	36	5	54	0
	1	78	2	96	0
	5	114	6	132	0
	2	156	3	174	0
	6	195	7	213	3
	3	237	4	255	0
61606					
442	0	0	1	27	0
	1	78	2	105	51
	5	132	6	159	0
	2	195	3	222	0
	6	249	7	276	0
	3	312	4	339	0
	4	370	5	397	31
61706					
360	0	0	1	27	0
	2	36	3	63	0
	5	81	6	108	0
	3	135	4	162	0
	1	189	2	216	0
	4	234	5	261	0
	6	270	7	297	0
61806					
382	0	0	1	24	0
	4	48	5	72	0
	5	92	6	116	20
	1	156	2	180	0
	2	222	3	246	42
	6	270	7	294	0
	3	326	4	350	0
61906					
307	0	0	1	21	0
	1	48	2	69	27
	4	83	5	104	0
	2	125	3	146	0
	5	160	6	181	0
	3	202	4	223	0
	6	237	7	258	0

62006					
395	0	0	1	24	0
	1	55	2	79	31
	4	95	5	119	0
	2	143	3	167	0
	5	183	6	207	0
	6	283	7	307	76
	3	339	4	363	0
62107					
252	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	4	48	5	66	0
	7	78	8	96	0
	6	108	7	126	0
	5	138	6	156	0
	1	186	2	204	0
	3	210	4	228	0
62207					
233	0	0	1	15	0
	2	20	3	35	0
	4	40	5	55	0
	7	65	8	80	0
	5	98	6	113	3
	1	138	2	153	0
	3	158	4	173	0
	6	183	7	198	0
62307					
400	0	0	1	24	0
	2	32	3	56	0
	5	72	6	96	0
	3	120	4	144	0
	6	160	7	184	0
	1	232	2	256	0
	4	272	5	296	0
	7	312	8	336	0
62407					
518	0	0	1	27	0
	4	54	5	81	0
	5	113	6	140	32
	1	185	2	212	0
	6	248	7	275	0
	2	320	3	347	0
	7	383	8	410	0
	3	455	4	482	0
62507					
448	0	0	1	24	0
	4	48	5	72	0
	1	104	2	128	0
	5	152	6	176	0
	2	208	3	232	0
	6	256	7	280	0
	3	312	4	336	0
	7	360	8	384	0
62607					
324	0	0	1	18	0
	5	42	6	60	0
	6	96	7	114	36
	1	150	2	168	0
	3	174	4	192	0
	7	210	8	228	0
	4	252	5	270	0
	2	288	3	306	0
62707					
435	0	0	1	24	0
	1	59	2	83	35
	5	107	6	131	0
	2	163	3	187	0
	6	211	7	235	0
	3	267	4	291	0
	7	315	8	339	0
	4	371	5	395	0

62807					
334	0	0	1	18	0
	1	52	2	70	34
	5	88	6	106	0
	2	130	3	148	0
	6	166	7	184	0
	3	208	4	226	0
	7	244	8	262	0
	4	286	5	304	0
62907					
502	0	0	1	27	0
	1	58	2	85	31
	6	121	7	148	0
	2	193	3	220	0
	3	249	4	276	29
	7	303	8	330	0
	4	366	5	393	0
	5	421	6	448	28
63007					
692	0	0	1	30	0
	1	84	2	114	54
	2	189	3	219	75
	3	259	4	289	40
	4	351	5	381	62
	5	428	6	458	47
	6	511	7	541	53
	7	582	8	612	41
63108					
697	0	0	1	24	0
	1	76	2	100	52
	2	171	3	195	71
	3	246	4	270	51
	4	321	5	345	51
	5	405	6	429	60
	6	461	7	485	32
	7	522	8	546	37
	8	601	9	625	55
63208					
548	0	0	1	24	0
	4	48	5	72	0
	5	92	6	116	20
	6	142	7	166	26
	1	214	2	238	0
	2	276	3	300	38
	7	332	8	356	0
	3	396	4	420	0
	8	452	9	476	0
63308					
603	0	0	1	27	0
	5	63	6	90	0
	1	135	2	162	0
	6	198	7	225	0
	2	270	3	297	0
	3	341	4	368	44
	7	395	8	422	0
	8	459	9	486	37
	4	531	5	558	0
63408					
629	0	0	1	27	0
	4	54	5	81	0
	5	139	6	166	58
	1	211	2	238	0
	6	274	7	301	0
	7	332	8	359	31
	2	413	3	440	0
	8	485	9	512	0
	3	566	4	593	0

63508					3	262	4	286	58
453					4	319	5	343	33
0	0	1	21	0	5	384	6	408	41
1	55	2	76	34	6	431	7	455	23
4	90	5	111	0	7	485	8	509	30
5	135	6	156	24	8	589	9	613	80
2	184	3	205	0	9	650	10	674	37
6	226	7	247	0	64309				
7	299	8	320	52	548				
8	341	9	362	21	0	0	1	21	0
3	404	4	425	0	5	49	6	70	0
63608					1	105	2	126	0
622					6	154	7	175	0
0	0	1	24	0	2	210	3	231	0
1	77	2	101	53	7	259	8	280	0
2	145	3	169	44	8	310	9	331	30
3	203	4	227	34	3	373	4	394	0
4	290	5	314	63	9	429	10	450	0
5	359	6	383	45	4	492	5	513	0
6	412	7	436	29	64409				
7	463	8	487	27	558				
8	526	9	550	39	0	0	1	21	0
63708					1	73	2	94	52
774					5	115	6	136	0
0	0	1	27	0	6	165	7	186	29
1	80	2	107	53	2	221	3	242	0
2	160	3	187	53	7	270	8	291	0
3	225	4	252	38	3	326	4	347	0
4	320	5	347	68	8	375	9	396	0
5	418	6	445	71	9	439	10	460	43
6	525	7	552	80	4	502	5	523	0
7	579	8	606	27	64509				
8	666	9	693	60	496				
63808					0	0	1	18	0
703					1	57	2	75	39
0	0	1	30	0	5	93	6	111	0
8	100	9	130	0	6	134	7	152	23
1	210	2	240	0	2	182	3	200	0
2	262	3	292	22	7	224	8	242	0
3	318	4	348	26	3	272	4	290	0
4	387	5	417	39	8	314	9	332	0
5	442	6	472	25	9	394	10	412	62
6	506	7	536	34	4	448	5	466	0
7	593	8	623	57	64609				
63908					739				
544					0	0	1	27	0
0	0	1	24	0	1	62	2	89	35
5	56	6	80	0	2	140	3	167	51
1	120	2	144	0	3	208	4	235	41
6	176	7	200	0	4	295	5	322	60
2	240	3	264	0	5	346	6	373	24
7	296	8	320	0	6	403	7	430	30
3	360	4	384	0	7	504	8	531	74
8	416	9	440	0	8	559	9	586	28
4	480	5	504	0	9	622	10	649	36
64008					64709				
755					370				
0	0	1	30	0	0	0	1	15	0
1	51	2	81	21	1	43	2	58	28
2	148	3	178	67	2	87	3	102	29
3	243	4	273	65	6	117	7	132	0
4	306	5	336	33	9	142	10	157	0
5	388	6	418	52	3	192	4	207	0
6	468	7	498	50	4	230	5	245	23
7	556	8	586	58	7	255	8	270	0
8	635	9	665	49	5	285	6	300	0
64109					8	310	9	325	0
455					64809				
0	0	1	18	0	785				
5	42	6	60	0	0	0	1	24	0
1	90	2	108	0	9	88	10	112	0
6	132	7	150	0	1	184	2	208	0
2	180	3	198	0	2	269	3	293	61
7	222	8	240	0	3	328	4	352	35
3	270	4	288	0	4	378	5	402	26
8	312	9	330	0	5	482	6	506	80
9	353	10	371	23	6	563	7	587	57
4	407	5	425	0	7	616	8	640	29
64209					8	689	9	713	49
754									
0	0	1	24	0					
1	97	2	121	73					
2	180	3	204	59					

64909						4	252	5	273	21
603	0	0	1	24	0	5	323	6	344	50
	1	44	2	68	20	6	415	7	436	71
	2	89	3	113	21	7	467	8	488	31
	3	153	4	177	40	8	514	9	535	26
	4	215	5	239	38	9	580	10	601	45
	5	266	6	290	27	10	653	11	674	52
	6	320	7	344	30					
	7	366	8	390	22					
	8	454	9	478	64					
	9	499	10	523	21					
65009										
851	0	0	1	27	0					
	1	105	2	132	78					
	2	153	3	180	21					
	3	240	4	267	60					
	4	335	5	362	68					
	5	420	6	447	58					
	6	515	7	542	68					
	7	598	8	625	56					
	8	668	9	695	43					
	9	734	10	761	39					
65110										
350	0	0	1	15	0					
	3	25	4	40	0					
	6	50	7	65	0					
	9	75	10	90	0					
	7	105	8	120	0					
	1	155	2	170	0					
	4	180	5	195	0					
	2	210	3	225	0					
	5	235	6	250	0					
	8	260	9	275	0					
	10	280	11	295	0					
65210										
538	0	0	1	18	0					
	6	48	7	66	0					
	10	84	11	102	0					
	7	134	8	152	8					
	1	194	2	212	0					
	8	248	9	266	0					
	2	308	3	326	0					
	3	351	4	369	25					
	4	394	5	412	25					
	9	436	10	454	0					
	5	484	6	502	0					
65310										
867	0	0	1	24	0					
	1	75	2	99	51					
	2	166	3	190	67					
	3	229	4	253	39					
	4	293	5	317	40					
	5	362	6	386	45					
	6	454	7	478	68					
	7	513	8	537	35					
	8	561	9	585	24					
	9	663	10	687	78					
	10	755	11	779	68					
65410										
732	0	0	1	24	0					
	1	47	2	71	23					
	2	100	3	124	29					
	3	145	4	169	21					
	4	189	5	213	20					
	5	265	6	289	52					
	6	340	7	364	51					
	7	400	8	424	36					
	8	457	9	481	33					
	9	534	10	558	53					
	10	620	11	644	62					
65510										
751	0	0	1	21	0					
	1	68	2	89	47					
	2	111	3	132	22					
	3	210	4	231	78					
65610										
718	0	0	1	24	0					
	1	66	2	90	42					
	2	151	3	175	61					
	3	218	4	242	43					
	4	263	5	287	21					
	5	316	6	340	29					
	6	368	7	392	28					
	7	414	8	438	22					
	8	462	9	486	24					
	9	517	10	541	31					
	10	606	11	630	65					
65710										
812	0	0	1	27	0					
	1	70	2	97	43					
	2	151	3	178	54					
	3	209	4	236	31					
	4	291	5	318	55					
	5	340	6	367	22					
	6	388	7	415	21					
	7	443	8	470	28					
	8	543	9	570	73					
	9	619	10	646	49					
	10	686	11	713	40					
65810										
899	0	0	1	30	0					
	1	106	2	136	76					
	2	168	3	198	32					
	3	243	4	273	45					
	4	340	5	370	67					
	5	423	6	453	53					
	6	485	7	515	32					
	7	587	8	617	72					
	8	638	9	668	21					
	9	693	10	723	25					
	10	759	11	789	36					
65910										
582	0	0	1	18	0					
	6	48	7	66	0					
	7	87	8	105	21					
	1	147	2	165	0					
	8	201	9	219	0					
	2	261	3	279	0					
	9	315	10	333	0					
	3	375	4	393	0					
	10	429	11	447	0					
	4	489	5	507	0					
	5	528	6	546	21					
66010										
536	0	0	1	18	0					
	1	53	2	71	35					
	6	95	7	113	0					
	7	136	8	154	23					
	8	175	9	193	21					
	2	235	3	253	0					
	3	278	4	296	25					
	9	326	10	344	0					
	4	380	5	398	0					
	10	428	11	446	0					
	5	482	6	500	0					

SERIE 7 (VA/GR)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
70105					
126	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	4	57	5	66	0
	2	84	3	93	0
	1	105	2	114	0
70205					
158	0	0	1	10	0
	5	38	6	48	0
	4	62	5	72	0
	3	86	4	96	0
	2	110	3	120	0
	1	134	2	144	0
70305					
126	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	4	57	5	66	0
	2	84	3	93	0
	1	105	2	114	0
70405					
168	0	0	1	12	0
	3	28	4	40	0
	5	48	6	60	0
	4	76	5	88	0
	2	112	3	124	0
	1	140	2	152	0
70505					
210	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	5	60	6	75	0
	4	95	5	110	0
	3	130	4	145	0
	1	175	2	190	0
70605					
210	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	5	60	6	75	0
	4	95	5	110	0
	3	130	4	145	0
	1	175	2	190	0
70705					
154	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	5	41	6	51	0
	4	65	5	75	0
	3	99	4	109	0
	1	130	2	140	0
70805					
127	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	4	57	5	66	0
	2	84	3	93	0
	1	105	2	114	0
70905					
129	0	0	1	9	0
	2	15	3	24	0
	5	36	6	45	0
	4	57	5	66	0
	3	78	4	87	0
	1	105	2	114	0
71005					
211	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	5	60	6	75	0
	4	95	5	110	0
	3	130	4	145	0
	1	175	2	190	0

71106					
175	0	0	1	10	0
	3	24	4	34	0
	6	48	7	58	0
	5	72	6	82	0
	4	96	5	106	0
	2	127	3	137	0
	1	151	2	161	0
71206					
255	0	0	1	15	0
	4	45	5	60	0
	6	70	7	85	0
	5	105	6	120	0
	3	150	4	165	0
	2	185	3	200	0
	1	220	2	235	0
71306					
153	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	6	42	7	51	0
	5	63	6	72	0
	4	84	5	93	0
	2	111	3	120	0
	1	132	2	141	0
71406					
130	0	0	1	7	0
	2	12	3	19	0
	6	34	7	41	0
	5	51	6	58	0
	4	68	5	75	0
	3	85	4	92	0
	1	107	2	114	0
71506					
226	0	0	1	13	0
	3	31	4	44	0
	6	62	7	75	0
	5	93	6	106	0
	4	124	5	137	0
	2	164	3	177	0
	1	195	2	208	0
71606					
257	0	0	1	15	0
	2	25	3	40	0
	1	60	2	75	0
	3	87	4	102	2
	6	122	7	137	0
	5	157	6	172	0
	4	192	5	207	0
71706					
161	0	0	1	9	0
	4	27	5	36	0
	6	42	7	51	0
	5	71	6	80	8
	3	98	4	107	0
	2	119	3	128	0
	1	140	2	149	0
71806					
204	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	5	48	6	60	0
	4	76	5	88	0
	6	96	7	108	0
	3	140	4	152	0
	1	176	2	188	0
71906					
188	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	6	60	7	72	0
	5	88	6	100	0
	3	124	4	136	0
	1	160	2	172	0

72006 124	0	0	1	7	0
	3	17	4	24	0
	6	34	7	41	0
	5	51	6	58	0
	4	68	5	75	0
	2	90	3	97	0
	1	107	2	114	0
<hr/>					
72107 180	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	7	48	8	57	0
	6	69	7	78	0
	5	90	6	99	0
	4	111	5	120	0
	2	138	3	147	0
	1	159	2	168	0
<hr/>					
72207 206	0	0	1	10	0
	3	24	4	34	0
	7	55	8	65	0
	6	79	7	89	0
	5	103	6	113	0
	4	127	5	137	0
	2	158	3	168	0
	1	182	2	192	0
<hr/>					
72307 224	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	7	68	8	80	0
	6	96	7	108	0
	5	124	6	136	0
	3	160	4	172	0
	1	196	2	208	0
<hr/>					
72407 224	0	0	1	12	0
	3	28	4	40	0
	5	48	6	60	0
	7	68	8	80	0
	6	96	7	108	0
	4	132	5	144	0
	2	168	3	180	0
	1	196	2	208	0
<hr/>					
72507 203	0	0	1	10	0
	3	24	4	34	0
	5	41	6	51	0
	7	58	8	68	0
	6	82	7	92	0
	4	113	5	123	0
	2	144	3	154	0
	1	168	2	178	0
<hr/>					
72607 226	0	0	1	12	0
	3	28	4	40	0
	5	48	6	60	0
	7	68	8	80	0
	6	98	7	110	2
	4	134	5	146	0
	2	170	3	182	0
	1	198	2	210	0
<hr/>					
72707 205	0	0	1	10	0
	2	17	3	27	0
	1	51	2	61	0
	3	68	4	78	0
	5	85	6	95	0
	7	102	8	112	0
	6	129	7	139	3
	4	160	5	170	0

72807 224	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	7	68	8	80	0
	6	96	7	108	0
	5	124	6	136	0
	3	160	4	172	0
	1	196	2	208	0
<hr/>					
72907 206	0	0	1	10	0
	4	31	5	41	0
	7	55	8	65	0
	6	79	7	89	0
	5	103	6	113	0
	3	134	4	144	0
	2	158	3	168	0
	1	182	2	192	0
<hr/>					
73007 248	0	0	1	13	0
	2	22	3	35	0
	5	53	6	66	0
	7	75	8	88	0
	6	106	7	119	0
	4	146	5	159	0
	3	177	4	190	0
	1	217	2	230	0
<hr/>					
73108 229	0	0	1	10	0
	4	31	5	41	0
	6	48	7	58	0
	8	65	9	75	0
	7	95	8	105	6
	5	126	6	136	0
	3	157	4	167	0
	2	181	3	191	0
	1	205	2	215	0
<hr/>					
73208 322	0	0	1	12	0
	2	20	3	32	0
	4	40	5	52	0
	6	60	7	72	0
	7	96	8	108	4
	8	146	9	158	8
	1	222	2	234	0
	3	242	4	254	0
	5	262	6	274	0
<hr/>					
73308 223	0	0	1	10	0
	3	24	4	34	0
	5	41	6	51	0
	8	65	9	75	0
	7	89	8	99	0
	6	113	7	123	0
	4	144	5	154	0
	2	175	3	185	0
	1	199	2	209	0
<hr/>					
73408 207	0	0	1	9	0
	3	21	4	30	0
	5	36	6	45	0
	7	51	8	60	0
	4	84	5	93	0
	6	99	7	108	0
	8	114	9	123	0
	2	165	3	174	0
	1	186	2	195	0

73508						6	60	7	72	0
190	0	0	1	9	0	8	80	9	92	0
	2	15	3	24	0	9	123	10	135	1
	4	30	5	39	0	7	159	8	171	0
	6	45	7	54	0	5	195	6	207	0
	8	60	9	69	0	1	247	2	259	0
	7	81	8	90	0	3	267	4	279	0
	5	108	6	117	0					
	3	135	4	144	0	74309	0	0	1	15
	1	162	2	171	0	378	2	25	3	40
73608							3	63	4	78
209	0	0	1	10	0		5	88	6	103
	2	17	3	27	0		6	126	7	141
	4	34	5	44	0		8	151	9	166
	6	51	7	61	0		7	186	8	201
	8	68	9	78	0		9	211	10	226
	7	92	8	102	0		4	286	5	301
	5	123	6	133	0		1	341	2	356
	3	154	4	164	0	74409	0	0	1	9
	1	185	2	195	0	222	4	27	5	36
73708							6	42	7	51
299	0	0	1	13	0		9	63	10	72
	2	22	3	35	0		8	84	9	93
	1	64	2	77	1		7	105	8	114
	3	86	4	99	0		5	132	6	141
	5	108	6	121	0		3	159	4	168
	8	139	9	152	0		2	180	3	189
	7	170	8	183	0		1	201	2	210
	6	201	7	214	0	74509	0	0	1	13
	4	241	5	254	0	323	1	34	2	47
73808							3	56	4	69
270	0	0	1	13	0		5	78	6	91
	2	22	3	35	0		7	100	8	113
	4	44	5	57	0		9	122	10	135
	6	66	7	79	0		8	163	9	176
	8	88	9	101	0		6	203	7	216
	7	119	8	132	0		4	243	5	256
	5	159	6	172	0		2	283	3	296
	3	199	4	212	0	74609	0	0	1	9
	1	239	2	252	0	222	3	21	4	30
73908							5	36	6	45
277	0	0	1	12	0		9	63	10	72
	2	20	3	32	0		8	84	9	93
	4	40	5	52	0		7	105	8	114
	8	76	9	88	0		6	126	7	135
	7	104	8	116	0		4	153	5	162
	6	132	7	144	0		2	180	3	189
	5	160	6	172	0		1	201	2	210
	1	212	2	224	0	74709	0	0	1	15
	3	232	4	244	0	422	2	25	3	40
74008							4	50	5	65
394	0	0	1	15	0		1	105	2	120
	1	41	2	56	6		3	130	4	145
	3	66	4	81	0		5	155	6	170
	6	101	7	116	0		7	180	8	195
	7	139	8	154	3		8	215	9	230
	4	194	5	209	0		9	282	10	297
	8	239	9	254	0		6	337	7	352
	5	294	6	309	0	74809	0	0	1	10
	2	349	3	364	0	254	3	24	4	34
74109							6	48	7	58
254	0	0	1	10	0		9	72	10	82
	2	17	3	27	0		8	96	9	106
	1	41	2	51	0		7	120	8	130
	4	65	5	75	0		5	151	6	161
	6	82	7	92	0		4	175	5	185
	9	106	10	116	0		2	206	3	216
	8	130	9	140	0		1	230	2	240
	7	154	8	164	0					
	5	185	6	195	0					
	3	216	4	226	0					
74209										
311	0	0	1	12	0					
	2	20	3	32	0					
	4	40	5	52	0					

74909						75510					
322	0	0	1	12	0	202	0	0	1	7	0
	1	49	2	61	7		4	22	5	29	0
	3	69	4	81	0		6	34	7	41	0
	2	97	3	109	0		10	56	11	63	0
	5	125	6	137	0		9	73	10	80	0
	7	145	8	157	0		8	90	9	97	0
	9	165	10	177	0		7	107	8	114	0
	8	198	9	210	5		5	129	6	136	0
	6	234	7	246	0		3	151	4	158	0
	4	270	5	282	0		2	168	3	175	0
							1	185	2	192	0
75009						75610					
365	0	0	1	15	0	352	0	0	1	12	0
	2	25	3	40	0		2	20	3	32	0
	5	60	6	75	0		1	50	2	62	2
	7	85	8	100	0		4	78	5	90	0
	9	110	10	125	0		6	98	7	110	0
	8	160	9	175	5		8	118	9	130	0
	6	205	7	220	0		7	148	8	160	2
	4	250	5	265	0		9	168	10	180	0
	3	285	4	300	0		10	212	11	224	2
	1	330	2	345	0		5	272	6	284	0
							3	308	4	320	0
75110						75710					
202	0	0	1	7	0	425	0	0	1	15	0
	4	22	5	29	0		2	25	3	40	0
	6	34	7	41	0		5	60	6	75	0
	10	56	11	63	0		7	85	8	100	0
	9	73	10	80	0		10	120	11	135	0
	8	90	9	97	0		9	155	10	170	0
	7	107	8	114	0		8	190	9	205	0
	5	129	6	136	0		6	235	7	250	0
	3	151	4	158	0		3	290	4	305	0
	2	168	3	175	0		4	332	5	347	7
	1	185	2	192	0		1	387	2	402	0
75210						75810					
321	0	0	1	10	0	264	0	0	1	9	0
	2	17	3	27	0		3	21	4	30	0
	4	34	5	44	0		5	36	6	45	0
	7	58	8	68	0		9	63	10	72	0
	10	82	11	92	0		6	96	7	105	0
	9	106	10	116	0		8	111	9	120	0
	3	165	4	175	0		10	129	11	138	3
	5	182	6	192	0		7	162	8	171	0
	8	206	9	216	0		4	195	5	204	0
	6	237	7	247	0		2	222	3	231	0
	1	289	2	299	0		1	243	2	252	0
75310						75910					
364	0	0	1	12	0	340	0	0	1	13	0
	2	20	3	32	0		2	22	3	35	0
	4	40	5	52	0		4	44	5	57	0
	6	60	7	72	0		6	66	7	79	0
	8	80	9	92	0		8	88	9	101	0
	10	100	11	112	0		10	110	11	123	0
	1	192	2	204	0		9	149	10	162	8
	3	212	4	224	0		7	189	8	202	0
	5	232	6	244	0		5	229	6	242	0
	7	252	8	264	0		3	269	4	282	0
	9	272	10	284	0		1	309	2	322	0
75410						76010					
249	0	0	1	9	0	210	0	0	1	7	0
	4	27	5	36	0		3	17	4	24	0
	6	42	7	51	0		5	29	6	36	0
	10	69	11	78	0		10	56	11	63	0
	9	90	10	99	0		9	73	10	80	0
	8	111	9	120	0		8	90	9	97	0
	7	132	8	141	0		7	107	8	114	0
	5	159	6	168	0		6	124	7	131	0
	3	186	4	195	0		4	146	5	153	0
	2	207	3	216	0		2	168	3	175	0
	1	228	2	237	0		1	185	2	192	0

SERIE 8 (VA/GS)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
80105					
145	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	5	42	6	54	0
	4	67	5	79	1
	2	97	3	109	0
	1	121	2	133	0
80205					
208	0	0	1	16	0
	3	32	4	48	0
	5	56	6	72	0
	2	104	3	120	0
	4	128	5	144	0
	1	176	2	192	0
80305					
168	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	5	49	6	63	0
	4	77	5	91	0
	3	105	4	119	0
	1	140	2	154	0
80405					
240	0	0	1	20	0
	2	30	3	50	0
	1	70	2	90	0
	3	100	4	120	0
	5	130	6	150	0
	4	170	5	190	0
80505					
234	0	0	1	18	0
	3	36	4	54	0
	5	63	6	81	0
	2	117	3	135	0
	4	144	5	162	0
	1	198	2	216	0
80605					
192	0	0	1	16	0
	2	24	3	40	0
	5	56	6	72	0
	4	88	5	104	0
	3	120	4	136	0
	1	160	2	176	0
80705					
130	0	0	1	10	0
	5	30	6	40	0
	4	50	5	60	0
	3	70	4	80	0
	2	90	3	100	0
	1	110	2	120	0
80805					
120	0	0	1	10	0
	3	20	4	30	0
	5	35	6	45	0
	4	55	5	65	0
	2	80	3	90	0
	1	100	2	110	0
80905					
156	0	0	1	12	0
	5	36	6	48	0
	4	60	5	72	0
	3	84	4	96	0
	2	108	3	120	0
	1	132	2	144	0
81005					
234	0	0	1	18	0
	5	54	6	72	0
	4	90	5	108	0
	3	126	4	144	0
	2	162	3	180	0
	1	198	2	216	0

81106					
261	0	0	1	18	0
	3	36	4	54	0
	6	72	7	90	0
	5	108	6	126	0
	4	144	5	162	0
	2	189	3	207	0
	1	225	2	243	0
81206					
186	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	6	48	7	60	0
	5	72	6	84	0
	2	108	3	120	0
	4	126	5	138	0
	1	162	2	174	0
81306					
232	0	0	1	16	0
	3	32	4	48	0
	6	64	7	80	0
	5	96	6	112	0
	4	128	5	144	0
	2	168	3	184	0
	1	200	2	216	0
81406					
203	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	6	56	7	70	0
	5	84	6	98	0
	4	112	5	126	0
	3	140	4	154	0
	1	175	2	189	0
81506					
203	0	0	1	14	0
	3	28	4	42	0
	6	56	7	70	0
	5	84	6	98	0
	4	112	5	126	0
	2	147	3	161	0
	1	175	2	189	0
81606					
261	0	0	1	18	0
	2	27	3	45	0
	1	63	2	81	0
	3	90	4	108	0
	5	117	6	135	0
	4	153	5	171	0
	6	180	7	198	0
81706					
170	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	6	54	7	66	0
	5	86	6	98	8
	3	116	4	128	0
	1	146	2	158	0
81806					
261	0	0	1	18	0
	2	27	3	45	0
	4	54	5	72	0
	6	81	7	99	0
	3	135	4	153	0
	5	162	6	180	0
	1	225	2	243	0
81906					
248	0	0	1	16	0
	2	24	3	40	0
	4	48	5	64	0
	6	72	7	88	0
	1	136	2	152	0
	3	160	4	176	0
	5	184	6	200	0

82006									
261	0	0	1	18	0				
	3	36	4	54	0				
	5	63	6	81	0				
	4	99	5	117	0				
	6	126	7	144	0				
	2	189	3	207	0				
	1	225	2	243	0				
82107									
180	0	0	1	10	0				
	3	20	4	30	0				
	7	45	8	55	0				
	6	65	7	75	0				
	5	85	6	95	0				
	2	115	3	125	0				
	4	130	5	140	0				
	1	160	2	170	0				
82207									
273	0	0	1	16	0				
	4	40	5	56	0				
	3	72	4	88	0				
	5	96	6	112	0				
	7	120	8	136	0				
	6	153	7	169	1				
	2	209	3	225	0				
	1	241	2	257	0				
82307									
170	0	0	1	10	0				
	3	20	4	30	0				
	7	45	8	55	0				
	6	65	7	75	0				
	5	85	6	95	0				
	4	105	5	115	0				
	2	130	3	140	0				
	1	150	2	160	0				
82407									
244	0	0	1	14	0				
	3	28	4	42	0				
	6	56	7	70	0				
	5	84	6	98	0				
	7	111	8	125	6				
	4	153	5	167	0				
	2	188	3	202	0				
	1	216	2	230	0				
82507									
268	0	0	1	16	0				
	3	32	4	48	0				
	5	56	6	72	0				
	7	80	8	96	0				
	6	124	7	140	12				
	4	164	5	180	0				
	2	204	3	220	0				
	1	236	2	252	0				
82607									
224	0	0	1	14	0				
	3	28	4	42	0				
	5	49	6	63	0				
	7	70	8	84	0				
	6	98	7	112	0				
	4	133	5	147	0				
	2	168	3	182	0				
	1	196	2	210	0				
82707									
204	0	0	1	12	0				
	3	24	4	36	0				
	7	54	8	66	0				
	6	78	7	90	0				
	5	102	6	114	0				
	4	126	5	138	0				
	2	156	3	168	0				
	1	180	2	192	0				
82807									
170	0	0	1	10	0				
	2	15	3	25	0				
	1	35	2	45	0				
	3	50	4	60	0				
	7	75	8	85	0				
	6	95	7	105	0				
	5	115	6	125	0				
	4	135	5	145	0				
82907									
224	0	0	1	14	0				
	3	28	4	42	0				
	5	49	6	63	0				
	7	70	8	84	0				
	6	98	7	112	0				
	4	133	5	147	0				
	2	168	3	182	0				
	1	196	2	210	0				
83007									
242	0	0	1	14	0				
	3	28	4	42	0				
	6	56	7	70	0				
	5	84	6	98	0				
	7	109	8	123	4				
	4	151	5	165	0				
	2	186	3	200	0				
	1	214	2	228	0				
83108									
200	0	0	1	10	0				
	4	25	5	35	0				
	8	50	9	60	0				
	7	70	8	80	0				
	6	90	7	100	0				
	5	115	6	125	5				
	3	140	4	150	0				
	2	160	3	170	0				
	1	180	2	190	0				
83208									
300	0	0	1	16	0				
	1	36	2	52	20				
	3	60	4	76	0				
	5	84	6	100	0				
	8	116	9	132	0				
	7	148	8	164	0				
	6	180	7	196	0				
	4	220	5	236	0				
	2	260	3	276	0				
83308									
338	0	0	1	18	0				
	2	27	3	45	0				
	4	54	5	72	0				
	8	99	9	117	0				
	7	135	8	153	0				
	6	171	7	189	0				
	5	207	6	225	0				
	3	252	4	270	0				
	1	297	2	315	0				
83408									
277	0	0	1	14	0				
	1	46	2	60	32				
	3	67	4	81	0				
	5	88	6	102	0				
	8	116	9	130	0				
	7	144	8	158	0				
	6	172	7	186	0				
	4	207	5	221	0				
	2	242	3	256	0				

83508						7	60	8	72	0
358	0	0	1	20	0	9	78	10	90	0
	2	30	3	50	0	8	112	9	124	10
	4	60	5	80	0	6	142	7	154	0
	6	90	7	110	0	5	166	6	178	0
	8	120	9	140	0	3	196	4	208	0
	7	160	8	180	0	1	226	2	238	0
	5	210	6	230	0					
	3	260	4	280	0	84309				
	1	310	2	330	0	338	0	0	1	16
83608							2	24	3	40
296	0	0	1	16	0		4	48	5	64
	2	24	3	40	0		6	72	7	88
	4	48	5	64	0		8	96	9	112
	8	88	9	104	0		5	144	6	160
	7	120	8	136	0		7	168	8	184
	6	152	7	168	0		9	192	10	208
	5	184	6	200	0		3	264	4	280
	3	224	4	240	0		1	304	2	320
	1	264	2	280	0	84409				
83708						363	0	0	1	16
336	0	0	1	18	0		2	24	3	40
	2	27	3	45	0		4	48	5	64
	4	54	5	72	0		1	96	2	112
	3	90	4	108	0		3	120	4	136
	5	117	6	135	0		5	144	6	160
	8	153	9	171	0		7	168	8	184
	7	189	8	207	0		8	205	9	221
	6	225	7	243	0		9	243	10	259
	1	297	2	315	0		6	291	7	307
83808						84509				
195	0	0	1	10	0	475	0	0	1	20
	3	20	4	30	0		1	63	2	83
	5	35	6	45	0		2	107	3	127
	8	55	9	65	0		4	137	5	157
	7	75	8	85	0		6	167	7	187
	6	98	7	108	3		5	207	6	227
	4	123	5	133	0		7	237	8	257
	2	148	3	158	0		8	278	9	298
	1	168	2	178	0		9	325	10	345
83908							3	415	4	435
372	0	0	1	20	0	84609				
	3	40	4	60	0	252	0	0	1	12
	5	70	6	90	0		4	30	5	42
	7	100	8	120	0		6	48	7	60
	6	142	7	162	2		9	72	10	84
	8	172	9	192	0		8	96	9	108
	4	242	5	262	0		7	120	8	132
	2	292	3	312	0		5	150	6	162
	1	332	2	352	0		3	180	4	192
84008							2	204	3	216
257	0	0	1	14	0		1	228	2	240
	2	21	3	35	0	84709				
	4	42	5	56	0	381	0	0	1	18
	6	63	7	77	0		3	36	4	54
	8	84	9	98	0		2	72	3	90
	7	112	8	126	0		4	99	5	117
	5	147	6	161	0		5	138	6	156
	3	182	4	196	0		7	165	8	183
	1	217	2	231	0		9	192	10	210
84109							8	228	9	246
331	0	0	1	14	0		6	273	7	291
	1	41	2	55	27		1	345	2	363
	2	79	3	93	24	84809				
	4	100	5	114	0	257	0	0	1	12
	6	121	7	135	0		2	18	3	30
	8	142	9	156	0		4	36	5	48
	5	184	6	198	0		6	54	7	66
	7	205	8	219	0		9	78	10	90
	9	226	10	240	0		8	102	9	114
	3	289	4	303	0		7	126	8	138
84209							5	156	6	168
251	0	0	1	12	0		1	198	2	210
	2	18	3	30	0		3	216	4	228
	4	36	5	48	0					

84909					
251	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	6	54	7	66	0
	9	78	10	90	0
	8	102	9	114	0
	7	126	8	138	0
	5	156	6	168	0
	3	186	4	198	0
	1	216	2	228	0
85009					
390	0	0	1	18	0
	1	40	2	58	22
	3	67	4	85	0
	5	94	6	112	0
	6	134	7	152	22
	7	174	8	192	22
	9	201	10	219	0
	8	237	9	255	0
	4	300	5	318	0
	2	345	3	363	0
85110					
272	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	5	42	6	54	0
	7	60	8	72	0
	10	84	11	96	0
	9	108	10	120	0
	8	132	9	144	0
	6	162	7	174	0
	4	192	5	204	0
	2	222	3	234	0
	1	246	2	258	0
85210					
238	0	0	1	10	0
	2	15	3	25	0
	1	38	2	48	3
	4	58	5	68	0
	6	73	7	83	0
	10	98	11	108	0
	9	118	10	128	0
	8	138	9	148	0
	7	158	8	168	0
	5	183	6	193	0
	3	208	4	218	0
85310					
235	0	0	1	10	0
	4	25	5	35	0
	6	40	7	50	0
	10	65	11	75	0
	9	85	10	95	0
	8	105	9	115	0
	7	125	8	135	0
	5	150	6	160	0
	3	175	4	185	0
	2	195	3	205	0
	1	215	2	225	0
85410					
510	0	0	1	20	0
	3	40	4	60	0
	5	70	6	90	0
	7	100	8	120	0
	6	140	7	160	0
	9	180	10	200	0
	8	220	9	240	0
	10	250	11	270	0
	1	370	2	390	0
	4	410	5	430	0
	2	460	3	480	0

85510					
270	0	0	1	12	0
	3	24	4	36	0
	5	42	6	54	0
	8	66	9	78	0
	10	84	11	96	0
	9	108	10	120	0
	7	138	8	150	0
	6	162	7	174	0
	4	192	5	204	0
	2	222	3	234	0
	1	246	2	258	0
85610					
317	0	0	1	12	0
	2	18	3	30	0
	4	36	5	48	0
	6	54	7	66	0
	8	72	9	84	0
	9	107	10	119	23
	7	137	8	149	0
	10	161	11	173	0
	1	233	2	245	0
	3	251	4	263	0
	5	269	6	281	0
85710					
234	0	0	1	10	0
	2	15	3	25	0
	5	35	6	45	0
	7	50	8	60	0
	10	70	11	80	0
	9	90	10	100	0
	8	110	9	120	0
	6	135	7	145	0
	4	160	5	170	0
	3	180	4	190	0
	1	205	2	215	0
85810					
531	0	0	1	20	0
	1	54	2	74	34
	2	101	3	121	27
	4	131	5	151	0
	3	171	4	191	0
	5	201	6	221	0
	8	241	9	261	0
	10	271	11	291	0
	6	341	7	361	0
	9	381	10	401	0
	7	431	8	451	0
85910					
329	0	0	1	14	0
	2	21	3	35	0
	4	42	5	56	0
	6	63	7	77	0
	9	91	10	105	0
	8	119	9	133	0
	10	140	11	154	0
	7	182	8	196	0
	5	217	6	231	0
	1	266	2	280	0
	3	287	4	301	0
86010					
415	0	0	1	18	0
	2	27	3	45	0
	3	66	4	84	21
	5	93	6	111	0
	7	120	8	138	0
	9	147	10	165	0
	10	190	11	208	25
	8	235	9	253	0
	6	280	7	298	0
	4	325	5	343	0
	1	379	2	397	0

SERIE 9 (VA/GL)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
90105 320	0	0	1	30	0
	1	50	2	80	20
	4	100	5	130	0
	3	150	4	180	0
	5	190	6	220	0
	2	260	3	290	0
90205 186	0	0	1	18	0
	3	30	4	48	0
	5	54	6	72	0
	4	84	5	102	0
	2	120	3	138	0
	1	150	2	168	0
90305 240	0	0	1	24	0
	3	40	4	64	0
	5	72	6	96	0
	4	112	5	136	0
	2	160	3	184	0
	1	200	2	224	0
90405 270	0	0	1	27	0
	3	45	4	72	0
	5	81	6	108	0
	4	126	5	153	0
	2	180	3	207	0
	1	225	2	252	0
90505 210	0	0	1	21	0
	2	28	3	49	0
	5	63	6	84	0
	4	98	5	119	0
	3	133	4	154	0
	1	175	2	196	0
90605 210	0	0	1	21	0
	2	28	3	49	0
	5	63	6	84	0
	4	98	5	119	0
	3	133	4	154	0
	1	175	2	196	0
90705 263	0	0	1	24	0
	2	32	3	56	0
	5	72	6	96	0
	3	120	4	144	0
	4	167	5	191	23
	1	223	2	247	0
90805 251	0	0	1	24	0
	3	40	4	64	0
	5	72	6	96	0
	4	123	5	147	11
	2	171	3	195	0
	1	211	2	235	0
90905 160	0	0	1	15	0
	5	35	6	50	0
	4	60	5	75	0
	3	85	4	100	0
	2	110	3	125	0
	1	135	2	150	0
91005 256	0	0	1	24	0
	4	48	5	72	0
	3	88	4	112	0
	5	120	6	144	0
	2	176	3	200	0
	1	216	2	240	0

91106 368	0	0	1	27	0
	1	47	2	74	20
	3	83	4	110	0
	5	119	6	146	0
	6	188	7	215	42
	2	260	3	287	0
	4	296	5	323	0
91206 216	0	0	1	18	0
	3	30	4	48	0
	6	60	7	78	0
	5	90	6	108	0
	4	120	5	138	0
	2	156	3	174	0
	1	186	2	204	0
91306 297	0	0	1	24	0
	1	49	2	73	25
	3	81	4	105	0
	5	113	6	137	0
	4	153	5	177	0
	6	185	7	209	0
	2	249	3	273	0
91406 288	0	0	1	24	0
	2	32	3	56	0
	5	72	6	96	0
	4	112	5	136	0
	6	144	7	168	0
	3	200	4	224	0
	1	248	2	272	0
91506 252	0	0	1	21	0
	3	35	4	56	0
	6	70	7	91	0
	5	105	6	126	0
	4	140	5	161	0
	2	182	3	203	0
	1	217	2	238	0
91606 216	0	0	1	18	0
	2	24	3	42	0
	6	60	7	78	0
	5	90	6	108	0
	4	120	5	138	0
	3	150	4	168	0
	1	186	2	204	0
91706 190	0	0	1	15	0
	3	25	4	40	0
	6	50	7	65	0
	5	75	6	90	0
	4	100	5	115	0
	2	130	3	145	0
	1	155	2	170	0
91806 293	0	0	1	24	0
	2	32	3	56	0
	5	72	6	96	0
	4	112	5	136	0
	6	144	7	168	0
	3	200	4	224	0
	1	248	2	272	0
91906 252	0	0	1	21	0
	2	28	3	49	0
	1	63	2	84	0
	3	91	4	112	0
	5	119	6	140	0
	4	154	5	175	0
	6	182	7	203	0

92006						92807					
204						291					
0	0	1	18	0	0	0	1	21	0		
2	24	3	42	0	2	28	3	49	0		
4	48	5	66	0	4	56	5	77	0		
6	72	7	90	0	7	91	8	112	0		
5	102	6	120	0	6	126	7	147	0		
3	138	4	156	0	5	161	6	182	0		
1	174	2	192	0	3	203	4	224	0		
<hr/>						<hr/>					
92107						92907					
210						320					
0	0	1	15	0	0	0	1	24	0		
3	25	4	40	0	3	40	4	64	0		
7	55	8	70	0	5	72	6	96	0		
6	80	7	95	0	7	104	8	128	0		
5	105	6	120	0	6	144	7	168	0		
4	130	5	145	0	4	192	5	216	0		
2	160	3	175	0	2	240	3	264	0		
1	185	2	200	0	1	280	2	304	0		
<hr/>						<hr/>					
92207						93007					
240						352					
0	0	1	18	0	0	0	1	24	0		
3	30	4	48	0	2	32	3	56	0		
5	54	6	72	0	6	80	7	104	0		
7	78	8	96	0	3	136	4	160	0		
6	108	7	126	0	5	168	6	192	0		
4	144	5	162	0	7	200	8	224	0		
2	180	3	198	0	4	256	5	280	0		
1	210	2	228	0	1	312	2	336	0		
<hr/>						<hr/>					
92307						93108					
200						275					
0	0	1	15	0	0	0	1	18	0		
3	25	4	40	0	2	24	3	42	0		
5	45	6	60	0	4	48	5	66	0		
7	65	8	80	0	6	72	7	90	0		
6	90	7	105	0	8	96	9	114	0		
4	120	5	135	0	7	137	8	155	11		
2	150	3	165	0	5	173	6	191	0		
1	175	2	190	0	3	209	4	227	0		
<hr/>						<hr/>					
92407						93208					
401						230					
0	0	1	27	0	0	0	1	15	0		
3	45	4	72	0	4	30	5	45	0		
5	81	6	108	0	6	50	7	65	0		
7	117	8	144	0	8	70	9	85	0		
6	162	7	189	0	7	95	8	110	0		
1	243	2	270	0	5	125	6	140	0		
2	293	3	320	23	3	155	4	170	0		
4	329	5	356	0	2	180	3	195	0		
<hr/>						<hr/>					
92507						93308					
420						365					
0	0	1	30	0	0	0	1	21	0		
2	40	3	70	0	2	28	3	49	0		
1	90	2	120	0	1	63	2	84	0		
3	130	4	160	0	3	92	4	113	1		
6	180	7	210	0	6	127	7	148	0		
5	230	6	260	0	7	172	8	193	24		
7	270	8	300	0	5	214	6	235	0		
4	340	5	370	0	8	253	9	274	4		
<hr/>						<hr/>					
92607						93408					
210						360					
0	0	1	15	0	0	0	1	24	0		
3	25	4	40	0	2	32	3	56	0		
7	55	8	70	0	4	64	5	88	0		
6	80	7	95	0	6	96	7	120	0		
5	105	6	120	0	8	128	9	152	0		
4	130	5	145	0	7	169	8	193	1		
2	160	3	175	0	5	217	6	241	0		
1	185	2	200	0	3	265	4	289	0		
<hr/>						<hr/>					
92707						93408					
360						360					
0	0	1	27	0	0	0	1	24	0		
2	36	3	63	0	2	32	3	56	0		
5	81	6	108	0	4	64	5	88	0		
7	117	8	144	0	6	96	7	120	0		
6	162	7	189	0	8	128	9	152	0		
4	216	5	243	0	7	169	8	193	1		
3	261	4	288	0	5	217	6	241	0		
1	315	2	342	0	3	265	4	289	0		
<hr/>						<hr/>					
						93408					
						360					
						0					
						2					
						4					
						6					
						8					
						7					
						5					
						3					
						1					

93508						6	96	7	120	0	
462	0	0	1	27	0	8	128	9	152	0	
	2	36	3	63	0	9	175	10	199	23	
	5	81	6	108	0	1	271	2	295	0	
	6	131	7	158	23	3	303	4	327	0	
	8	167	9	194	0	5	335	6	359	0	
	7	219	8	246	7	7	367	8	391	0	
	3	291	4	318	0						
	1	345	2	372	0	94309					
	4	390	5	417	0	312	0	0	1	18	0
93608							3	30	4	48	0
455	0	0	1	27	0		5	54	6	72	0
	1	53	2	80	26		7	78	8	96	0
	3	89	4	116	0		9	102	10	120	0
	2	134	3	161	0		6	144	7	162	0
	4	170	5	197	0		8	168	9	186	0
	5	230	6	257	33		4	216	5	234	0
	8	275	9	302	0		2	252	3	270	0
	7	320	8	347	0		1	282	2	300	0
	6	365	7	392	0	94409					
93708						483	0	0	1	27	0
468	0	0	1	27	0		1	59	2	86	32
	1	63	2	90	36		4	104	5	131	0
	3	99	4	126	0		6	140	7	167	0
	5	135	6	162	0		8	176	9	203	0
	8	180	9	207	0		7	222	8	249	1
	6	234	7	261	0		9	258	10	285	0
	4	288	5	315	0		5	330	6	357	0
	7	333	8	360	0		3	384	4	411	0
	2	414	3	441	0		2	429	3	456	0
93808						94509					
322	0	0	1	21	0	270	0	0	1	15	0
	3	35	4	56	0		2	20	3	35	0
	5	63	6	84	0		4	40	5	55	0
	8	98	9	119	0		7	65	8	80	0
	7	133	8	154	0		9	85	10	100	0
	6	168	7	189	0		6	120	7	135	0
	4	210	5	231	0		5	145	6	160	0
	2	252	3	273	0		8	170	9	185	0
	1	287	2	308	0		3	215	4	230	0
							1	245	2	260	0
93908						94609					
288	0	0	1	18	0	350	0	0	1	21	0
	3	30	4	48	0		2	28	3	49	0
	2	60	3	78	0		5	63	6	84	0
	1	90	2	108	0		7	91	8	112	0
	4	120	5	138	0		9	119	10	140	0
	6	144	7	162	0		8	154	9	175	0
	8	168	9	186	0		6	196	7	217	0
	7	198	8	216	0		4	238	5	259	0
	5	234	6	252	0		3	273	4	294	0
							1	315	2	336	0
94008						94709					
400	0	0	1	24	0	454	0	0	1	27	0
	3	40	4	64	0		1	49	2	76	22
	7	88	8	112	0		3	85	4	112	0
	4	144	5	168	0		5	121	6	148	0
	6	176	7	200	0		7	157	8	184	0
	8	208	9	232	0		9	193	10	220	0
	5	264	6	288	0		8	238	9	265	0
	2	320	3	344	0		6	292	7	319	0
	1	360	2	384	0		4	346	5	373	0
							2	400	3	427	0
94109						94809					
416	0	0	1	24	0	445	0	0	1	24	0
	1	56	2	80	32		3	40	4	64	0
	3	88	4	112	0		1	88	2	112	0
	5	120	6	144	0		2	141	3	165	29
	7	152	8	176	0		4	173	5	197	0
	9	184	10	208	0		7	213	8	237	0
	8	224	9	248	0		9	245	10	269	0
	6	272	7	296	0		8	285	9	309	0
	4	320	5	344	0		6	333	7	357	0
	2	368	3	392	0		5	373	6	397	0
94209											
455	0	0	1	24	0						
	2	32	3	56	0						
	4	64	5	88	0						

94909						4	132	5	150	0
320	0	0	1	18	0	7	162	8	180	0
	2	24	3	42	0	9	186	10	204	0
	4	48	5	66	0	6	228	7	246	0
	6	72	7	90	0	8	252	9	270	0
	5	102	6	120	0	10	276	11	294	0
	9	138	10	156	0	2	348	3	366	0
	8	168	9	186	0					
	7	198	8	216	0	95610				
	3	246	4	264	0	654	0	0	1	30
	1	282	2	300	0		2	40	3	70
95009							1	90	2	120
392	0	0	1	21	0		3	130	4	160
	2	28	3	49	0		6	180	7	210
	4	56	5	77	0		4	240	5	270
	8	98	9	119	0		7	290	8	320
	7	133	8	154	0		8	357	9	387
	9	161	10	182	0		9	419	10	449
	6	210	7	231	0		10	474	11	504
	1	273	2	294	0		5	564	6	594
	3	301	4	322	0	95710				
	5	329	6	350	0	372	0	0	1	18
95110							2	24	3	42
434	0	0	1	21	0		4	48	5	66
	4	42	5	63	0		9	90	10	108
	6	70	7	91	0		5	138	6	156
	1	133	2	154	0		7	162	8	180
	3	161	4	182	0		10	192	11	210
	5	189	6	210	0		8	228	9	246
	7	217	8	238	0		6	264	7	282
	10	252	11	273	0		3	306	4	324
	9	287	10	308	0		1	342	2	360
	8	322	9	343	0	95810				
	2	392	3	413	0	336	0	0	1	18
95210							2	24	3	42
608	0	0	1	27	0		4	48	5	66
	1	59	2	86	32		6	72	7	90
	4	104	5	131	0		10	108	11	126
	6	140	7	167	0		9	138	10	156
	9	185	10	212	0		8	168	9	186
	2	284	3	311	0		7	198	8	216
	5	329	6	356	0		5	234	6	252
	7	365	8	392	0		3	270	4	288
	10	410	11	437	0		1	306	2	324
	8	464	9	491	0	95910				
	3	545	4	572	0	423	0	0	1	21
95310							3	35	4	56
599	0	0	1	27	0		2	70	3	91
	1	63	2	90	36		4	98	5	119
	2	113	3	140	23		6	126	7	147
	4	149	5	176	0		8	154	9	175
	6	185	7	212	0		9	196	10	217
	9	230	10	257	0		10	241	11	262
	3	320	4	347	0		7	290	8	311
	5	356	6	383	0		5	332	6	353
	7	392	8	419	0		1	388	2	409
	10	437	11	464	0	96010				
	8	491	9	518	0	432	0	0	1	21
95410							1	45	2	66
464	0	0	1	24	0		3	73	4	94
	2	32	3	56	0		2	108	3	129
	4	64	5	88	0		4	136	5	157
	1	120	2	144	0		6	164	7	185
	3	152	4	176	0		9	199	10	220
	6	192	7	216	0		7	243	8	264
	8	224	9	248	0		10	278	11	299
	10	256	11	280	0		8	320	9	341
	9	296	10	320	0		5	369	6	390
	7	344	8	368	0					
	5	392	6	416	0					
95510										
384	0	0	1	18	0					
	3	30	4	48	0					
	5	54	6	72	0					
	1	102	2	120	0					

ANEXO 5

Resultados al aplicar el algoritmo heurístico basado en el número de piezas por ciclo, utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado para resolver secuencias o subsecuencias.

Datos por ejemplar:

ejemplar: código de un ejemplar

m: número de baños

TC: tiempo de ciclo mediante el algoritmo heurístico

TC*: tiempo de ciclo óptimo

TC vs TC*: indica si el ciclo de movimientos del algoritmo heurístico es óptimo, y en caso contrario, la diferencia respecto al valor óptimo

SERIES 1, 2, 3

<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>
10105	5	214	214	opt	20105	5	346	346	opt	30105	5	314	314	opt
10205	5	206	185	21	20205	5	224	224	opt	30205	5	196	192	4
10305	5	240	240	opt	20305	5	148	140	8	30305	5	178	160	18
10405	5	244	198	46	20405	5	182	182	opt	30405	5	409	409	opt
10505	5	186	158	28	20505	5	242	224	18	30505	5	262	262	opt
10605	5	172	172	opt	20605	5	210	182	28	30605	5	310	310	opt
10705	5	204	195	9	20705	5	224	224	opt	30705	5	254	250	4
10805	5	169	123	46	20805	5	196	196	opt	30805	5	196	192	4
10905	5	252	252	opt	20905	5	203	201	2	30905	5	284	284	opt
11005	5	348	348	opt	21005	5	280	280	opt	31005	5	323	323	opt
11106	6	236	220	16	21106	6	499	499	opt	31106	6	491	491	opt
11206	6	413	413	opt	21206	6	326	293	33	31206	6	219	207	12
11306	6	410	410	opt	21306	6	300	287	13	31306	6	350	350	opt
11406	6	170	137	33	21406	6	267	245	22	31406	6	602	602	opt
11506	6	451	451	opt	21506	6	351	351	opt	31506	6	472	472	opt
11606	6	192	171	21	21606	6	342	342	opt	31606	6	383	383	opt
11706	6	189	189	opt	21706	6	331	331	opt	31706	6	294	294	opt
11806	6	163	162	1	21806	6	314	286	28	31806	6	284	284	opt
11906	6	210	194	16	21906	6	231	231	opt	31906	6	421	421	opt
12006	6	174	144	30	22006	6	351	351	opt	32006	6	266	266	opt
12107	7	479	479	opt	22107	7	190	180	10	32107	7	529	529	opt
12207	7	199	166	33	22207	7	593	593	opt	32207	7	595	595	opt
12307	7	300	208	92	22307	7	403	403	opt	32307	7	658	658	opt
12407	7	207	200	7	22407	7	577	577	opt	32407	7	250	236	14
12507	7	371	371	opt	22507	7	400	400	opt	32507	7	589	589	opt
12607	7	471	471	opt	22607	7	220	217	3	32607	7	519	519	opt
12707	7	480	480	opt	22707	7	375	256	119	32707	7	270	260	10
12807	7	256	216	40	22807	7	322	322	opt	32807	7	473	473	opt
12907	7	264	232	32	22907	7	429	429	opt	32907	7	590	590	opt
13007	7	220	220	opt	23007	7	504	504	opt	33007	7	303	250	53
13108	8	330	330	opt	23108	8	648	648	opt	33108	8	628	628	opt
13208	8	488	378	110	23208	8	532	532	opt	33208	8	408	392	16
13308	8	407	407	opt	23308	8	623	623	opt	33308	8	527	527	opt
13408	8	569	569	opt	23408	8	619	619	opt	33408	8	443	443	opt
13508	8	378	323	55	23508	8	718	718	opt	33508	8	762	603	159
13608	8	416	416	opt	23608	8	498	498	opt	33608	8	544	544	opt
13708	8	368	368	opt	23708	8	344	344	opt	33708	8	601	601	opt
13808	8	258	225	33	23808	8	412	412	opt	33808	8	410	410	opt
13908	8	248	238	10	23908	8	342	342	opt	33908	8	609	609	opt
14008	8	404	374	30	24008	8	326	307	19	34008	8	363	289	74
14109	9	479	479	opt	24109	9	565	386	179	34109	9	606	606	opt
14209	9	664	664	opt	24209	9	435	435	opt	34209	9	861	861	opt
14309	9	475	475	opt	24309	9	683	683	opt	34309	9	818	818	opt
14409	9	610	610	opt	24409	9	684	684	opt	34409	9	462	461	1
14509	9	677	677	opt	24509	9	560	560	opt	34509	9	580	580	opt
14609	9	659	659	opt	24609	9	652	652	opt	34609	9	715	715	opt
14709	9	605	605	opt	24709	9	446	446	opt	34709	9	439	344	95
14809	9	540	482	58	24809	9	370	360	10	34809	9	700	700	opt
14909	9	302	248	54	24909	9	787	787	opt	34909	9	424	424	opt
15009	9	436	436	opt	25009	9	662	662	opt	35009	9	880	880	opt
15110	10	771	771	opt	25110	10	517	347	170	35110	10	737	737	opt
15210	10	532	532	opt	25210	10	771	771	opt	35210	10	559	559	opt
15310	10	653	653	opt	25310	10	447	357	90	35310	10	825	825	opt
15410	10	653	653	opt	25410	10	687	687	opt	35410	10	693	693	opt
15510	10	622	486	136	25510	10	828	828	opt	35510	10	934	934	opt
15610	10	689	689	opt	25610	10	573	494	79	35610	10	856	856	opt
15710	10	385	268	117	25710	10	885	885	opt	35710	10	804	804	opt
15810	10	770	770	opt	25810	10	831	831	opt	35810	10	866	866	opt
15910	10	448	448	opt	25910	10	478	405	73	35910	10	752	752	opt
16010	10	465	456	9	26010	10	760	571	189	36010	10	571	571	opt

SERIES 4, 5, 6

<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>
40105	5	138	138	opt	50105	5	168	156	12	60105	5	180	160	20
40205	5	194	194	opt	50205	5	294	294	opt	60205	5	219	207	12
40305	5	230	230	opt	50305	5	300	300	opt	60305	5	170	160	10
40405	5	138	138	opt	50405	5	130	130	opt	60405	5	356	354	2
40505	5	254	254	opt	50505	5	270	270	opt	60505	5	252	252	opt
40605	5	172	144	28	50605	5	208	208	opt	60605	5	246	238	8
40705	5	200	184	16	50705	5	202	175	27	60705	5	197	197	opt
40805	5	250	214	36	50805	5	156	156	opt	60805	5	368	368	opt
40905	5	178	155	23	50905	5	130	130	opt	60905	5	170	170	opt
41005	5	150	138	12	51005	5	358	261	97	61005	5	288	272	16
41106	6	214	211	3	51106	6	307	217	90	61106	6	228	228	opt
41206	6	266	266	opt	51206	6	408	408	opt	61206	6	412	412	opt
41306	6	247	244	3	51306	6	406	406	opt	61306	6	456	405	51
41406	6	338	316	22	51406	6	319	319	opt	61406	6	414	414	opt
41506	6	289	287	2	51506	6	222	174	48	61506	6	279	279	opt
41606	6	250	221	29	51606	6	223	186	37	61606	6	446	442	4
41706	6	177	165	12	51706	6	165	155	10	61706	6	474	360	114
41806	6	165	160	5	51806	6	297	297	opt	61806	6	382	382	opt
41906	6	232	211	21	51906	6	382	382	opt	61906	6	307	307	opt
42006	6	290	236	54	52006	6	218	206	12	62006	6	395	395	opt
42107	7	252	204	48	52107	7	276	216	60	62107	7	300	252	48
42207	7	282	282	opt	52207	7	294	266	28	62207	7	250	233	17
42307	7	456	423	33	52307	7	317	317	opt	62307	7	507	400	107
42407	7	240	204	36	52407	7	374	374	opt	62407	7	577	518	59
42507	7	376	288	88	52507	7	210	180	30	62507	7	456	448	8
42607	7	298	249	49	52607	7	301	266	35	62607	7	324	324	opt
42707	7	286	220	66	52707	7	442	442	opt	62707	7	435	435	opt
42807	7	452	431	21	52807	7	499	499	opt	62807	7	359	334	25
42907	7	355	304	51	52907	7	349	349	opt	62907	7	502	502	opt
43007	7	427	361	66	53007	7	525	525	opt	63007	7	692	692	opt
43108	8	392	370	22	53108	8	541	541	opt	63108	8	697	697	opt
43208	8	547	537	10	53208	8	342	297	45	63208	8	548	548	opt
43308	8	532	532	opt	53308	8	318	301	17	63308	8	603	603	opt
43408	8	280	244	36	53408	8	472	472	opt	63408	8	629	629	opt
43508	8	289	265	24	53508	8	385	301	84	63508	8	496	453	43
43608	8	279	273	6	53608	8	448	385	63	63608	8	622	622	opt
43708	8	242	208	34	53708	8	657	530	127	63708	8	774	774	opt
43808	8	204	194	10	53808	8	413	384	29	63808	8	703	703	opt
43908	8	352	250	102	53908	8	439	364	75	63908	8	544	544	opt
44008	8	239	188	51	54008	8	616	616	opt	64008	8	755	755	opt
44109	9	415	357	58	54109	9	407	384	23	64109	9	455	455	opt
44209	9	350	254	96	54209	9	373	288	85	64209	9	754	754	opt
44309	9	401	401	opt	54309	9	601	601	opt	64309	9	548	548	opt
44409	9	587	497	90	54409	9	389	366	23	64409	9	689	558	131
44509	9	571	546	25	54509	9	284	271	13	64509	9	496	496	opt
44609	9	509	509	opt	54609	9	726	542	184	64609	9	739	739	opt
44709	9	524	524	opt	54709	9	350	350	opt	64709	9	423	370	53
44809	9	602	602	opt	54809	9	439	393	46	64809	9	785	785	opt
44909	9	402	384	18	54909	9	493	457	36	64909	9	603	603	opt
45009	9	331	310	21	55009	9	313	258	55	65009	9	851	851	opt
45110	10	677	677	opt	55110	10	762	762	opt	65110	10	422	350	72
45210	10	825	825	opt	55210	10	553	553	opt	65210	10	538	538	opt
45310	10	616	459	157	55310	10	825	825	opt	65310	10	867	867	opt
45410	10	475	451	24	55410	10	750	750	opt	65410	10	732	732	opt
45510	10	405	320	85	55510	10	613	445	168	65510	10	751	751	opt
45610	10	748	748	opt	55610	10	744	744	opt	65610	10	718	718	opt
45710	10	355	312	43	55710	10	778	586	192	65710	10	812	812	opt
45810	10	728	568	160	55810	10	646	607	39	65810	10	899	899	opt
45910	10	487	376	111	55910	10	523	437	86	65910	10	605	582	23
46010	10	777	643	134	56010	10	785	591	194	66010	10	536	536	opt

SERIES 7, 8, 9

<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>	<i>ejemplar</i>	<i>m</i>	<i>TC</i>	<i>TC*</i>	<i>TC vs TC*</i>
70105	5	150	126	24	80105	5	205	145	60	90105	5	386	320	66
70205	5	158	158	opt	80205	5	208	208	opt	90205	5	186	186	opt
70305	5	138	126	12	80305	5	182	168	14	90305	5	272	240	32
70405	5	200	168	32	80405	5	291	240	51	90405	5	270	270	opt
70505	5	222	210	12	80505	5	240	234	6	90505	5	238	210	28
70605	5	210	210	opt	80605	5	224	192	32	90605	5	210	210	opt
70705	5	154	154	opt	80705	5	130	130	opt	90705	5	288	263	25
70805	5	127	127	opt	80805	5	120	120	opt	90805	5	251	251	opt
70905	5	129	129	opt	80905	5	156	156	opt	90905	5	160	160	opt
71005	5	211	211	opt	81005	5	234	234	opt	91005	5	272	256	16
71106	6	175	175	opt	81106	6	272	261	11	91106	6	368	368	opt
71206	6	275	255	20	81206	6	198	186	12	91206	6	240	216	24
71306	6	165	153	12	81306	6	249	232	17	91306	6	336	297	39
71406	6	130	130	opt	81406	6	217	203	14	91406	6	288	288	opt
71506	6	239	226	13	81506	6	217	203	14	91506	6	301	252	49
71606	6	315	257	58	81606	6	299	261	38	91606	6	252	216	36
71706	6	161	161	opt	81706	6	210	170	40	91706	6	190	190	opt
71806	6	252	204	48	81806	6	326	261	65	91806	6	336	293	43
71906	6	220	188	32	81906	6	280	248	32	91906	6	295	252	43
72006	6	134	124	10	82006	6	315	261	54	92006	6	252	204	48
72107	7	192	180	12	82107	7	192	180	12	92107	7	220	210	10
72207	7	220	206	14	82207	7	320	273	47	92207	7	312	240	72
72307	7	294	224	70	82307	7	200	170	30	92307	7	250	200	50
72407	7	256	224	32	82407	7	294	244	50	92407	7	491	401	90
72507	7	248	203	45	82507	7	320	268	52	92507	7	511	420	91
72607	7	320	226	94	82607	7	288	224	64	92607	7	240	210	30
72707	7	234	195	39	82707	7	204	204	opt	92707	7	456	360	96
72807	7	256	224	32	82807	7	226	170	56	92807	7	308	291	17
72907	7	220	206	14	82907	7	238	224	14	92907	7	416	320	96
73007	7	374	248	126	83007	7	280	242	38	93007	7	405	352	53
73108	8	279	229	50	83108	8	245	200	45	93108	8	336	275	61
73208	8	373	322	51	83208	8	360	300	60	93208	8	300	230	70
73308	8	289	223	66	83308	8	405	338	67	93308	8	448	365	83
73408	8	255	207	48	83408	8	343	277	66	93408	8	448	360	88
73508	8	267	190	77	83508	8	490	358	132	93508	8	535	462	73
73608	8	237	209	28	83608	8	360	296	64	93608	8	525	455	70
73708	8	378	299	79	83708	8	493	336	157	93708	8	576	450	126
73808	8	360	270	90	83808	8	225	195	30	93808	8	420	322	98
73908	8	356	277	79	83908	8	481	372	109	93908	8	336	288	48
74008	8	434	394	40	84008	8	329	257	72	94008	8	520	400	120
74109	9	324	254	70	84109	9	426	331	95	94109	9	633	416	217
74209	9	447	311	136	84209	9	359	251	108	94209	9	584	455	129
74309	9	580	378	202	84309	9	432	338	94	94309	9	396	312	84
74409	9	294	222	72	84409	9	464	363	101	94409	9	558	483	75
74509	9	421	323	98	84509	9	551	475	76	94509	9	334	270	64
74609	9	282	222	60	84609	9	325	252	73	94609	9	448	350	98
74709	9	442	422	20	84709	9	580	381	199	94709	9	534	454	80
74809	9	338	254	84	84809	9	276	257	19	94809	9	592	445	147
74909	9	392	322	70	84909	9	336	251	85	94909	9	384	320	64
75009	9	496	365	131	85009	9	464	390	74	95009	9	504	392	112
75110	10	282	202	80	85110	10	366	272	94	95110	10	602	434	168
75210	10	397	321	76	85210	10	348	238	110	95210	10	715	608	107
75310	10	444	364	80	85310	10	314	235	79	95310	10	725	599	126
75410	10	345	249	96	85410	10	587	510	77	95410	10	671	464	207
75510	10	272	202	70	85510	10	389	270	119	95510	10	444	384	60
75610	10	465	352	113	85610	10	378	317	61	95610	10	897	654	243
75710	10	646	425	221	85710	10	315	234	81	95710	10	504	372	132
75810	10	348	264	84	85810	10	607	531	76	95810	10	492	336	156
75910	10	513	340	173	85910	10	427	329	98	95910	10	532	423	109
76010	10	282	210	72	86010	10	653	415	238	96010	10	630	432	198

ANEXO 6

Ejemplares de la experiencia computacional ampliada (más de 10 baños)

Estructura de los datos:

código		
	a_i	b_i
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
4	a_4	b_4
	...	
	f_i	
	$i=0,\dots,m$	
	$e_{i,i+1}$	
	$i=0,\dots,m$	

SERIE 7+

	76114		76214		76314		76414		76514		76614		76714		76814		76914		77014	
	a _i	b _i																		
1	46	414	25	202	29	244	56	450	21	140	21	108	76	618	36	396	22	69	73	744
2	75	774	24	109	67	626	69	501	25	135	57	593	60	461	35	203	44	179	66	214
3	56	176	50	430	47	272	79	623	52	422	73	486	53	318	75	443	50	200	54	272
4	23	73	30	141	34	175	65	383	54	593	69	345	77	561	52	429	67	281	65	295
5	27	128	61	484	66	431	71	276	34	227	41	123	53	206	70	411	35	311	20	121
6	47	150	32	106	26	176	24	117	59	338	57	541	70	684	53	527	56	590	37	167
7	60	210	63	329	78	615	25	105	59	206	23	74	78	842	61	455	37	311	55	258
8	54	577	36	355	49	519	21	135	49	224	46	466	21	102	74	374	78	601	40	313
9	34	241	40	266	21	122	57	367	38	360	46	218	36	116	49	346	45	220	71	306
10	25	94	74	656	77	682	69	411	52	364	23	199	42	426	34	344	52	304	50	249
11	24	175	59	589	40	319	22	203	42	401	31	247	43	358	71	746	77	507	60	513
12	58	544	63	350	61	244	37	307	79	822	28	276	66	207	62	413	68	253	34	204
13	28	115	22	161	56	505	37	367	78	682	69	616	38	192	49	232	42	321	56	227
14	67	576	51	484	66	570	64	427	52	468	78	248	29	218	51	300	51	508	40	154
	f=12		f=9		f=12		f=13		f=9		f=12		f=13		f=7		f=12		f=12	
	e=8		e=6		e=8		e=9		e=6		e=8		e=9		e=5		e=8		e=8	

	77117		77217		77317		77417		77517		77617		77717		77817		77917		78017	
	a _i	b _i																		
1	30	289	30	145	53	175	39	299	71	680	28	236	56	336	76	721	78	529	78	781
2	31	232	43	358	21	189	24	76	35	234	37	252	74	614	42	252	57	466	76	246
3	68	646	53	531	64	528	44	170	23	151	69	338	54	479	65	280	73	279	73	253
4	67	376	44	479	78	709	42	362	76	810	27	234	37	221	37	115	71	671	65	552
5	21	210	62	327	45	403	68	670	27	270	32	116	25	169	20	75	22	230	66	260
6	62	427	68	309	55	386	54	590	25	176	69	290	46	185	55	192	60	515	64	461
7	21	187	29	88	58	630	48	331	68	286	47	445	51	283	32	289	56	546	30	189
8	70	319	64	379	44	389	20	213	56	236	44	256	62	244	28	98	48	489	57	575
9	73	473	77	774	32	301	21	189	50	282	35	234	42	320	50	214	42	354	43	172
10	28	157	48	245	61	635	64	423	44	480	53	500	65	560	32	156	69	545	58	438
11	53	341	29	294	63	258	63	406	52	513	45	351	56	232	25	150	38	381	39	305
12	37	327	74	685	30	134	63	534	32	267	45	369	48	360	75	399	45	289	55	514
13	24	78	41	195	80	536	63	470	50	238	72	575	35	320	57	614	32	191	58	603
14	45	408	39	320	22	127	30	104	57	246	55	443	29	107	71	513	54	307	23	141
15	74	227	62	467	52	173	59	584	21	202	58	340	32	244	20	179	59	517	29	257
16	37	118	43	266	22	139	34	167	48	450	45	243	80	251	78	327	58	174	74	386
17	67	473	75	681	44	288	39	263	64	270	45	452	38	366	48	387	34	238	46	251
	f=12		f=10		f=7		f=13		f=10		f=10		f=13		f=13		f=15		f=9	
	e=8		e=7		e=5		e=9		e=7		e=7		e=9		e=9		e=10		e=6	

	78120		78220		78320		78420		78520		78620		78720		78820		78920		79020	
	a _i	b _i																		
1	74	643	76	616	32	238	27	235	45	156	44	401	55	200	57	279	24	199	34	315
2	40	199	51	411	24	109	45	475	48	194	39	256	26	85	49	401	65	582	55	392
3	40	161	78	344	51	299	73	338	61	591	57	472	77	812	74	548	30	117	60	423
4	36	153	42	132	54	258	66	545	59	285	37	367	74	595	40	408	39	277	54	301
5	65	527	41	312	26	252	59	367	56	474	63	490	38	336	72	598	62	317	32	173
6	58	472	58	622	63	320	73	501	52	407	26	246	39	231	27	177	72	255	35	187
7	69	293	43	172	65	651	20	84	64	562	79	706	50	205	69	378	56	202	46	293
8	35	269	40	166	75	798	51	200	37	394	24	249	37	147	76	239	26	223	61	608
9	75	376	41	449	24	256	59	570	23	234	68	213	49	437	41	205	25	226	40	436
10	77	696	63	316	67	309	73	284	59	375	35	275	29	250	68	517	75	773	39	193
11	71	451	48	366	76	701	64	484	33	362	37	161	42	255	44	208	61	440	61	577
12	70	309	46	493	39	402	73	637	70	595	33	292	48	275	71	708	34	194	52	486
13	54	412	21	75	31	130	41	348	32	329	29	111	23	221	50	203	54	440	58	383
14	62	583	62	253	27	86	73	765	64	404	23	174	79	539	57	303	71	700	47	443
15	38	374	66	350	53	217	37	228	27	113	73	490	65	518	41	302	30	245	58	445
16	64	381	74	371	23	211	52	522	40	393	58	186	27	246	66	679	62	677	71	446
17	72	557	54	488	76	506	21	193	35	278	24	159	25	130	50	287	78	788	56	415
18	48	363	36	149	23	104	76	424	51	458	31	109	45	255	77	758	37	274	52	489
19	36	283	33	105	64	247	21	223	47	376	29	301	33	262	43	371	56	303	37	169
20	20	129	76	787	30	306	80	590	76	512	78	501	47	262	77	755	42	304	68	572
	f=10		f=13		f=12		f=9		f=12		f=9		f=10		f=12		f=9		f=13	
	e=7		e=9		e=8		e=6		e=8		e=6		e=7		e=8		e=6		e=9	

ANEXO 7

Resultados al aplicar el algoritmo de *branch and bound* utilizando el Algoritmo Combinado AC o su variante AC' para resolver los ejemplares de la experiencia computacional ampliada.

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W
------------------	---	---	----	----	---

Ejemplar: código de un ejemplar.

TC: tiempo de ciclo obtenido

H: secuencia óptima de movimientos de transporte para el puente-grúa (baño de extracción del objeto).

H': ídem (baño de deposición del objeto).

T: instantes óptimos de los correspondientes movimientos de transporte para el puente-grúa (extracción del objeto).

T': ídem (deposición del objeto).

W: tiempo de espera del puente-grúa en el correspondiente baño en **H**.

SERIE 7+ (VA/GR)

Ejemplar (TC)	H	T	H'	T'	W						
76114							14	150	15	159	0
516	0	0	1	12	0	13	171	14	180	0	
	3	32	4	44	4	12	192	13	201	0	
	1	68	2	80	0	11	213	12	222	0	
	4	96	5	108	0	9	240	10	249	0	
	5	135	6	147	27	8	261	9	270	0	
	8	163	9	175	0	6	288	7	297	0	
	6	199	7	211	0	4	315	5	324	0	
	9	227	10	239	0	76614					
	10	264	11	276	25	511	0	0	1	12	0
	12	284	13	296	0	2	20	3	32	0	
	14	304	15	316	0	1	48	2	60	0	
	13	332	14	344	0	4	76	5	88	0	
	11	368	12	380	0	6	96	7	108	0	
	7	420	8	432	0	8	116	9	128	0	
	2	480	3	492	0	5	160	6	172	0	
						7	180	8	192	0	
76214						9	200	10	212	0	
346	0	0	1	9	0	10	235	11	247	23	
	1	34	2	43	25	13	263	14	275	0	
	3	49	4	58	0	11	299	12	311	0	
	5	64	6	73	0	12	339	13	351	28	
	2	97	3	106	0	14	359	15	371	0	
	4	112	5	121	0	3	467	4	479	0	
	6	127	7	136	0	76714					
	8	142	9	151	0	631	0	0	1	13	0
	10	157	11	166	0	3	31	4	44	0	
	12	172	13	181	0	5	53	6	66	0	
	14	187	15	196	0	7	75	8	88	0	
	13	208	14	217	0	11	115	12	128	0	
	11	235	12	244	0	8	164	9	177	0	
	9	262	10	271	0	12	204	13	217	0	
	7	289	8	298	0	9	253	10	266	0	
						13	293	14	306	0	
76314						14	335	15	348	29	
459	0	0	1	12	0	10	393	11	406	0	
	2	20	3	32	0	6	451	7	464	0	
	1	48	2	60	0	1	518	2	531	0	
	3	79	4	91	11	4	549	5	562	0	
	5	99	6	111	0	2	591	3	604	2	
	4	127	5	139	0	76814					
	6	147	7	159	0	285	0	0	1	7	0
	8	167	9	179	0	3	17	4	24	0	
	10	187	11	199	0	2	34	3	41	0	
	9	215	10	227	0	5	51	6	58	0	
	11	239	12	251	4	7	63	8	70	0	
	14	267	15	279	0	9	75	10	82	0	
	13	295	14	307	0	12	92	13	99	0	
	12	323	13	335	0	14	104	15	111	0	
	7	383	8	395	0	11	131	12	138	0	
						13	148	14	155	5	
76414						10	175	11	182	0	
646	0	0	1	13	0	8	197	9	204	0	
	2	22	3	35	0	6	219	7	226	0	
	4	44	5	57	0	4	241	5	248	0	
	9	93	10	106	0	1	268	2	275	0	
	12	124	13	137	0	76914					
	14	146	15	159	0	608	0	0	1	12	0
	5	249	6	262	0	1	34	2	46	22	
	1	307	2	320	0	2	90	3	102	44	
	3	329	4	342	0	3	152	4	164	50	
	6	360	7	373	0	6	180	7	192	0	
	7	398	8	411	25	8	200	9	212	0	
	8	432	9	445	21	4	252	5	264	0	
	10	454	11	467	0	7	280	8	292	0	
	13	485	14	498	0	9	300	10	312	0	
	11	525	12	538	0	11	320	12	332	0	
76514						14	348	15	360	0	
354	0	0	1	9	0	12	400	13	412	16	
	1	30	2	39	21	10	436	11	448	0	
	3	45	4	54	0	13	464	14	476	0	
	2	66	3	75	0	5	548	6	560	0	
	5	87	6	96	0						
	7	102	8	111	0						
	10	123	11	132	0						

77014						1	52	2	65	39
646	0	0	1	12	0	2	89	3	102	24
	2	20	3	32	0	3	146	4	159	44
	6	56	7	68	0	6	177	7	190	0
	9	84	10	96	0	4	217	5	230	0
	11	104	12	116	0	7	248	8	261	0
	12	150	13	162	34	8	281	9	294	20
	3	242	4	254	0	9	315	10	328	21
	7	278	8	290	0	12	346	13	359	0
	10	306	11	318	0	15	377	16	390	0
	13	334	14	346	0	16	424	17	437	34
	14	386	15	398	40	10	500	11	513	0
	8	454	9	466	0	13	531	14	544	0
	4	506	5	518	0	17	571	18	584	0
	1	550	2	562	0	14	620	15	633	0
	5	586	6	598	0	11	669	12	682	0
						5	745	6	758	0
77117						77517				
866	0	0	1	12	0	553	0	0	1	10
	1	42	2	54	30		2	17	3	27
	2	85	3	97	31		4	34	5	44
	5	113	6	125	0		3	58	4	68
	9	149	10	161	0		5	75	6	85
	14	193	15	205	0		8	99	9	109
	10	245	11	257	0		10	116	11	126
	15	289	16	301	0		12	133	13	143
	16	338	17	350	37		6	192	7	202
	6	438	7	450	0		9	216	10	226
	3	482	4	494	0		13	247	14	257
	7	518	8	530	0		16	271	17	281
	11	554	12	566	0		14	314	15	324
	17	606	18	618	0		17	345	18	355
	12	666	13	678	0		15	376	16	386
	13	702	14	714	24		11	421	12	431
	8	762	9	774	0		7	466	8	476
	4	814	5	826	0		1	525	2	535
77217						77617				
540	0	0	1	10	0	628	0	0	1	10
	1	40	2	50	30		4	31	5	41
	3	57	4	67	0		1	69	2	79
	5	74	6	84	0		5	100	6	110
	8	98	9	108	0		7	117	8	127
	10	115	11	125	0		10	141	11	151
	12	132	13	142	0		13	165	14	175
	11	156	12	166	0		15	182	16	192
	13	183	14	193	10		17	199	18	209
	15	200	16	210	0		2	321	3	331
	17	217	18	227	0		6	352	7	362
	16	253	17	263	12		8	369	9	379
	14	284	15	294	0		11	393	12	403
	6	357	7	367	0		16	431	17	441
	2	402	3	412	0		14	462	15	472
	4	419	5	429	0		12	493	13	503
	7	443	8	453	0		9	531	10	541
	9	460	10	470	0		3	590	4	600
77317						77717				
450	0	0	1	7	0	1097	0	0	1	13
	3	17	4	24	0		4	40	5	53
	5	29	6	36	0		10	98	11	111
	1	61	2	68	0		5	165	6	178
	2	89	3	96	0		1	223	2	236
	4	102	5	109	1		6	272	7	285
	6	114	7	121	0		11	321	12	334
	8	126	9	133	0		7	379	8	392
	11	143	12	150	0		12	428	13	441
	17	175	18	182	0		8	486	9	499
	13	207	14	214	0		2	562	3	575
	12	224	13	231	0		9	629	10	642
	14	236	15	243	0		13	669	14	682
	9	273	10	280	0		14	711	15	724
	15	305	16	312	0		15	756	16	769
	16	334	17	341	0		16	849	17	862
	10	376	11	383	0		17	900	18	913
	7	403	8	410	0		3	1048	4	1061
77417										
812	0	0	1	13	0					

77817						20	775	21	785	20
1008	0	0	1	13	0	16	820	17	830	0
	6	58	7	71	0	13	858	14	868	0
	7	103	8	116	32	9	903	10	913	0
	8	144	9	157	28					
	13	193	14	206	0	78220	0	0	1	13
	9	251	10	264	0	1424	7	67	8	80
	10	296	11	309	32		15	143	16	156
	14	336	15	349	0		8	228	9	241
	15	369	16	382	20		1	313	2	326
	11	427	12	440	0		2	377	3	390
	16	476	17	489	0		9	444	10	457
	17	537	18	550	48		16	511	17	524
	12	604	13	617	0		10	587	11	600
	1	725	2	738	0		3	672	4	685
	2	780	3	793	42		4	727	5	740
	3	858	4	871	65		5	781	6	794
	4	908	5	921	37		11	839	12	852
	5	941	6	954	20		17	897	18	910
77917							18	946	19	959
1018	0	0	1	15	0		19	992	20	1005
	3	35	4	50	0		12	1077	13	1090
	7	80	8	95	0		13	1111	14	1124
	10	115	11	130	0		20	1178	21	1191
	15	170	16	185	0		14	1254	15	1267
	16	243	17	258	58		6	1348	7	1361
	17	292	18	307	34	78320	0	0	1	12
	11	377	12	392	0	1134	1	44	2	56
	8	432	9	447	0		2	80	3	92
	1	527	2	542	0		8	132	9	144
	4	562	5	577	0		11	160	12	172
	5	599	6	614	22		3	244	4	256
	9	644	10	659	0		4	310	5	322
	12	679	13	694	0		5	348	6	360
	13	726	14	741	32		9	384	10	396
	14	795	15	810	54		12	412	13	424
	6	900	7	915	0		13	455	14	467
	2	965	3	980	0		14	494	15	506
78017							6	578	7	590
597	0	0	1	9	0		10	614	11	626
	6	39	7	48	0		15	658	16	670
	1	87	2	96	3		16	693	17	705
	7	126	8	135	0		17	781	18	793
	11	153	12	162	0		18	816	19	828
	13	168	14	177	0		19	892	20	904
	16	189	17	198	0		20	934	21	946
	14	216	15	225	0		7	1058	8	1070
	8	267	9	276	0	78420	0	0	1	9
	2	318	3	327	0	938	1	36	2	45
	4	333	5	342	0		2	90	3	99
	9	366	10	375	0		10	141	11	150
	12	387	13	396	0		14	168	15	177
	15	408	16	417	0		18	195	19	204
	17	423	18	432	0		19	225	20	234
	10	480	11	489	0		15	264	16	273
	3	537	4	546	0		11	303	12	312
	5	552	6	561	0		3	366	4	375
78120							4	441	5	450
983	0	0	1	10	0		5	509	6	518
	1	84	2	94	74		6	591	7	600
	2	134	3	144	40		7	620	8	629
	3	184	4	194	40		12	653	13	662
	4	230	5	240	36		8	692	9	701
	5	305	6	315	65		13	725	14	734
	10	343	11	353	0		16	746	17	755
	14	374	15	384	0		20	773	21	782
	17	398	18	408	0		17	806	18	815
	6	492	7	502	0		9	869	10	878
	11	530	12	540	0					
	7	575	8	585	0					
	8	620	9	630	35					
	12	651	13	661	0					
	15	675	16	685	0					
	18	699	19	709	0					
	19	745	20	755	36					

78520						78820					
1261	0	0	1	12	0	1149	0	0	1	12	0
	1	57	2	69	45		1	69	2	81	57
	2	117	3	129	48		8	129	9	141	0
	10	185	11	197	0		2	197	3	209	0
	16	237	17	249	0		3	283	4	295	74
	20	273	21	285	0		9	335	10	347	0
	17	317	18	329	0		12	363	13	375	0
	11	385	12	397	0		16	399	17	411	0
	3	469	4	481	0		20	435	21	447	0
	4	540	5	552	59		17	479	18	491	0
	5	608	6	620	56		13	531	14	543	0
	6	672	7	684	52		4	623	5	635	0
	12	724	13	736	0		10	675	11	687	0
	18	776	19	788	0		5	735	6	747	0
	13	836	14	848	0		6	774	7	786	27
	7	904	8	916	0		11	818	12	830	0
	8	953	9	965	37		14	846	15	858	0
	14	1005	15	1017	0		18	882	19	894	0
	19	1049	20	1061	0		19	937	20	949	43
	15	1101	16	1113	0		15	989	16	1001	0
	9	1169	10	1181	0		7	1073	8	1085	0
78620						78920					
902	0	0	1	9	0	900	0	0	1	9	0
	1	53	2	62	44		1	33	2	42	24
	2	101	3	110	39		2	107	3	116	65
	8	140	9	149	0		3	146	4	155	30
	3	185	4	194	0		4	194	5	203	39
	4	231	5	240	37		5	265	6	274	62
	9	264	10	273	0		11	304	12	313	0
	15	303	16	312	0		14	325	15	334	0
	20	336	21	345	0		17	346	18	355	0
	16	375	17	384	0		15	373	16	382	0
	17	408	18	417	24		18	394	19	403	0
	18	448	19	457	31		12	445	13	454	0
	10	511	11	520	0		6	496	7	505	0
	5	556	6	565	0		7	561	8	570	56
	6	591	7	600	26		8	596	9	605	26
	11	624	12	633	0		9	630	10	639	25
	12	666	13	675	33		13	657	14	666	0
	13	704	14	713	29		16	678	17	687	0
	19	743	20	752	0		19	699	20	708	0
	14	788	15	797	0		20	750	21	759	42
	7	845	8	854	0		10	825	11	834	0
78720						79020					
1084	0	0	1	10	0	1367	0	0	1	13	0
	1	65	2	75	55		1	47	2	60	34
	2	101	3	111	26		2	115	3	128	55
	9	153	10	163	0		11	200	12	213	0
	14	191	15	201	0		15	240	16	253	0
	10	236	11	246	0		3	370	4	383	0
	3	302	4	312	0		4	437	5	450	54
	11	361	12	371	0		5	482	6	495	32
	15	392	16	402	0		6	530	7	543	35
	16	429	17	439	27		7	589	8	602	46
	17	464	18	474	25		12	638	13	651	0
	12	516	13	526	0		16	678	17	691	0
	18	561	19	571	0		17	747	18	760	56
	19	604	20	614	33		18	812	19	825	52
	20	661	21	671	47		19	862	20	875	37
	13	727	14	737	0		20	943	21	956	68
	4	807	5	817	0		13	1028	14	1041	0
	5	855	6	865	38		8	1095	9	1108	0
	6	904	7	914	39		9	1148	10	1161	40
	7	964	8	974	50		14	1197	15	1210	0
	8	1011	9	1021	37		10	1255	11	1268	0

ANEXO 8

Resultados óptimos al aplicar el algoritmo de *Minimum Common Cycle* utilizando el Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA) para resolver problemas con dos grúas.

Grúa	Ejemplar		(TC)		W
	H	T	H'	T'	

Ejemplar: código de un ejemplar.

TC: tiempo de ciclo óptimo

Grúa: número de grúa que realiza el movimiento indicado en H.

H: secuencia óptima de movimientos de transporte para el puente-grúa (baño de extracción del objeto). **H'**: ídem (baño de deposición del objeto).

T: instantes óptimos de los correspondientes movimientos de transporte para el puente-grúa (extracción del objeto). **T'**: ídem (deposición del objeto).

W: tiempo de espera del puente-grúa en el correspondiente baño en **H**.

SERIE 1

		15110		204	
1	0	0	1	13	0
1	2	22	3	35	0
1	4	44	5	57	0
1	1	93	2	106	0
1	3	115	4	128	0
1	5	137	6	150	0
<hr/>					
2	6	0	7	13	0
2	9	31	10	44	0
2	7	71	8	84	0
2	10	109	11	122	7
2	8	149	9	162	0
<hr/>					
		15210		158	
1	0	0	1	10	0
1	4	31	5	41	0
1	3	61	4	71	6
1	2	85	3	95	0
1	1	109	2	119	0
<hr/>					
2	5	0	6	10	0
2	8	24	9	34	0
2	7	48	8	58	0
2	10	72	11	82	0
2	9	96	10	106	0
2	6	134	7	144	0
<hr/>					
		15310		172	
1	0	0	1	10	0
1	4	31	5	41	0
1	1	69	2	79	0
1	3	86	4	96	0
1	5	103	6	113	0
1	2	141	3	151	0
<hr/>					
2	6	0	7	10	0
2	8	17	9	27	0
2	9	64	10	37	37
2	7	95	8	105	0
2	10	120	11	130	1
<hr/>					
		15410		138	
1	0	0	1	9	0
1	2	15	3	24	0
1	4	30	5	39	0
1	1	63	2	72	0
1	3	78	4	87	0
1	5	93	6	102	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	9	21	10	30	0
2	8	42	9	51	0
2	10	73	11	16	16
2	7	106	8	115	0

		15510		133	
1	0	0	1	9	0
1	3	21	4	30	0
1	5	36	6	45	0
1	4	64	5	73	7
1	2	91	3	100	0
1	1	112	2	121	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	9	21	10	30	0
2	8	48	9	57	6
2	7	69	8	78	0
2	10	90	11	99	0
<hr/>					
		15610		276	
1	0	0	1	13	0
1	1	35	2	22	22
1	2	123	3	75	75
1	3	157	4	21	21
1	4	206	5	36	36
<hr/>					
2	5	0	6	13	0
2	9	40	10	53	0
2	6	89	7	102	0
2	7	156	8	54	54
2	10	187	11	200	0
2	8	227	9	240	0
<hr/>					
		15710		106	
1	0	0	1	7	0
1	3	17	4	24	0
1	5	29	6	36	0
1	4	50	5	57	4
1	2	72	3	79	0
1	1	89	2	96	0
<hr/>					
2	6	0	7	7	0
2	10	22	11	29	0
2	9	39	10	46	0
2	8	56	9	63	0
2	7	83	8	90	10
<hr/>					
		15810		251	
1	0	0	1	15	0
1	3	35	4	50	0
1	4	87	5	37	37
1	1	142	2	157	0
1	2	198	3	41	41
<hr/>					
2	5	0	6	15	0
2	8	35	9	50	0
2	6	80	7	95	0
2	9	115	10	130	0
2	10	151	11	21	21
2	7	206	8	221	0

15910			138		
1	0	0	1	9	0
1	2	15	3	24	0
1	4	30	5	39	0
1	1	63	2	72	0
1	3	78	4	87	0
1	5	93	6	102	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	9	21	10	30	0
2	10	51	11	21	21
2	8	78	9	87	0
2	7	99	8	108	0
16010			138		
1	0	0	1	9	0
1	3	21	4	30	0
1	5	36	6	45	0
1	2	69	3	78	0
1	4	84	5	93	0
1	1	117	2	126	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	10	27	11	36	0
2	9	48	10	57	0
2	8	69	9	78	0
2	7	90	8	99	0

SERIE 2

25110			128		
1	0	0	1	10	0
1	4	25	5	35	0
1	3	45	4	55	0
1	1	70	2	80	0
1	2	102	3	22	22
<hr/>					
2	5	0	6	10	0
2	7	15	8	25	0
2	10	35	11	45	0
2	9	55	10	65	0
2	8	75	9	85	0
2	6	100	7	110	0
25210			224		
1	0	0	1	16	0
1	2	24	3	40	0
1	4	48	5	64	0
1	3	80	4	96	0
1	1	120	2	136	0
1	5	160	6	176	0
<hr/>					
2	6	0	7	16	0
2	8	24	9	40	0
2	9	60	10	20	20
2	7	100	8	116	0
2	10	132	11	148	0

25310			135		
1	0	0	1	10	0
1	3	20	4	30	0
1	2	57	3	17	17
1	4	77	5	87	5
1	1	110	2	120	3
<hr/>					
2	5	0	6	10	0
2	7	15	8	25	0
2	10	35	11	45	0
2	9	55	10	65	0
2	6	85	7	95	0
2	8	100	9	110	0
25410			274		
1	0	0	1	18	0
1	1	41	2	23	23
1	4	77	5	95	0
1	2	139	3	17	17
1	5	175	6	193	0
1	3	220	4	238	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	7	44	8	26	26
2	8	86	9	24	24
2	9	140	10	36	36
2	10	185	11	27	27
25510			280		
1	0	0	1	20	0
1	3	40	4	60	0
1	5	70	6	90	0
1	1	140	2	160	0
1	4	180	5	200	0
1	2	230	3	250	0
<hr/>					
2	6	0	7	20	0
2	7	51	8	31	31
2	10	91	11	111	0
2	8	141	9	161	0
2	9	196	10	35	35
25610			149		
1	0	0	1	12	0
1	3	24	4	36	0
1	5	42	6	54	0
1	4	71	5	83	5
1	2	101	3	113	0
1	1	125	2	137	0
<hr/>					
2	6	0	7	12	0
2	9	24	10	36	0
2	8	48	9	60	0
2	10	74	11	86	8
2	7	110	8	122	0

25710			264		
1	0	0	1	18	0
1	1	42	2	24	24
1	4	78	5	96	0
1	2	129	3	147	6
1	5	165	6	183	0
1	3	210	4	228	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	8	27	9	45	0
2	10	54	11	72	0
2	7	108	8	126	0
2	9	135	10	153	0
25810			252		
1	0	0	1	18	0
1	3	36	4	54	0
1	1	81	2	99	0
1	2	120	3	21	21
1	4	147	5	165	0
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	7	27	8	45	0
2	9	54	10	72	0
2	6	108	7	126	0
2	10	153	11	171	0
2	8	198	9	216	0
25910			137		
1	0	0	1	10	0
1	2	15	3	25	0
1	1	35	2	45	0
1	3	50	4	60	0
<hr/>					
2	4	0	5	10	0
2	6	15	7	25	0
2	8	30	9	40	0
2	10	45	11	55	0
2	9	67	10	77	2
2	7	92	8	102	0
2	5	117	6	127	0
26010			171		
1	0	0	1	14	0
1	2	21	3	35	0
1	4	42	5	56	0
1	3	75	4	89	5
1	1	110	2	124	0
<hr/>					
2	5	0	6	14	0
2	8	28	9	42	0
2	10	49	11	63	0
2	9	80	10	94	3
2	7	115	8	129	0
2	6	143	7	157	0

SERIE 3					
35110			196		
1	0	0	1	18	0
1	3	30	4	48	0
1	5	54	6	72	0
1	4	96	5	12	12
1	2	132	3	150	0
1	1	162	2	180	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	9	30	10	48	0
2	10	79	11	31	31
2	7	121	8	139	0
2	8	160	9	21	21
35210			195		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	1	57	2	75	3
1	4	87	5	105	0
1	3	117	4	135	0
1	5	141	6	159	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	9	30	10	48	0
2	8	60	9	78	0
2	10	84	11	102	0
2	7	137	8	11	11
35310			234		
1	0	0	1	21	0
1	2	28	3	49	0
1	4	56	5	77	0
1	5	101	6	24	24
1	1	157	2	178	0
1	3	185	4	206	0
<hr/>					
2	6	0	7	21	0
2	8	28	9	49	0
2	9	75	10	26	26
2	7	117	8	138	0
2	10	153	11	174	1
35410			218		
1	0	0	1	18	0
1	3	30	4	48	0
1	1	66	2	84	0
1	4	96	5	114	0
1	2	176	3	44	44
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	8	30	9	48	0
2	6	66	7	84	0
2	9	98	10	116	2
2	7	134	8	152	0
2	10	164	11	182	0

35510			332		
1	0	0	1	27	0
1	1	48	2	21	21
1	4	93	5	120	0
1	2	147	3	174	0
1	3	266	4	92	92
<hr/>					
2	5	0	6	27	0
2	6	66	7	39	39
2	9	111	10	138	0
2	7	170	8	197	5
2	10	215	11	242	0
2	8	269	9	296	0
35610			224		
1	0	0	1	21	0
1	2	28	3	49	0
1	4	56	5	77	0
1	3	91	4	112	0
1	1	151	2	18	18
<hr/>					
2	5	0	6	21	0
2	7	28	8	49	0
2	6	63	7	84	0
2	8	105	9	14	14
2	10	133	11	154	0
2	9	168	10	189	0
35710			236		
1	0	0	1	21	0
1	3	35	4	56	0
1	5	63	6	84	0
1	4	99	5	120	1
1	1	148	2	169	0
1	2	194	3	25	25
<hr/>					
2	6	0	7	21	0
2	9	35	10	56	0
2	7	80	8	101	3
2	10	115	11	136	0
2	8	157	9	178	0
35810			298		
1	0	0	1	24	0
1	4	48	5	72	0
1	1	104	2	128	0
1	2	154	3	26	26
1	5	194	6	218	0
1	3	242	4	266	0
<hr/>					
2	6	0	7	24	0
2	9	40	10	64	0
2	7	88	8	112	0
2	10	128	11	152	0
2	8	184	9	208	8

35910			188		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	4	48	5	66	0
1	3	85	4	103	7
1	5	109	6	127	0
1	1	157	2	175	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	9	38	10	56	8
2	7	74	8	92	0
2	10	104	11	122	0
2	8	140	9	158	0
36010			192		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	4	48	5	66	0
1	1	90	2	108	0
1	3	114	4	132	0
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	7	24	8	42	0
2	9	48	10	66	0
2	6	90	7	108	0
2	8	114	9	132	0
2	10	138	11	156	0

SERIE 4

45110			181		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	3	52	4	20	20
1	1	88	2	100	0
1	4	116	5	128	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	7	20	8	32	0
2	9	40	10	52	0
2	10	81	11	29	29
2	8	117	9	129	0
2	6	153	7	165	0
45210			250		
1	0	0	1	15	0
1	2	25	3	40	0
1	1	70	2	85	10
1	4	105	5	120	0
1	3	166	4	26	26
<hr/>					
2	5	0	6	15	0
2	9	45	10	60	0
2	6	100	7	115	0
2	8	125	9	140	0
2	10	150	11	165	0
2	7	205	8	220	0

45310			158		
1	0	0	1	10	0
1	4	31	5	41	0
1	3	55	4	65	0
1	5	72	6	82	0
1	2	110	3	120	0
1	1	134	2	144	0
<hr/>					
2	6	0	7	10	0
2	9	24	10	34	0
2	10	67	11	33	33
2	8	98	9	108	0
2	7	125	8	135	3
45410			158		
1	0	0	1	10	0
1	2	17	3	27	0
1	1	41	2	51	0
1	5	72	6	82	0
1	4	96	5	106	0
1	3	120	4	130	0
<hr/>					
2	6	0	7	10	0
2	8	17	9	27	0
2	9	58	10	31	31
2	7	89	8	99	0
2	10	113	11	123	0
45510			112		
1	0	0	1	7	0
1	3	17	4	24	0
1	5	29	6	36	0
1	2	56	3	63	0
1	4	68	5	75	0
1	1	95	2	102	0
<hr/>					
2	6	0	7	7	0
2	9	17	10	24	0
2	8	34	9	41	0
2	7	51	8	58	0
2	10	68	11	75	0
45610			204		
1	0	0	1	13	0
1	2	22	3	35	0
1	4	44	5	57	0
1	1	93	2	106	0
1	3	115	4	128	0
1	5	137	6	150	0
<hr/>					
2	6	0	7	13	0
2	8	22	9	35	0
2	10	44	11	57	0
2	7	110	8	17	17
2	9	132	10	145	0

45710			102		
1	0	0	1	7	0
1	3	17	4	24	0
1	5	29	6	36	0
1	4	46	5	53	0
1	2	68	3	75	0
1	1	85	2	92	0
<hr/>					
2	6	0	7	7	0
2	9	17	10	24	0
2	10	46	11	22	22
2	8	68	9	75	0
2	7	85	8	92	0
45810			200		
1	0	0	1	12	0
1	3	28	4	40	0
1	1	64	2	76	0
1	4	92	5	104	0
1	2	128	3	140	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	10	44	11	56	0
2	7	88	8	100	0
2	9	108	10	120	0
2	8	136	9	148	0
2	6	172	7	184	0
45910			138		
1	0	0	1	9	0
1	3	21	4	30	0
1	5	36	6	45	0
1	2	69	3	78	0
1	4	84	5	93	0
1	1	117	2	126	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	10	27	11	36	0
2	9	48	10	57	0
2	8	80	9	11	11
2	7	101	8	110	0
46010			192		
1	0	0	1	13	0
1	1	37	2	24	24
1	3	59	4	72	0
1	5	81	6	94	0
1	4	112	5	125	0
1	2	152	3	165	0
<hr/>					
2	6	0	7	13	0
2	10	40	11	53	0
2	9	71	10	84	0
2	8	102	9	115	0
2	7	133	8	146	0

SERIE 5

55110		252			
1	0	0	1	18	0
1	2	27	3	45	0
1	5	63	6	81	0
1	3	108	4	126	0
1	1	153	2	171	0
1	4	189	5	207	0
2	6	0	7	18	0
2	8	27	9	45	0
2	7	109	8	46	46
2	9	136	10	154	0
2	10	180	11	26	26
55210		182			
1	0	0	1	14	0
1	4	35	5	49	0
1	3	80	4	17	17
1	2	108	3	122	0
1	1	136	2	150	0
2	5	0	6	14	0
2	7	21	8	35	0
2	10	49	11	63	0
2	9	77	10	91	0
2	6	119	7	133	0
2	8	140	9	154	0
55310		280			
1	0	0	1	20	0
1	3	40	4	60	0
1	5	70	6	90	0
1	1	140	2	160	0
1	4	180	5	200	0
1	2	230	3	250	0
2	6	0	7	20	0
2	9	40	10	60	0
2	7	90	8	110	0
2	10	130	11	150	0
2	8	220	9	40	40
55410		216			
1	0	0	1	18	0
1	3	36	4	54	0
1	2	72	3	90	0
1	4	111	5	12	12
1	1	165	2	183	0
2	5	0	6	18	0
2	8	36	9	54	0
2	10	63	11	81	0
2	9	99	10	117	0
2	7	144	8	162	0
2	6	180	7	198	0

55510		182			
1	0	0	1	14	0
1	2	21	3	35	0
1	1	49	2	63	0
1	4	77	5	91	0
1	3	105	4	119	0
2	5	0	6	14	0
2	7	21	8	35	0
2	9	42	10	56	0
2	6	84	7	98	0
2	8	105	9	119	0
2	10	126	11	140	0
55610		216			
1	0	0	1	18	0
1	2	27	3	45	0
1	1	63	2	81	0
1	3	90	4	108	0
1	5	117	6	135	0
1	4	153	5	171	0
2	6	0	7	18	0
2	8	27	9	45	0
2	9	68	10	23	23
2	10	108	11	22	22
2	7	162	8	180	0
55710		199			
1	0	0	1	16	0
1	2	24	3	40	0
1	4	48	5	64	0
1	1	96	2	112	0
1	3	120	4	136	0
2	5	0	6	16	0
2	7	24	8	40	0
2	9	48	10	64	0
2	10	87	11	23	23
2	8	127	9	143	0
2	6	167	7	183	0
55810		208			
1	0	0	1	16	0
1	3	32	4	48	0
1	2	64	3	80	0
1	4	96	5	112	8
1	1	144	2	160	0
2	5	0	6	16	0
2	7	24	8	40	0
2	9	48	10	64	0
2	6	96	7	112	0
2	8	120	9	136	0
2	10	144	11	160	0

55910			147		
1	0	0	1	12	0
1	2	18	3	30	0
1	5	42	6	54	0
1	4	66	5	78	0
1	3	90	4	102	0
1	1	120	2	132	0
<hr/>					
2	6	0	7	12	0
2	10	30	11	42	0
2	9	54	10	66	0
2	8	78	9	90	0
2	7	103	8	115	1
<hr/>					
56010			205		
1	0	0	1	16	0
1	1	37	2	21	21
1	3	61	4	77	0
1	5	85	6	101	0
1	4	125	5	141	8
1	2	165	3	181	0
<hr/>					
2	6	0	7	16	0
2	9	32	10	48	0
2	7	84	8	12	12
2	10	116	11	132	0
2	8	160	9	176	4

SERIE 6

65110			159		
1	0	0	1	15	0
1	2	20	3	35	0
1	4	40	5	55	0
1	3	94	4	29	29
1	1	124	2	139	0
<hr/>					
2	5	0	6	15	0
2	7	20	8	35	0
2	10	45	11	60	0
2	9	70	10	85	0
2	8	104	9	119	9
2	6	134	7	149	0
<hr/>					
65210			192		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	3	67	4	25	25
1	1	103	2	121	0
1	4	133	5	151	0
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	7	24	8	42	0
2	10	54	11	72	0
2	9	84	10	102	0
2	6	126	7	144	0
2	8	150	9	168	0

65310			272		
1	0	0	1	24	0
1	2	32	3	56	0
1	5	72	6	96	0
1	3	120	4	144	0
1	1	168	2	192	0
1	4	208	5	232	0
<hr/>					
2	6	0	7	24	0
2	9	40	10	64	0
2	7	91	8	115	3
2	10	132	11	156	1
2	8	180	9	204	0
<hr/>					
65410			272		
1	0	0	1	24	0
1	1	47	2	23	23
1	2	100	3	29	29
1	3	145	4	21	21
1	4	189	5	20	20
<hr/>					
2	5	0	6	24	0
2	8	40	9	64	0
2	10	72	11	96	0
2	6	136	7	160	0
2	9	176	10	200	0
2	7	224	8	248	0
<hr/>					
65510			238		
1	0	0	1	21	0
1	3	35	4	56	0
1	4	77	5	21	21
1	1	126	2	147	0
1	2	169	3	22	22
<hr/>					
2	5	0	6	21	0
2	8	35	9	56	0
2	10	63	11	84	0
2	6	119	7	140	0
2	9	154	10	175	0
2	7	196	8	217	0
<hr/>					
65610			294		
1	0	0	1	24	0
1	2	32	3	56	0
1	1	126	2	54	54
1	3	158	4	182	0
1	4	203	5	21	21
<hr/>					
2	5	0	6	24	0
2	9	48	10	72	0
2	6	104	7	128	0
2	7	150	8	22	22
2	10	190	11	214	0
2	8	238	9	262	0

65710			310		
1	0	0	1	27	0
1	3	45	4	72	0
1	1	99	2	126	0
1	4	144	5	171	0
1	5	193	6	22	22
1	2	256	3	283	0
<hr/>					
2	6	0	7	27	0
2	9	45	10	72	0
2	7	99	8	126	0
2	10	144	11	171	0
2	8	201	9	228	3
65810			372		
1	0	0	1	30	0
1	4	60	5	90	0
1	1	130	2	160	0
1	2	192	3	32	32
1	5	242	6	272	0
1	3	302	4	332	0
<hr/>					
2	6	0	7	30	0
2	7	102	8	72	72
2	8	153	9	21	21
2	9	208	10	25	25
2	10	274	11	36	36
65910			189		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	4	48	5	66	0
1	5	87	6	21	21
1	3	123	4	141	0
1	1	159	2	177	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	7	39	8	21	21
2	10	69	11	87	0
2	9	99	10	117	0
2	8	129	9	147	0
66010			195		
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	4	48	5	66	0
1	3	78	4	96	0
1	1	114	2	132	0
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	7	24	8	42	0
2	9	48	10	66	0
2	8	78	9	96	0
2	10	117	11	15	15
2	6	165	7	183	0

SERIE 7					
75110			112		
1	0	0	1	7	0
1	4	22	5	29	0
1	3	39	4	46	0
1	2	56	3	63	0
1	1	73	2	80	0
<hr/>					
2	5	0	6	7	0
2	10	27	11	34	0
2	9	44	10	51	0
2	8	61	9	68	0
2	7	78	8	85	0
2	6	95	7	102	0
75210			152		
1	0	0	1	10	0
1	2	17	3	27	0
1	5	41	6	51	0
1	4	65	5	75	0
1	3	89	4	99	0
1	1	120	2	130	0
<hr/>					
2	6	0	7	10	0
2	10	31	11	41	0
2	9	55	10	65	0
2	8	79	9	89	0
2	7	103	8	113	0
75310			168		
1	0	0	1	12	0
1	4	36	5	48	0
1	3	64	4	76	0
1	2	92	3	104	0
1	1	120	2	132	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	8	28	9	40	0
2	10	48	11	60	0
2	9	76	10	88	0
2	7	112	8	124	0
2	6	140	7	152	0
75410			138		
1	0	0	1	9	0
1	5	33	6	42	0
1	4	54	5	63	0
1	3	75	4	84	0
1	2	96	3	105	0
1	1	117	2	126	0
<hr/>					
2	6	0	7	9	0
2	10	27	11	36	0
2	9	48	10	57	0
2	8	69	9	78	0
2	7	90	8	99	0

75510			112		
1	0	0	1	7	0
1	5	27	6	34	0
1	4	44	5	51	0
1	3	61	4	68	0
1	2	78	3	85	0
1	1	95	2	102	0
<hr/>					
2	6	0	7	7	0
2	10	22	11	29	0
2	9	39	10	46	0
2	8	56	9	63	0
2	7	73	8	80	0
75610			168		
1	0	0	1	12	0
1	3	28	4	40	0
1	5	48	6	60	0
1	4	76	5	88	0
1	2	112	3	124	0
1	1	140	2	152	0
<hr/>					
2	6	0	7	12	0
2	9	28	10	40	0
2	10	72	11	32	32
2	8	108	9	120	0
2	7	136	8	148	0
75710			210		
1	0	0	1	15	0
1	3	35	4	50	0
1	5	60	6	75	0
1	4	95	5	110	0
1	2	140	3	155	0
1	1	175	2	190	0
<hr/>					
2	6	0	7	15	0
2	10	45	11	60	0
2	9	80	10	95	0
2	8	115	9	130	0
2	7	150	8	165	0
75810			138		
1	0	0	1	9	0
1	4	27	5	36	0
1	3	48	4	57	0
1	2	69	3	78	0
1	1	90	2	99	0
<hr/>					
2	5	0	6	9	0
2	7	15	8	24	0
2	6	36	7	45	0
2	10	63	11	72	0
2	9	84	10	93	0
2	8	105	9	114	0

75910			186		
1	0	0	1	13	0
1	3	31	4	44	0
1	5	53	6	66	0
1	4	84	5	97	0
1	2	124	3	137	0
1	1	155	2	168	0
<hr/>					
2	6	0	7	13	0
2	10	40	11	53	0
2	9	71	10	84	0
2	8	102	9	115	0
2	7	133	8	146	0
76010			112		
1	0	0	1	7	0
1	5	27	6	34	0
1	4	44	5	51	0
1	3	61	4	68	0
1	2	78	3	85	0
1	1	95	2	102	0
<hr/>					
2	6	0	7	7	0
2	10	22	11	29	0
2	9	39	10	46	0
2	8	56	9	63	0
2	7	73	8	80	0

SERIE 8

85110			156		
1	0	0	1	12	0
1	4	30	5	42	0
1	3	54	4	66	0
1	2	78	3	90	0
1	1	102	2	114	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	7	18	8	30	0
2	9	36	10	48	0
2	6	72	7	84	0
2	8	90	9	102	0
2	10	108	11	120	0
85210			130		
1	0	0	1	10	0
1	4	25	5	35	0
1	3	45	4	55	0
1	2	65	3	75	0
1	1	85	2	95	0
<hr/>					
2	5	0	6	10	0
2	10	30	11	40	0
2	9	50	10	60	0
2	8	70	9	80	0
2	7	90	8	100	0
2	6	110	7	120	0

85310			130		
1	0	0	1	10	0
1	5	30	6	40	0
1	4	50	5	60	0
1	3	70	4	80	0
1	2	90	3	100	0
1	1	110	2	120	0
<hr/>					
2	6	0	7	10	0
2	10	25	11	35	0
2	9	45	10	55	0
2	8	65	9	75	0
2	7	85	8	95	0
85410			240		
1	0	0	1	20	0
1	2	30	3	50	0
1	5	70	6	90	0
1	4	110	5	130	0
1	3	150	4	170	0
1	1	200	2	220	0
<hr/>					
2	6	0	7	20	0
2	10	50	11	70	0
2	9	90	10	110	0
2	8	130	9	150	0
2	7	170	8	190	0
85510			147		
1	0	0	1	12	0
1	4	30	5	42	0
1	3	54	4	66	0
1	2	78	3	90	0
1	1	102	2	114	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	8	24	9	36	0
2	10	42	11	54	0
2	9	66	10	78	0
2	7	96	8	108	0
2	6	120	7	132	0
85610			144		
1	0	0	1	12	0
1	4	30	5	42	0
1	3	54	4	66	0
1	2	78	3	90	0
1	1	102	2	114	0
<hr/>					
2	5	0	6	12	0
2	8	24	9	36	0
2	10	42	11	54	0
2	9	66	10	78	0
2	7	96	8	108	0
2	6	120	7	132	0

85710			130		
1	0	0	1	10	0
1	4	25	5	35	0
1	3	45	4	55	0
1	2	65	3	75	0
1	1	85	2	95	0
<hr/>					
2	5	0	6	10	0
2	10	30	11	40	0
2	9	50	10	60	0
2	8	70	9	80	0
2	7	90	8	100	0
2	6	110	7	120	0
85810			240		
1	0	0	1	20	0
1	3	40	4	60	0
1	2	80	3	100	0
1	1	120	2	140	0
1	4	160	5	180	0
<hr/>					
2	5	0	6	20	0
2	7	30	8	50	0
2	10	70	11	90	0
2	9	110	10	130	0
2	8	150	9	170	0
2	6	200	7	220	0
85910			182		
1	0	0	1	14	0
1	4	35	5	49	0
1	3	63	4	77	0
1	2	91	3	105	0
1	1	119	2	133	0
<hr/>					
2	5	0	6	14	0
2	10	42	11	56	0
2	9	70	10	84	0
2	8	98	9	112	0
2	7	126	8	140	0
2	6	154	7	168	0
86010			216		
1	0	0	1	18	0
1	2	27	3	45	0
1	5	63	6	81	0
1	4	99	5	117	0
1	3	135	4	153	0
1	1	180	2	198	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	9	36	10	54	0
2	10	79	11	25	25
2	8	124	9	142	0
2	7	160	8	178	0

SERIE 9

95110		210			
1	0	0	1	21	0
1	2	28	3	49	0
1	5	63	6	84	0
1	4	98	5	119	0
1	3	133	4	154	0
1	1	175	2	196	0
<hr/>					
2	6	0	7	21	0
2	10	42	11	63	0
2	9	77	10	98	0
2	8	112	9	133	0
2	7	147	8	168	0
95210		270			
1	0	0	1	27	0
1	2	36	3	63	0
1	1	81	2	108	0
1	3	117	4	144	0
1	5	153	6	180	0
1	4	198	5	225	0
<hr/>					
2	6	0	7	27	0
2	10	54	11	81	0
2	9	99	10	126	0
2	8	144	9	171	0
2	7	189	8	216	0
95310		270			
1	0	0	1	27	0
1	2	36	3	63	0
1	5	81	6	108	0
1	4	126	5	153	0
1	3	171	4	198	0
1	1	225	2	252	0
<hr/>					
2	6	0	7	27	0
2	10	54	11	81	0
2	9	99	10	126	0
2	8	144	9	171	0
2	7	190	8	217	1
95410		240			
1	0	0	1	24	0
1	4	48	5	72	0
1	3	88	4	112	0
1	2	128	3	152	0
1	1	168	2	192	0
<hr/>					
2	5	0	6	24	0
2	7	32	8	56	0
2	10	72	11	96	0
2	9	112	10	136	0
2	8	152	9	176	0
2	6	200	7	224	0

95510		180			
1	0	0	1	18	0
1	3	30	4	48	0
1	5	54	6	72	0
1	4	84	5	102	0
1	2	120	3	138	0
1	1	150	2	168	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	10	36	11	54	0
2	9	66	10	84	0
2	8	96	9	114	0
2	7	126	8	144	0
95610		300			
1	0	0	1	30	0
1	2	40	3	70	0
1	5	90	6	120	0
1	4	140	5	170	0
1	3	190	4	220	0
1	1	250	2	280	0
<hr/>					
2	6	0	7	30	0
2	8	40	9	70	0
2	10	80	11	110	0
2	9	130	10	160	0
2	7	197	8	227	7
95710		190			
1	0	0	1	18	0
1	2	24	3	42	0
1	4	48	5	66	0
1	3	88	4	106	10
1	5	112	6	130	0
1	1	160	2	178	0
<hr/>					
2	6	0	7	18	0
2	10	36	11	54	0
2	9	66	10	84	0
2	8	96	9	114	0
2	7	149	8	23	23
95810		183			
1	0	0	1	18	0
1	4	36	5	54	0
1	3	66	4	84	0
1	2	96	3	114	0
1	1	126	2	144	0
<hr/>					
2	5	0	6	18	0
2	7	24	8	42	0
2	10	54	11	72	0
2	9	84	10	102	0
2	8	114	9	132	0
2	6	150	7	168	0

95910			210		
1	0	0	1	21	0
1	3	35	4	56	0
1	4	93	5	37	37
1	2	135	3	156	0
1	1	170	2	191	0
<hr/>					
2	5	0	6	21	0
2	8	35	9	56	0
2	10	63	11	84	0
2	9	98	10	119	0
2	7	140	8	161	0
2	6	175	7	196	0

96010			214		
1	0	0	1	21	0
1	2	28	3	49	0
1	1	63	2	84	0
1	3	95	4	116	4
1	5	123	6	144	0
1	4	158	5	179	0
<hr/>					
2	6	0	7	21	0
2	10	42	11	63	0
2	9	103	10	26	26
2	8	138	9	159	0
2	7	173	8	194	0

SERIE 7+

76114			231		
1	0	0	1	12	0
1	3	28	4	40	0
1	6	56	7	68	0
1	4	92	5	104	0
1	5	131	6	143	27
1	2	175	3	187	0
1	1	203	2	215	0
<hr/>					
2	7	0	8	12	0
2	10	28	11	40	0
2	12	48	13	60	0
2	14	68	15	80	0
2	13	96	14	108	0
2	11	132	12	144	0
2	9	168	10	180	0
2	8	196	9	208	0

76214			180		
1	0	0	1	9	0
1	4	27	5	36	0
1	6	42	7	51	0
1	3	75	4	84	0
1	2	96	3	105	0
1	5	117	6	126	0
1	1	158	2	167	2

2	7	0	8	9	0
2	12	33	13	42	0
2	14	48	15	57	0
2	13	69	14	78	0
2	11	96	12	105	0
2	10	117	11	126	0
2	9	138	10	147	0
2	8	159	9	168	0

76314			224		
1	0	0	1	12	0
1	3	28	4	40	0
1	5	48	6	60	0
1	7	68	8	80	0
1	6	96	7	108	0
1	4	132	5	144	0
1	2	168	3	180	0
1	1	196	2	208	0

2	8	0	9	12	0
2	10	20	11	32	0
2	12	40	13	52	0
2	14	60	15	72	0
2	9	120	10	132	0
2	11	140	12	152	0
2	13	160	14	172	0

76414			251		
1	0	0	1	13	0
1	5	49	6	62	0
1	6	86	7	99	24
1	4	126	5	139	0
1	3	157	4	170	0
1	2	188	3	201	0
1	1	219	2	232	0

2	7	0	8	13	0
2	8	34	9	47	21
2	10	56	11	69	0
2	12	78	13	91	0
2	14	100	15	113	0
2	13	131	14	144	0
2	11	171	12	184	0
2	9	211	10	224	0

76514			168		
1	0	0	1	9	0
1	2	15	3	24	0
1	4	30	5	39	0
1	7	51	8	60	0
1	6	72	7	81	0
1	5	93	6	102	0
1	3	120	4	129	0
1	1	147	2	156	0
<hr/>					
2	8	0	9	9	0
2	14	39	15	48	0
2	13	60	14	69	0
2	12	81	13	90	0
2	11	102	12	111	0
2	10	123	11	132	0
2	9	144	10	153	0
76614			234		
1	0	0	1	12	0
1	3	28	4	40	0
1	2	56	3	68	0
1	1	84	2	96	0
1	4	112	5	124	0
1	6	132	7	144	0
1	5	165	6	177	5
<hr/>					
2	7	0	8	12	0
2	9	20	10	32	0
2	11	40	12	52	0
2	14	68	15	80	0
2	13	96	14	108	0
2	12	124	13	136	0
2	10	160	11	172	0
2	8	196	9	208	0
76714			266		
1	0	0	1	13	0
1	4	40	5	53	0
1	7	71	8	84	0
1	6	102	7	115	0
1	5	133	6	146	0
1	3	173	4	186	0
1	2	204	3	217	0
1	1	235	2	248	0
<hr/>					
2	8	0	9	13	0
2	11	31	12	44	0
2	10	62	11	75	0
2	9	93	10	106	0
2	12	124	13	137	0
2	14	146	15	159	0
2	13	181	14	194	4

76814			151		
1	0	0	1	7	0
1	6	32	7	39	0
1	5	49	6	56	0
1	4	66	5	73	0
1	3	83	4	90	0
1	2	100	3	107	0
1	1	117	2	124	0
<hr/>					
2	7	0	8	7	0
2	10	17	11	24	0
2	14	39	15	46	0
2	13	56	14	63	0
2	12	73	13	80	0
2	11	95	12	102	5
2	9	117	10	124	0
2	8	134	9	141	0
76914			230		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	1	59	2	71	11
1	4	87	5	99	0
1	6	107	7	119	0
1	5	135	6	147	0
1	3	171	4	183	0
<hr/>					
2	7	0	8	12	0
2	10	28	11	40	0
2	12	48	13	60	0
2	14	68	15	80	0
2	13	102	14	114	6
2	11	138	12	150	0
2	9	174	10	186	0
2	8	202	9	214	0
77014			242		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	4	40	5	52	0
1	1	85	2	97	1
1	3	105	4	117	0
1	5	125	6	137	0
1	7	145	8	157	0
1	6	174	7	186	1
<hr/>					
2	8	0	9	12	0
2	13	44	14	56	0
2	12	72	13	84	0
2	14	96	15	108	4
2	11	140	12	152	0
2	10	168	11	180	0
2	9	196	10	208	0

77117			270		
1	0	0	1	12	0
1	4	36	5	48	0
1	6	56	7	68	0
1	8	76	9	88	0
1	7	104	8	116	0
1	5	140	6	152	0
1	3	176	4	188	0
1	2	204	3	216	0
1	1	232	2	244	0
<hr/>					
2	9	0	10	12	0
2	11	20	12	32	0
2	10	48	11	60	0
2	12	69	13	81	1
2	13	105	14	117	24
2	15	125	16	137	0
2	17	145	18	157	0
2	16	174	17	186	1
2	14	210	15	222	0
<hr/>					
77217			223		
1	0	0	1	10	0
1	2	17	3	27	0
1	1	41	2	51	0
1	4	65	5	75	0
1	6	82	7	92	0
1	8	99	9	109	0
1	7	123	8	133	0
1	5	154	6	164	0
1	3	185	4	195	0
<hr/>					
2	9	0	10	10	0
2	11	17	12	27	0
2	13	34	14	44	0
2	15	51	16	61	0
2	17	68	18	78	0
2	16	104	17	114	12
2	14	135	15	145	0
2	12	166	13	176	0
2	10	197	11	207	0
<hr/>					
77317			169		
1	0	0	1	7	0
1	2	12	3	19	0
1	5	29	6	36	0
1	8	46	9	53	0
1	7	63	8	70	0
1	6	91	7	98	11
1	4	113	5	120	0
1	3	130	4	137	0
1	1	152	2	159	0

2	9	0	10	7	0
2	12	17	13	24	0
2	14	29	15	36	0
2	17	46	18	53	0
2	16	63	17	70	0
2	15	88	16	95	8
2	13	110	14	117	0
2	11	132	12	139	0
2	10	149	11	156	0
<hr/>					
77417			306		
1	0	0	1	13	0
1	2	22	3	35	0
1	4	44	5	57	0
1	7	75	8	88	0
1	6	106	7	119	0
1	8	128	9	141	0
1	3	195	4	208	0
1	5	217	6	230	0
1	1	275	2	288	0
<hr/>					
2	9	0	10	13	0
2	13	40	14	53	0
2	15	62	16	75	0
2	17	84	18	97	0
2	16	115	17	128	0
2	14	155	15	168	0
2	12	195	13	208	0
2	11	226	12	239	0
2	10	257	11	270	0
<hr/>					
77517			236		
1	0	0	1	10	0
1	2	17	3	27	0
1	3	50	4	60	23
1	5	67	6	77	0
1	8	91	9	101	0
1	7	115	8	125	0
1	6	139	7	149	0
1	4	170	5	180	0
1	1	208	2	218	0
<hr/>					
2	9	0	10	10	0
2	11	17	12	27	0
2	10	54	11	64	13
2	12	71	13	81	0
2	14	88	15	98	0
2	17	112	18	122	0
2	16	136	17	146	0
2	15	160	16	170	0
2	13	191	14	201	0

77617						237
1	0	0	1	10	0	
1	2	17	3	27	0	
1	5	41	6	51	0	
1	8	65	9	75	0	
1	7	89	8	99	0	
1	6	120	7	130	7	
1	4	152	5	162	1	
1	3	176	4	186	0	
1	1	207	2	217	0	
<hr/>						
2	9	0	10	10	0	
2	14	38	15	48	0	
2	17	62	18	72	0	
2	16	86	17	96	0	
2	15	110	16	120	0	
2	13	141	14	151	0	
2	12	165	13	175	0	
2	11	189	12	199	0	
2	10	213	11	223	0	
<hr/>						
77717						304
1	0	0	1	13	0	
1	4	40	5	53	0	
1	6	62	7	75	0	
1	8	84	9	97	0	
1	7	131	8	144	16	
1	5	171	6	184	0	
1	3	211	4	224	0	
1	2	242	3	255	0	
1	1	273	2	286	0	
<hr/>						
2	9	0	10	13	0	
2	11	22	12	35	0	
2	13	44	14	57	0	
2	15	66	16	79	0	
2	17	88	18	101	0	
2	14	137	15	150	0	
2	16	159	17	172	0	
2	12	217	13	230	0	
2	10	257	11	270	0	
<hr/>						
77817						320
1	0	0	1	13	0	
1	3	31	4	44	0	
1	2	62	3	75	0	
1	4	84	5	97	0	
1	5	117	6	130	20	
1	7	139	8	152	0	
1	8	180	9	193	28	
1	6	220	7	233	0	
1	1	287	2	300	0	

2	9	0	10	13	0	
2	10	45	11	58	32	
2	12	67	13	80	0	
2	11	98	12	111	0	
2	14	129	15	142	0	
2	17	160	18	173	0	
2	16	191	17	204	0	
2	15	222	16	235	0	
2	13	262	14	275	0	
<hr/>						
77917						328
1	0	0	1	15	0	
1	2	25	3	40	0	
1	4	50	5	65	0	
1	6	75	7	90	0	
1	8	100	9	115	0	
1	7	146	8	161	11	
1	5	191	6	206	0	
1	3	236	4	251	0	
1	1	281	2	296	0	
<hr/>						
2	9	0	10	15	0	
2	11	25	12	40	0	
2	13	50	14	65	0	
2	15	75	16	90	0	
2	17	100	18	115	0	
2	14	155	15	170	0	
2	16	180	17	195	0	
2	12	245	13	260	0	
2	10	290	11	305	0	
<hr/>						
78017						207
1	0	0	1	9	0	
1	4	27	5	36	0	
1	6	42	7	51	0	
1	8	57	9	66	0	
1	7	81	8	90	3	
1	5	108	6	117	0	
1	3	135	4	144	0	
1	2	156	3	165	0	
1	1	177	2	186	0	
<hr/>						
2	9	0	10	9	0	
2	14	33	15	42	0	
2	17	54	18	63	0	
2	16	75	17	84	0	
2	15	96	16	105	0	
2	13	123	14	132	0	
2	12	144	13	153	0	
2	11	165	12	174	0	
2	10	186	11	195	0	

78120			293		
1	0	0	1	10	0
1	3	24	4	34	0
1	5	41	6	51	0
1	7	58	8	68	0
1	9	75	10	85	0
1	8	103	9	113	4
1	4	148	5	158	0
1	2	179	3	189	0
1	6	210	7	220	0
1	1	263	2	273	1
<hr/>					
2	10	0	11	10	0
2	12	17	13	27	0
2	14	34	15	44	0
2	16	51	17	61	0
2	19	75	20	85	0
2	18	99	19	109	0
2	20	116	21	126	0
2	17	154	18	164	0
2	15	185	16	195	0
2	11	230	12	240	0
2	13	247	14	257	0
78220			376		
1	0	0	1	13	0
1	4	40	5	53	0
1	6	62	7	75	0
1	9	93	10	106	0
1	7	133	8	146	0
1	8	186	9	199	40
1	5	235	6	248	0
1	3	275	4	288	0
1	2	306	3	319	0
1	1	337	2	350	0
<hr/>					
2	10	0	11	13	0
2	12	22	13	35	0
2	11	61	12	74	8
2	13	83	14	96	0
2	15	105	16	118	0
2	17	127	18	140	0
2	14	176	15	189	0
2	16	198	17	211	0
2	18	220	19	233	0
2	20	242	21	255	0
2	19	273	20	286	0

78320			332		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	4	40	5	52	0
1	6	60	7	72	0
1	8	80	9	92	0
1	10	100	11	112	0
1	9	128	10	140	0
1	7	164	8	176	0
1	1	232	2	244	0
1	3	252	4	264	0
<hr/>					
1	5	272	6	284	0
2	11	0	12	12	0
2	13	20	14	32	0
2	14	59	15	71	27
2	17	87	18	99	0
2	19	107	20	119	0
2	16	151	17	163	0
2	18	180	19	192	9
2	20	200	21	212	0
2	15	260	16	272	0
2	12	304	13	316	0
78420			249		
1	0	0	1	9	0
1	4	27	5	36	0
1	6	42	7	51	0
1	9	63	10	72	0
1	8	84	9	93	0
1	7	124	8	133	19
1	5	151	6	160	0
1	3	178	4	187	0
1	2	199	3	208	0
1	1	220	2	229	0
<hr/>					
2	10	0	11	9	0
2	12	15	13	24	0
2	14	30	15	39	0
2	16	45	17	54	0
2	18	60	19	69	0
2	20	75	21	84	0
2	19	96	20	105	0
2	17	123	18	132	0
2	11	174	12	183	0
2	13	189	14	198	0
2	15	204	16	213	0

78520			332		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	4	40	5	52	0
1	6	60	7	72	0
1	8	80	9	92	0
1	1	156	2	168	0
1	3	176	4	188	0
1	5	196	6	208	0
1	7	216	8	228	0
1	9	236	10	248	0
<hr/>					
2	10	0	11	12	0
2	12	20	13	32	0
2	14	40	15	52	0
2	16	60	17	72	0
2	15	88	16	100	0
2	17	108	18	120	0
2	20	136	21	148	0
2	19	164	20	176	0
2	18	192	19	204	0
2	11	268	12	280	0
2	13	288	14	300	0
78620			240		
1	0	0	1	9	0
1	3	21	4	30	0
1	5	36	6	45	0
1	7	51	8	60	0
1	10	72	11	81	0
1	9	93	10	102	0
1	8	114	9	123	0
1	6	141	7	150	0
1	4	168	5	177	0
1	2	195	3	204	0
1	1	216	2	225	0
<hr/>					
2	11	0	12	9	0
2	13	15	14	24	0
2	16	36	17	45	0
2	20	63	21	72	0
2	17	96	18	105	0
2	19	111	20	120	0
2	18	136	19	145	4
2	15	169	16	178	0
2	14	190	15	199	0
2	12	217	13	226	0

78720			284		
1	0	0	1	10	0
1	2	17	3	27	0
1	5	41	6	51	0
1	7	58	8	68	0
1	9	75	10	85	0
1	8	105	9	115	6
1	6	136	7	146	0
1	4	167	5	177	0
1	1	206	2	216	1
1	3	223	4	233	0
<hr/>					
2	10	0	11	10	0
2	12	17	13	27	0
2	11	52	12	62	11
2	14	76	15	86	0
2	16	93	17	103	0
2	18	110	19	120	0
2	20	127	21	137	0
2	19	153	20	163	2
2	17	184	18	194	0
2	15	215	16	225	0
2	13	246	14	256	0
78820			321		
1	0	0	1	12	0
1	2	20	3	32	0
1	4	40	5	52	0
1	6	60	7	72	0
1	8	80	9	92	0
1	10	100	11	112	0
1	9	133	10	145	5
1	7	169	8	181	0
1	5	205	6	217	0
1	1	257	2	269	0
1	3	277	4	289	0
<hr/>					
2	11	0	12	12	0
2	15	36	16	48	0
2	14	64	15	76	0
2	13	92	14	104	0
2	16	120	17	132	0
2	18	140	19	152	0
2	20	160	21	172	0
2	19	195	20	207	7
2	17	231	18	243	0
2	12	291	13	303	0

78920			240		
1	0	0	1	9	0
1	2	15	3	24	0
1	1	36	2	45	0
1	3	54	4	63	3
1	6	75	7	84	0
1	8	90	9	99	0
1	10	105	11	114	0
1	9	126	10	135	0
1	7	153	8	162	0
1	5	180	6	189	0
1	4	201	5	210	0
<hr/>					
2	11	0	12	9	0
2	15	27	16	36	0
2	17	42	18	51	0
2	20	63	21	72	0
2	19	84	20	93	0
2	18	105	19	114	0
2	16	132	17	141	0
2	14	159	15	168	0
2	13	180	14	189	0
2	12	201	13	210	0

79020			350		
1	0	0	1	13	0
1	4	40	5	53	0
1	6	62	7	75	0
1	9	93	10	106	0
1	8	124	9	137	0
1	7	155	8	168	0
1	5	212	6	225	17
1	3	252	4	265	0
1	2	283	3	296	0
1	1	314	2	327	0
<hr/>					
2	10	0	11	13	0
2	14	40	15	53	0
2	16	62	17	75	0
2	18	84	19	97	0
2	20	106	21	119	0
2	19	137	20	150	0
2	17	177	18	190	0
2	15	217	16	230	0
2	13	257	14	270	0
2	12	288	13	301	0
2	11	319	12	332	0

ANEXO 9

Comparación al aplicar el algoritmo de *Minimum Common Cycle* y su adaptación al uso del Grafo con Tiempo de Ciclo Acotado (TCA), para problemas con dos grúas.

SERIE	(m)				
Ejemplar	MCC, secuencias planteadas	MCC, secuencias evaluadas	MCC-TCA, secuencias planteadas	MCC-TCA, secuencias evaluadas	TC

Ejemplar: código de un ejemplar.

MCC secuencias planteadas: número de secuencias o grafos planteados, aplicando el algoritmo MCC de Lei y Wang (1991).

MCC secuencias evaluadas: número de grafos evaluados correspondiente.

MCC-TCA secuencias planteadas: número de secuencias o grafos planteados, aplicando el algoritmo MCC con utilización del grafo con Tiempo de Ciclo Acotado.

MCC-TCA secuencias evaluadas: número de grafos evaluados correspondiente.

TC: tiempo de ciclo óptimo

Ejemplar	Algoritmo MCC		Algoritmo MCC con grafo TCA		TC
	Secuencias planteadas	Secuencias evaluadas	Secuencias planteadas	Secuencias evaluadas	
SERIE 1	m=10				
15110	356	309	160	145	204
15210	285	254	145	116	158
15310	270	239	120	113	172
15410	194	174	83	68	138
15510	329	292	143	128	133
15610	218	176	166	144	276
15710	135	109	55	34	106
15810	259	195	106	89	251
15910	365	341	83	73	138
16010	273	244	88	67	138
SERIE 2	m=10				
25110	60	43	60	43	128
25210	285	236	146	120	224
25310	288	238	130	106	135
25410	221	156	134	100	274
25510	245	186	124	100	280
25610	218	197	94	78	149
25710	182	164	122	111	264
25810	313	255	183	159	252
25910	444	365	99	86	137
26010	223	187	111	90	171
SERIE 3	m=10				
35110	292	235	123	98	196
35210	215	191	102	92	195
35310	297	249	169	151	234
35410	266	227	151	126	218
35510	233	184	177	147	332
35610	307	249	134	105	224
35710	235	206	126	102	236
35810	181	143	109	88	298
35910	245	219	123	108	188
36010	306	277	163	150	192
SERIE 4	m=10				
45110	243	217	82	67	181
45210	374	344	223	205	250
45310	208	191	97	88	158
45410	420	377	177	150	158
45510	180	161	76	66	112
45610	350	317	166	150	204
45710	331	302	106	99	102
45810	435	402	218	188	200
45910	272	243	96	77	138
46010	195	175	99	81	192

SERIE 5	m=10				
55110	246	208	131	110	252
55210	325	288	113	97	182
55310	371	302	214	190	280
55410	459	416	170	152	216
55510	373	340	156	142	182
55610	347	276	143	109	216
55710	234	211	90	84	199
55810	489	456	139	123	208
55910	313	263	122	89	147
56010	384	325	161	134	205
SERIE 6	m=10				
65110	266	223	137	110	159
65210	358	313	134	110	192
65310	309	264	126	106	272
65410	229	183	136	111	272
65510	302	262	145	123	238
65610	129	92	85	64	294
65710	152	122	84	66	310
65810	228	179	157	123	372
65910	354	310	166	143	189
66010	175	151	83	66	195
SERIE 7	m=10				
75110	305	277	74	57	112
75210	554	475	412	342	152
75310	387	343	112	103	168
75410	319	275	78	60	138
75510	270	229	55	41	112
75610	448	413	131	120	168
75710	377	342	158	138	210
75810	402	334	218	152	138
75910	730	676	162	150	186
76010	282	226	69	47	112
SERIE 8	m=10				
85110	371	330	105	89	156
85210	368	338	88	70	130
85310	334	298	69	51	130
85410	778	728	359	348	240
85510	219	183	200	157	147
85610	337	295	299	253	144
85710	337	280	100	77	130
85810	765	723	231	222	240
85910	431	384	106	95	182
86010	864	812	185	172	216

SERIE 9	m=10				
95110	406	378	122	108	210
95210	407	389	155	150	270
95310	739	714	174	166	270
95410	474	453	166	158	240
95510	267	257	72	65	180
95610	773	727	479	444	300
95710	388	361	193	174	190
95810	343	293	122	93	183
95910	585	558	98	88	210
96010	484	464	301	285	214

SERIE 7+	m=14				
76114	2232	1867	818	734	231
76214	4018	3336	1489	1335	180
76314	4921	3788	1025	861	224
76414	3505	2750	2114	1862	251
76514	4706	3811	4179	3469	168
76614	3615	2986	1698	1512	234
76714	10631	9150	2872	2652	266
76814	4139	3201	663	540	151
76914	3767	2874	1130	1031	230
77014	6093	5092	1571	1403	242

SERIE 7+	m=17				
77117	10371	7580	6244	5661	270
77217	16961	12538	5123	4056	223
77317	16751	11832	11527	9354	169
77417	21972	17623	9357	8343	306
77517	20681	15051	6832	5464	236
77617	28786	19675	9039	7786	237
77717	15569	12301	5721	4978	304
77817	14502	12264	6365	5938	320
77917	54729	40641	16270	12961	328
78017	40009	27973	11038	8260	207

SERIE 7+	m=20				
78120	131467	90511	26150	19934	293
78220	52685	38932	17225	13928	376
78320	85626	67833	27432	24989	332
78420	64318	43231	23863	17554	249
78520	107169	75289	32750	25171	332
78620	89689	60852	41348	36182	247
78720	86027	65349	25909	20558	284
78820	116138	85229	34703	27632	321
78920	48957	33121	14546	11102	240
79020	97899	65115	35689	28902	350